Tibor Katriňák

Примечание к структурам Стоуна. II.

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 1, 20--37

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126918`

Matematický časopis 17 (1967), No. 1

ПРИМЕЧАНИЕ К СТРУКТУРАМ СТОУНА II

ТИБОР КАТРИНЯК (TIBOR KATRIŇÁK), Братислава

В первой части этой работы мы будем изучать дистрибутивные структуры с наименьшим элементом O, удовлетворящие следующему условию:

(ГШ) Объединение (относительно исчисления комплексов) двух различных минимальных простых идеалов структуры L снова равно L.

Г. Гретцер и Э. Т. Шмидт в [2] показали, что этому условию удовлетворяют структуры Стоуна. В [6] было показано, что класс всех дистрибутивных структур с наименьшим элементом, удовлетворяющих условию (ГШ), не равен классу всех структур Стоуна. Нами будет дана характеризация тех дистрибутивных структур с наименьшим элементом, которые удовлетворяют условию (ГШ). В другой части мы будем изучать структуру отношений конгруэнтности на некоторой структуре. Будут приведены необходимые и достаточные условия для структуры L, чтобы ее отношения конгруэнтности образовали структуру Стоуна.

§ 1. Дистрибутивные структуры, удовлетворяющие условию (ГШ)

Символом $\cup$ ($\cap$) мы обозначим структурную операцию объединения (пересечения). Кроме того, $\bigvee (a_\alpha;\ \alpha \in J)$ и $\bigwedge (a_\alpha;\ \alpha \in J)$ будет обозначать соответственно наименьшую верхную грань и наибольшую нижную грань множества элементов $\{a_\alpha;\ \alpha \in J\}$ некоторой структуры (если такой элемент существует).

Определение 1. *Структуру L с наименьшим элементом O будем называть структурой с псевдодополнениями, если для всякого $a \in L$ существует такое $a^* \in L$, что $a \cap x = O$ тогда и только тогда, если $x \leqslant a^*$.*

Можно показать (смотри [1, IX, § 12]), что структуры с псевдодополнениями всегда имеют наибольший элемент $I = O^*$. В настоящей работе мы будем изучать только дистрибутивные структуры с псевдодополнениями. Такими являются, например, полные структуры всех непустых идеалов некоторой дистрибутивной структуры с наименьшим элементом, упорядоченных относительно теоретико-множественного включения. Если J —

идеал дистрибутивной структуры с наименьшим элементом O, то $J^* = \{z \in L;\ x \cap z = O$ для всех $x \in J\}$. Далее, важным примером дистрибутивной структуры с псевдодополнениями является структура $\Theta(L)$ всех отношений конгруэнтности на некоторой структуре L.

Определение 2 (смотри [6]). *Структуру L будем называть структурой с локальными псевдодополнениями, если L имеет наименьший элемент O и для каждого $a \in L$ подструктура $[O, a]$ является структурой с псевдодополнениями.*

Легко можно доказать, что дистрибутивная структура с псевдодополнениями будет структурой с локальными псевдодополнениями (смотри [6, лемма 6]).

Определение 3. *Дистрибутивную структуру L будем называть структурой Стоуна, если L — структура с псевдодополнениями и для каждого $x \in L$ имеет место $x^* \cup x^{**} = I$ (I — наибольший элемент в L). Дистрибутивную структуру L будем называть обобщенной структурой Стоуна, если L — структура с локальными псевдодополнениями и для всякого $a \in L$ подструктура $[O, a]$ будет структурой Стоуна.*

В [6, лемма 6, лемма 8] доказано, что структура Стоуна является обобщенной структурой Стоуна и кроме того, доказана следующая

Лемма 1. *Пусть L — дистрибутивная структура с наименьшим элементом O. L будет обобщенной структурой Стоуна тогда и только тогда, когда для каждого $x \in L$ имеет место равенство: $(x]^* \cup (x]^{**} = L$* (1).

Минимальным простым идеалом структуры L будем называть минимальный элемент частично упорядоченного множества всех простых идеалов структуры L (2). Если дистрибутивная структура L содержит по крайней мере два элемента, то P будет минимальным простым идеалом структуры L тогда и только тогда, когда $L - P$ (3) является максимальным дуальным идеалом структуры L.

Лемма 2 (Стоун). *Пусть L — дистрибутивная структура, $J \neq \emptyset$ — идеал и $D \neq \emptyset$* (4) *дуальный идеал структуры L. Пусть далее множественное пересечение J с D — пустое множество. Тогда в множестве всех идеалов структуры L, содержащих J и непересекающихся с D существует максимальный идеал, который является простым идеалом.*

---

(1) $(x]$ для $x \in L$ обозначает главный идеал структуры L, образованный элементом x. Аналогично $[x)$ обозначает дуальный главный идеал.

(2) В настоящей работе мы рассматриваем только непустые простые идеалы структуры L, отличные от L.

(3) $L - P$ обозначает разность множеств.

(4) $\emptyset$ обозначает пустое множество.

Доказательство этого утверждения хорошо известно. Смотри, например, [1, X, § 6].

Лемма 3. *Пусть L — дистрибутивная структура,* J_1, J_2 — идеалы *структуры L. Если $J_1 \cup J_2 = (a]$, $J_1 \cap J_2 = (b]$* (5) *(a, $b \in L$), то J_1, J_2 — главные идеалы.*

Доказательство смотри в [3, лемма II].

Лемма 4. *Каждый простой идеал дистрибутивной структуры содержит минимальный простой идеал.*

Доказательство смотри в [4, лемма 2].

Лемма 5. *Пусть L — дистрибутивная структура с наименьшим элементом O. Пусть P— простой идеал структуры L, $x \in L$ и $x \notin P$. Тогда $(x]^* \subset P$.*

Доказательство вытекает из [6, лемма 5].

Лемма 6. *Пусть L — дистрибутивная структура с наименьшим элементом O. Пусть P, Q — минимальные простые идеалы структуры L и $P \neq Q$. Тогда для каждого $z \in P \cap Q$ существуют такие элементы $y_1 \in P - Q$ и $y_2 \in Q - P$, что $z = y_1 \cap y_2$.*

Доказательство. Очевидно, что $P \cap Q = P \bigcap Q$ (смотри (5)). Из предположения вытекает, что $P - Q \neq \emptyset$, $Q - P \neq \emptyset$. Пусть $t \in Q - P$. $L - Q$ — максимальный дуальный идеал и для дуальных идеалов $L - Q$, $[t)$ имеет место $\check{L} = (L - Q) \cup [t)$ (6). Очевидно, что $\check{L}$ — дистрибутивная структура. Из [1, IX, § 6] вытекает, что всякий элемент из $\check{L}$ и тем более элемент $z \in P \cap Q$ можно написать в виде $y_1 \cap y_2$, где $y_1 \in L - Q$ и $y_2 \in [t)$. Мы предполагаем, что $y_2 \notin P$ и $y_1 \notin Q$. P, Q — простые идеалы, а из этого следует, что $y_2 \in Q$, $y_1 \in P$. Итак, $y_1 \in P - Q$, $y_2 \in Q - P$.

Теорема 1. *Пусть L — дистрибутивная структура с наименьшим элементом O. Пусть P — минимальный простой идеал структуры L. Пусть далее Q — непустое подмножество L и $P \neq Q$. Q является минимальным простым идеалом структуры L тогда и только тогда, когда*

(а) *$P \cap Q$ — минимальный простой идеал подструктуры P и*

(б) $Q = \bigvee ((x]^*;\ x \in P - Q)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть Q — минимальный простой

(5) $J_1 \cup J_2$ ($J_1 \cap J_2$) обозначает операцию объединения (пересечения) идеалов J_1, J_2 — относительно исчисления комплексов — в структуре всех непустых идеалов некоторой структуры. Символ $\bigcup$ ($\bigcap$) обозначает множественную операцию объединения (пересечения). Известно, что в структуре всех непустых идеалов $J_1 \cap J_2 = J_1 \bigcap J_2$.

(6) $\check{L}$ — структура дуальная к L.

идеал структуры L. Очевидно, что $P \cap Q = P \bigcap Q$ — простой идеал подструктуры P. Пусть $P \neq Q$. Тогда $P — Q \neq \emptyset$, $Q — P \neq \emptyset$. Покажем, что $P — Q$ — максимальный дуальный идеал подструктуры P. Для этого достаточно показать, что для всякого $b \in P \cap Q$ существует такое $a \in P — Q$, что $a \cap b = O$. Пусть $b \in P \cap Q$. Тогда из леммы 6 вытекает, что существуют такие $y_1 \in P — Q$ и $y_2 \in Q — P$, для которых $b = y_1 \cap y_2$. Так как Q — минимальный простой идеал структуры L, то $L — Q$ максимальный дуальный идеал структуры L. Итак, $(L — Q) \cup [y_2) = \check{L}$. Из последнего вытекает, что существуют такие $a \in L — Q$ и $d \in [y_2)$, для которых $O = a \cap d$. Тем более $O = a \cap y_2$. Так как P — простой идеал, $a \cap y_2 \in P$, $y_2 \notin P$, то $a \in P$. Итак, $a \in P — Q$. Тогда $a \cap b = a \cap (y_1 \cap y_2) = (a \cap y_2) \cap \cap y_1 = O$. Тем самым показано, что $P — Q$ является максимальным дуальным идеалом подструктуры P. Теперь докажем условие (б). Если $x \in P — Q$, то $(x]^* \subset Q$ (лемма 5). Из этого следует $\dot{\bigcup} ((x]^*; x \in P — Q) \subset Q$. Если $b \in Q — P$, то из леммы 5 вытекает, что $(b]^* \subset P$. $L — Q$ — максимальный дуальный идеал структуры L. Тогда $\check{L} = (L — Q) \cup [b)$. Из этого видим, что существует такое $a \in L — Q$, для которого $a \cap b = O$. Очевидно, что $b \in (a]^*$ и $a \in P — Q$. Если $b \in P \cap Q$, то из (а) видим, что $P — Q$ — максимальный дуальный идеал подструктуры P и $\check{P} = = (P — Q) \cup ([b) \bigcap P)$. Из этого вытекает, что существует $a \in P — Q$ и $a \cap b = O$. Тогда $b \in (a]^*$ и $Q \subset \bigcup ((x]^*; x \in P — Q)$. Итак, $Q = \bigcup ((x]^*; x \in P — Q)$. Из последнего следует, что $Q = \bigvee ((x]^*; x \in P — Q)$.

Достаточность. Из (б) следует, что Q — идеал структуры L. Для дистрибутивных структур с псевдодополнениями $(x \cap y)^* = (x^* \cup y^*)^{**}$ тождественным образом (смотри [1, IX, § 12]). Итак, для $x, y \in P — Q$ $((x]^* \cup \cup (y]^*)^{**} = (x \cap y]^* \subset Q$. Очевидно, что $(x]^* \cup (y]^* \subset (x \cap y]^*$. Итак, множество всех идеалов $(x]^*$ $(x \in P — Q)$ направлено и $Q = \dot{\bigcup} ((x]^*; x \in P — Q)$. Теперь покажем, что Q — простой идеал структуры L. Пусть $x \cap y \in Q$. Используя условие (б) мы видим, что существует такой $a \in P — Q$, что $x \cap y \in (a]^*$. Так как $a \in P — Q$, то $a \cap x \in P$. Если $a \cap x \in P — Q$, то $y \in Q$, потому что $(a \cap x) \cap y = O$. Пусть $a \cap x \in P \cap Q$. На основании условия (а) $P \cap Q$ — минимальный простой идеал подструктуры P. Итак, $P — Q$ является максимальным дуальным идеалом подструктуры P и $\check{P} = = (P — Q) \cup ([a \cap x) \bigcap P)$. Очевидно, существует такое $b \in P — Q$, что $b \cap (a \cap x) = O$. Так как $b \cap a \in P — Q$, то $x \in (b \cap a]^* \subset Q$. Тем самым доказано, что Q — простой идеал структуры L. Существует минимальный простой идеал $Q' \subset Q$ (лемма 4). Очевидно, что $P \cap Q' \subset P \cap Q$. В первой части нашего доказательства (необходимость) мы доказали, что $P \cap Q'$ — минимальный простой идеал подструктуры P. Из (а) следует, что $P \cap Q' = P \cap Q$. Итак, $P — Q' = P — Q$. Из (б) и первой части доказательства следует, что $Q' = \bigvee ((x]^*; x \in P — Q) = Q$.

Лемма 7. *Пусть L — дистрибутивная структура с наименьшим элементом O. Пусть P, Q — минимальные простые идеалы структуры L и $P \cap Q = (O]$. Тогда следующие условия равносильны:*

(а) *L удовлетворяет условию* (ГШ)

(б) *L — обобщенная структура Стоуна.*

Доказательство. Если $P \cap Q = (O]$ и $P = Q$, то $P = P \cap Q = (O]$. L имеет только один минимальный простой идеал. Условие (а) для этого случая всегда выполнено. Легко можно доказать, что наше утверждение справедливо. (Если $x \in L$, $x \neq O$, то из леммы 5 $(x]^* = (O]$; $(O]^* = L$ и на основании леммы 1, L — обобщенная структура Стоуна). Пусть теперь $P \neq Q$. Из теоремы 1 вытекает, что L имеет только два минимальных простых идеала: P и Q. Пусть $P \cup Q = L$ (условие (а)). Докажем (б). Для этого достаточно для всех $x \in L$ показать, что $(x]^* \cup (x]^{**} = L$ (лемма 1). Пусть $x \in L - (P \bigcup Q)$. Если $x \cap y = O$, то из леммы 5 вытекает, что $y \in P \cap Q = (O]$. Тогда $(x]^* = (O]$ и $(x]^* \cup (x]^{**} = L$. Очевидно, что $(O]^* \cup (O]^{**} = L$. Пусть, наконец, $x \in P \bigcup Q$ и $x \neq O$. Тогда $x \in P$ или $x \in Q$. Если $x \in P$, то из леммы 5 вытекает $(x]^* \subset Q$. Так как $P \cap Q = (O]$, то для всякого $y \in Q$ будет $x \cap y \in P \cap Q = (O]$. Итак, $Q \subset (x]^*$. Из последнего следует, что $(x]^* = Q$. Аналогично, если $x \in Q$ то $(x]^* = P$. Из леммы 5 следует, что $P^* \subset Q$ ($P^* = \bigwedge ((x]^*; x \in P)$). С другой стороны, если $y \in Q$, то $(y] \cap P \subset Q \cap P = (O]$ и $P^* \supset Q$. Итак, $P^* = Q$. Аналогично, $Q^* = P$. Из последнего, $(x]^* \cup (x]^{**} = P \cup Q = L$ ($x \in P \bigcup Q$). Пусть теперь L — обобщенная структура Стоуна (условие (б)). Покажем, что L удовлетворяет условию (а). Так как $P \neq Q$, то $P \neq (O] \neq Q$. Тогда существует $x \neq O$ и $x \in P$. Очевидно, $(x]^* = Q$, $(x]^{**} = P$. Из (б) и леммы 1 получим $P \cup Q = L$. Итак, имеет место (а).

В далнейшем мы используем важное утверждение, касающееся минимальных конгруэнтностей дистрибутивной структуры, которое доказано в [4, теорема 2].

Лемма 8. *Пусть J — идеал дистрибутивной структуры L. Для a, $b \in L$, $a \geqslant b$ является $a \equiv b$ $(\Theta [J])$* (7) *тогда и только тогда, когда существует такой $w \in J$, что $a = b \cup w$.*

Лемма 9. *Пусть P_1, P_2 — различные минимальные простые идеалы дистрибутивной структуры L с наименьшим элементом O. Тогда $\overline{P}_1 = \eta (P_1)$, $\overline{P}_2 = \eta (P_2)$ — различные минимальные простые идеалы структуры $L/\Theta [P_1 \cap P_2]$* (8), *где η — естественный гомоморфизм L на $L/\Theta [P_1 \cap P_2]$ и $\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 = (\overline{O}]$.*

---

(7) $\Theta [J]$ обозначает наименьшую конгруэнтность из $\Theta(L)$, для которой имеет место высказывание: Из $x, y \in J$ следует $x \equiv y(\Theta)$ для $\Theta \in \Theta(L)$.

(8) $L/\Theta [P_1 \cap P_2]$ обозначает фактор-структуру по конгруэнтности $\Theta [P_1 \cap P_2]$.

Доказательство. Известно, что если Q — простой идеал структуры L, то множества Q и $L - Q$ классы разбиения L, определенные конгруэнтностью на L. Пусть φ_1, φ_2 — конгруэнтности, отвечающие минимальным простым идеалам P_1, P_2. Очевидно, что $\Theta [P_1 \cap P_2] \leqslant \varphi_1 \cap \varphi_2$. Из последнего следует, что для каждого $i \in \{1, 2\}$ верно условие

(*) Если $a \in P_i$, $b \in L - P_i$, то $a \not\equiv b$ $(\Theta [P_1 \cap P_2])$.

Пусть $\bar{L} = L/\Theta [P_1 \cap P_2]$. Пусть далее η обозначает естественный гомоморфизм L на $\bar{L}$. Очевидно, $\bar{L}$ — дистрибутивная структура с наименьшим элементом $\bar{O}$. Для всякого $i \in \{1, 2\}$ $\bar{P}_i = \eta (P_i)$ — идеал структуры $\bar{L}$. Из (*) следует, что $\eta^{-1} (\bar{P}_i) = P_i$ и $\eta^{-1} (\bar{L} - \bar{P}_i) = L - P_i$ для каждого $i \in \{1, 2\}$. Итак $\bar{L} - \bar{P}_i = \eta (L - P_i)$ — дуальный идеал структуры $\bar{L}$ и $\bar{P}_i$ — простой идеал $\bar{L}$, для каждого $i \in \{1, 2\}$. Пусть $\bar{x} \in \bar{P}_i$, $i \in \{1, 2\}$. Тогда существует такое $x \in P_i$, что $\eta (x) = \bar{x}$. Так как $L - P_i$ — максимальный дуальный идеал L, то существует такое $y \in L - P_i$, что $x \cap y = O$. Из (*) видим, что $\bar{y} = \eta (y) \in \bar{L} - \bar{P}_i$. Так как η — гомоморфизм, то $\bar{x} \cap \bar{y} = \bar{O}$ и $\bar{L} - \bar{P}_i$ — максимальный дуальный идеал структуры $\bar{L}$. Итак $\bar{P}_i$ — минимальный простой идеал $\bar{L}$ для каждого $i \in \{1, 2\}$. Если $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$, то из $\eta^{-1} (\bar{P}_i) = P_i$ $(i \in \{1, 2\})$ следует, что $P_1 = P_2$. Итак, $\bar{P}_1 \neq \bar{P}_2$. Из леммы 8 следует, что $P_1 \cap P_2$ — ядро гомоморфизма η. Очевидно, что $\eta^{-1} (\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2) \subset P_1$, P_2. Итак, $\eta^{-1} (\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2) \subset P_1 \cap P_2$. Из последнего $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = (\bar{O}] = \eta (P_1 \cap P_2)$.

Теорема 2. *Пусть L — дистрибутиваая структура с наименьшим элементом O. Структура L удовлетворяет условию* (ГШ) *тогда и только тогда, когда для всяких двух различных минимальных простых идеалов P_1, P_2 структуры L фактор-структура L/Θ $[P_1 \cap P_2]$ является обобщенной структурой Стоуна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P_1 \cup P_2 = L$. Тогда $\bar{L} = \bar{P}_1 \cup \bar{P}_2$ (смотри обозначение из леммы 9). Из леммы 9 следует, что $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = (\bar{O}]$ и из леммы 7 уже вытекает, что $\bar{L}$ — обобщенная структура Стоуна.

Достаточность. Пусть $\bar{L}$ является для всяких двух различных минимальных простых идеалов P_1, P_2 структуры L, обобщенной структурой Стоуна. ($\bar{L} = L/\Theta [P_1 \cap P_2]$). На основании леммы 9 $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ — различные минимальные простые идеалы $\bar{L}$ и $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = (\bar{O}]$. Из леммы 7 получим $\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 = \bar{L}$. Покажем, что $P_1 \cup P_2 = L$. Пусть $z \in L$. Тогда $\eta(z) = \bar{z} \in \bar{L}$ и $\bar{z} = \bar{x} \cup \bar{y}$ для некоторых $\bar{x} \in \bar{P}_1$ и $\bar{y} \in \bar{P}_2$. Пусть $x \in P_1, y \in P_2$ и $\eta(x) = \bar{x}$, $\eta(y) = \bar{y}$. Тогда, очевидно, $(x \cup y) \cap z \equiv z(\Theta[P_1 \cap P_2])$. Пусть $b = (x \cup y) \cap z$. Так как $b \leqslant x \cup y$ и $x \cup y \in P_1 \cup P_2$, то $b \in P_1 \cup P_2$. Так как L — дистрибутивная структура, то $b = x_1 \cup y_1$, где $x_1 \leqslant x, y_1 \leqslant y$. Известно, что $z \equiv b(\Theta [P_1 \cap P_2])$ и $z \geqslant b$. На основании леммы 8 существует такое $w \in P_1 \cap P_2$, что $z = b \cup w$. Очевидно, что $x_1 \cup w \in P_1$, $y_1 \cup w \in P_2$ и $z = b \cup w = (x_1 \cup w) \cup (y_1 \cup w)$. Итак, $z \in \in P_1 \cup P_2$ и $P_1 \cup P_2 = L$.

Лемма 10. *Пусть P_1, P_2 — различные минимальные простые идеалы дистрибутивной структуры L с наименьшим элементом O, удовлевлетворящей условию* (ГШ). *Пусть $x \in P_1 - P_2$. Тогда для каждого $t \in P_2$ существует такое $y \in (x]^*$, что $y \equiv t$ $(\Theta[P_1 \cap P_2])$.*

Доказательство. Пусть наше утверждение неверно. Тогда существует такое $t \in P_2$, что для всех $y \equiv t$ $(\Theta[P_1 \cap P_2])$ будет $x \cap y > O$. Очевидно, $t \in P_2 - P_1$. Пусть D — наименьший дуальный идеал, содержащий все элементы $x \cap y$, где $y \equiv t(\Theta[P_1 \cap P_2])$. Очевидно, что $O \notin D$. Из лемм 2 и 4 вытекает, что существует минимальный простой идеал Q структурыL,где $Q \subset L - D$. Так как $x, t \notin Q$, то $P_1 \neq Q \neq P_2$. Пусть $\bar{L} = L/\Theta\ [P_1 \cap P_2]$ и η — естественный гомоморфизм L на $\bar{L}$. Тогда $\bar{P}_1 = \eta(P_1)$, $\bar{P}_2 = \eta(P_2)$ и $\bar{Q} = \eta(Q)$ — идеалы структуры $\bar{L}$. Если $y \equiv t(\Theta[P_1 \cap P_2])$, то $y \in D$ и $\eta(t) \in \bar{P}_2$, а поэтому $\eta(t) \notin \bar{Q}$ и $\bar{Q} \neq \bar{P}_2$. Итак, $\bar{Q} \cap \bar{P}_2 \neq \bar{P}_2$. На основании леммы 9, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ — различные минимальные простые идеалы структуры $\bar{L}$ и $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = (\bar{O}]$. Из теоремы 1 следует, что $\bar{L}$ никаких других минимальных простых идеалов не имеет. Так как $\bar{Q} \cap \bar{P}_2 \neq \bar{P}_2$, то $\bar{Q} \cap \bar{P}_2$ не может уже быть минимальным простым идеалом $\bar{L}$ и поэтому $\bar{P}_1 \neq \bar{Q} \cap \bar{P}_2$. Из предположения следует, что $\bar{L}$ — дистрибутивная структура и из [1, IX, §6] вытекает, что и структура всех идеалов структуры $\bar{L}$ является дистрибутивной. L удовлетворяет условию (ГШ) а поэтому $P_1 \cup P_2 = = P_1 \cup Q = L$. Так как η — гомоморфизм L на $\bar{L}$, что $\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 = \bar{P}_1 \cup \cup \bar{Q} = \bar{L}$. Из последнего следует, что $(\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2) \cap (\bar{P}_1 \cup \bar{Q}) = \bar{P}_1 \cup \cup (\bar{P}_2 \cap \bar{Q}) = \bar{L}$. Одновременно $(\bar{O}] = \bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = \bar{P}_1 \cap (\bar{P}_2 \cap \bar{Q})$. Из последнего вытекает, что $\bar{P}_1$ имеет два различных дополнения в дистрибутивной структуре всех идеалов структуры $\bar{L}$. Но это противоречит [1, IX, следствие 1 теоремы 2].

Лемма 11. *Пусть L — дистрибутивная структура с локальными псевдодополнениями, удовлетворящая условию* (ГШ). *Пусть для $z \in L$ $(x, x^+, x^{++} \in [O, z])$ x^+ и x^{++} обозначает соответственно псевдоподолнение элемента x и элемента x^+ в структуре $[O, z]$. Пусть M_1, M_2 — различные минимальные простые идеалы структуры L и $x \in M_1 - M_2$, $x^+ \in M_2 - - M_1$. Тогда $x^+ \cup x^{++} \equiv z(\Theta[M_1 \cap M_2])$.*

Доказательство. Из $x^+ \in M_2 - M_1$, используя лемму 5, получим $x^{++} \in (x^+]^* \subset M_1$. Пусть $\bar{L} = L/\Theta\ [M_1 \cap M_2]$. Пусть далее η — естественный гомоморфизм L нэ $\bar{L}$ и $\bar{M}_1 = \eta(M_1)$, $\bar{M}_2 = \eta(M_2)$, $\bar{z} = \eta(z)$. Так как $M_1 \cup M_2 = L$, то $\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 = \bar{L}$. Итак, $(\bar{M}_1 \cap (\bar{z}]) \cup (\bar{M}_2 \cap (\bar{z}]) = (\bar{M}_1 \cup$

$\cup \bar{M}_2) \cap (\bar{z}] = (\bar{z}]$, потому что $\bar{L}$ — дистрибутивная структура. Из леммы 9 следует, что $(\bar{M}_1 \cap (\bar{z}]) \cap (\bar{M}_2 \cap (\bar{z}]) = (\bar{O}]$. Из леммы 3 вытекает, что $\bar{M}_1 \cap (\bar{z}] = (\bar{u}]$, $\bar{M}_2 \cap (\bar{z}] = (\bar{v}]$, где $\bar{u} = \eta(u)$, $\bar{v} = \eta(v)$ и $u, v \in L$. Теперь покажем, что $x^+ \equiv v$ $(\Theta[M_1 \cap M_2])$ и $x^{++} \equiv u$ $(\Theta[M_1 \cap M_2])$. Известно, что $x^+ \in M_2$ и $x^+ \leqslant z$ и поэтому $\eta(x^+) = \overline{x^+} \in \bar{M}_2 \cap (\bar{z}]$. Итак, $\bar{v} \geqslant \overline{x^+}$. Так как $\bar{v} \in \bar{M}_2$, то существует такое $m_2 \in M_2$, что $\bar{v} = \eta(m_2)$. На основании (*) (смотри доказательство леммы 9) $v \in M_2$, потому что $v \equiv m_2$ $(\Theta[M_1 \cap M_2])$. На основании леммы 10 существует такой элемент $y \in M_2$, что $y \in (x]^*$ и $y \equiv v$ $(\Theta[M_1 \cap M_2])$. Так как $\bar{z} \geqslant \bar{v}$ в структуре $\bar{L}$, то $z \cap y \equiv v$ $(\Theta[M_1 \cap M_2])$. Но $z \cap y \in (x]^*$, потому что $z \cap y \leqslant y$. Из $z \cap y \in (x]^*$ и $z \cap y \leqslant z$ следует $z \cap y \leqslant x^+$. Из последнего получим, что $x^+ \geqslant \bar{v}$. Итак, $\overline{x^+} = \bar{v}$. Аналогично покажем, что $\overline{x^{++}} = \bar{u}$. Так как $\bar{u} \cup v = \bar{z}$, то $x^+ \cup x^{++} \equiv z$ $(\Theta[M_1 \cap M_2])$.

Теорема 3. *Пусть L — дистрибутивная структура с локальными псевдодополнениями. L — обобщенная структура Стоуна тогда и только тогда, когда L удовлетворяет условию* (ГШ) ([9]).

Доказательство. Необходимость. Пусть P_1, P_2 — различные минимальные простые идеалы обощенной структуры Стоуна. Очевидно, что $P_2 - P_1 \neq \emptyset$, $P_1 - P_2 \neq \emptyset$. Пусть $y \in P_2 - P_1$. Так как $L - P_2$ — максимальный дуальный идеал, то существует $x \in L - P_2$, для которого имеет место: $x \cap y = O$. Элемент $y \notin P_1$ и поэтому $x \in P_1$. Итак, $x \in P_1 - P_2$. Из леммы 5 следует, что $(x]^* \subset P_2$. Так как $y \in (x]^*$, то снова из леммы 5 вытекает, что $(y]^* \subset P_1$. Одновременно $(y]^* \supset (x]^{**}$. Из последнего и леммы 1 вытекает, что $L = (x]^* \cup (x]^{**} \subset P_2 \cup P_1$. Итак, L удовлетворяет условию (ГШ).

Достаточность. Пусть L удовлетворяет условию (ГШ). Покажем, что для каждого $z' \in L$ подструктура $[O, z']$ — структура Стоуна, т. е. если для $x \in [O, z']$ x^+ и x^{++} — псевдодополнения соответственно элемента x и x^+ в $[O, z']$, то $x^+ \cup x^{++} = z'$. Очевидно, для $x = O$ или $x^+ = O$ получим $x^+ \cup x^{++} = z'$. Дальше будем предполагать, что $x \neq O$ и $x^+ \neq O$. Тогда для $x \in [O, z']$ существует такой минимальный простой идеал P_1 структуры L, что $x \in P_1$ ([10]). Из лемм 2 и 4 следует, что существует минимальный простой идеал P_2 структуры L, для которого $x \notin P_2$. В [6, лемма 6] доказано: Если $[O, z]$ — структура Стоуна, то для каждого $y \in [O, z]$, также $[O, y]$ —

([9]) Другое доказательство этого утверждения находится в [6, теорема 4].

([10]) В противном случае, из леммы 5 вытекает, что $(x]^* \subset P$ для всех минимальных простых идеалов P структуры L. Очевидно, $x^+ \subset (x]^*$. Из леммы 2 следует, что пересечение всех простых идеалов структуры L будет $(O]$. Из последнего и леммы 4 получим, что также пересечение всех минимальных простых идеалов структуры L равно $(O]$. Поэтому $(x]^* = (O]$ и $x^+ = O$. Но это противоречит нашему предположению.

структура Стоуна. На основе этого факта нам достаточно доказать наше утверждение для подструктуры $[O, z]$, где $z \geqslant z'$ $(z \in L)$. Так как P_1, P_2 — различные минимальные простые идеалы структуры L, то $P_2 - P_1 \neq \emptyset$. Пусть $t \in P_2 - P_1$. На основании леммы 10 существует такой $y \in (x]^*$, что $y \equiv t$ $(\Theta\,[P_1 \cap P_2])$. Из (*) (смотри доказательство леммы 9) следует, что $y \in P_2 - P_1$. Пусть $z = x \cup y \cup z'$. В самом деле, пусть x^+ и x^{++} — псевдодополнения соответственно x и x^+ в $[O, z]$. Из леммы 5 следует, что $x^+ \in (x]^* \subset P_2$ и $y \leqslant x^+ \in P_2 - P_1$. Идеалы P_1, P_2 были выбраны так, чтобы $x \in P_1 - P_2$. Из леммы 11 вытекает $x^+ \cup x^{++} \equiv z$ $(\Theta\,[P_1 \cap P_2])$. Из леммы 8 следует, что существует такое $v \in P_1 \cap P_2$, для которого $(x^+ \cup x^{++}) \cup v = z$. Допустим, что $x^+ \cup x^{++} < z$. Пусть $E = \{w \in L;\ (x^+ \cup x^{++}) \cup w \geqslant z\}$. Тогда E — дуальный идеал структуры L и $O \notin E$. Покажем, что для $w \in E$ будет $x \cap w > O$. Если $x \cap w = O$, то $x \cap (w \cap z) = O$, откуда $w \cap z \leqslant x^+$. Так как $z \cap w \in E$, то $x^+ \cup x^{++} = (x^+ \cup x^{++}) \cup (w \cap z) = z$, но это противоречие. Пусть $D = [x) \cup E$ (11) — наименьший дуальный идеал структуры L, содержащий дуальные идеалы $[x)$ и E. Очевидно, что $O \notin D$, $x \in D$ и $E \subset D$. Из лемм 2 и 4 следует, что существует минимальный простой идеал Q структуры L и $Q \cap D = \emptyset$. Так как $x \notin Q$, то $P_1 \neq Q$, $x \in P_1 - Q$ и $x^+ \in Q$ (смотри лемму 5). Тогда $x^+ \in Q - P_1$, потому что $x^+ \notin P_1$. Из леммы 11 следует, что $x^+ \cup x^{++} \equiv z$ $(\Theta\,[P_1 \cap Q])$. Существует такое $v \in P_1 \cap Q$ (лемма 8), что $(x^+ \cup x^{++}) \cup v = z$. Тогда $v \in E \subset D$. Таким образом, $Q \cap D \neq \emptyset$, а это противоречит утверждению $Q \cap D = \emptyset$. Итак, $x^+ \cup x^{++} = z$ и L — обобщенная структура Стоуна.

Структура Стоуна является обобщенной структурой Стоуна (смотри [6, лемма 6]), а также всякая обобщенная структура Стоуна с наибольшим элементом является структурой Стоуна. Таким образом, из предшествующей теоремы следует

Следствие (Гретцер — Шмидт [2]). *Пусть L — дистрибутивная структура с псевдодополнениями. L — структура Стоуна тогда и только тогда, когда L удовлетворяет условию* (ГШ).

§ 2. Структуры Стоуна конгруэнтностей

Если L — структура, то $\Theta(L)$ будет обозначать множество всех конгруэнтностей на L. Известно, что $\Theta(L)$ — полная структура, если $\Theta \leqslant \Phi$ $(\Theta, \Phi \in \Theta(L))$ тогда и только тогда, когда $x \equiv y$ (Θ) влечет за собой $x \equiv y$ (Φ). O будет обозначать наименьший и I наибольший элемент

(11) Легко можно показать что $D = \{y \in L;$ существует $w \in E$, для которого $y \geqslant x \cap w\}$.

структуры $\Theta(L)$. Если $\{\Theta_\alpha;\ \alpha \in J\}$ — множество конгруэнтностей на L, то

(1) $x \equiv y\ (\bigvee(\Theta_\alpha;\ \alpha \in J))$ тогда и только тогда, когда существует такая конечная последовательность $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$ ([12]), что для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $z_{i-1} \equiv z_i\ (\Theta_{\alpha_i})$ для некоторого $\alpha_i \in J$.

(2) $x \equiv y\ (\bigwedge(\Theta_\alpha;\ \alpha \in J))$ тогда и только тогда, когда $x \equiv y\ (\Theta_\alpha)$ для всех $\alpha \in J$.

Также известно, что для $\Theta \in \Theta(L)$

(3) $\Theta \cap (\bigvee(\Theta_\alpha;\ \alpha \in J)) = \bigvee(\Theta \cap \Theta_\alpha;\ \alpha \in J)$.

Из (3) и [1, IX, теорема 15] следует, что $\Theta(L)$ — дистрибутивная структура с псевдодополнениями. Пусть S — подмножество структуры L. Тогда $\Theta[S]$ обозначает наименьшую конруэнтность на L, для которой имеет место: $x, y \in S$ влечет за собой $x \equiv y\ (\Theta[S])$. Если $S = \{a, b\}$, то $\Theta[S]$ будем обозначать через $\Theta_{a,b}$.

Определение 4 ([4, стр. 151]). *Пусть L — структура и $a, b, c, d \in L$. Тогда пара элементов a, b будет слабо проективной с парой элементов c, d, если существует конечное множество элементов $x_1, \ldots, x_n \in L$, удовлетворяющих равенствам*

$$(4)\qquad [\ldots(\{[(a \cup b) \cup x_1] \cap x_2\} \cup x_3) \cap \ldots] \cup x_n = c \cup d,$$

$$(5)\qquad [\ldots(\{[(a \cap b) \cup x_1] \cap x_2\} \cup x_3) \cap \ldots] \cup x_n = c \cap d.$$

$a, b \to \overline{c, d}$ будет обозначать, что a, b слабо проективно с c, d.

Примечание. Известно, что в структуре L $x \equiv y\ (\Theta)$ тогда и только тогда, если $x \cup y \equiv x \cap y\ (\Theta)$ $(x, y \in L,\ \Theta \in \Theta(L))$. Из последнего вытекает, что $\Theta_{x,y} = \Theta_{x \cup y, x \cap y}$. Из (4) и (5) следует, что $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ тогда и только тогда, когда $\overline{a \cup b, a \cap b} \to \overline{c, d}$.

Лемма 12. *В структуре L $c \equiv d\ (\Theta_{a,b})$ тогда и только тогда, когда существует конечная цепь*

$$(6)\qquad c \cup d = y_0 \geqslant y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_k = c \cap d$$

и $a, b \to \overline{y_{i-1}, y_i}$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Доказательство находится в [4, лемма 6].

Определение 5 ([4, стр. 159]). *Пусть Θ — конгруэнтность на структуре L. Θ будем называть сепарабельной конгруэнтностью, если для всякого $a < b$ $(a, b \in L)$ существует такая конечная цепь $a = z_0 \leqslant \ldots \leqslant$*

([12]) В [4, лемма 5] для $x \leqslant y$ доказано, что эту последовательность можно выбрать следующим образом: $x = z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_n = y$.

$\leqslant z_n = b$, *что для всякого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *или* $z_{i-1} \equiv z_i$ (Θ), *или* $x, y \in [z_{i-1}, z_i]$ и $x \equiv y$ (Θ) *влечет за собой* $x = y$.

Определение 6 ([4, стр. 162]). *Структура* L *будет слабо модулярной, если* $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ $(a < b,\ c \neq d,\ a, b, c, d \in L)$ *влечет за собой* $\overline{c, d} \to \overline{a_1, b_1}$ *для некоторых элементов* $a_1, b_1 \in L$, *удовлетворяющих* $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b$.

В [4], как и в других работах, решена проблема Биркгофа, номер 72 касающаяся характеризации тех структур L, для которых Θ (L) — булева алгебра. Гретцер и Шмидт в [4, теорема 11] доказали: *Структура конгруэнтностей* Θ (L) *некоторой структуры* L *будет булевой алгеброй тогда и только тогда, когда*

(СМ) L — *слабо модулярна и*

(С) *всякая конгруэнтность на* L *сепарабельна.*

Теперь будем характеризовать класс тех структур L, для которых Θ (L) — структура Стоуна [13]. Так как Θ (L) — дистрибутивная структура с псевдодополнениями, то достаточно отыскать условие, при котором $\Theta^* \cup \Theta^{**} = I$ для всех $\Theta \in \Theta$ (L), где Θ^* обозначает псевдодополнение конгруэнтности Θ в Θ (L). Без трудностей можно доказать следующую лемму:

Лемма 13. *Пусть* L — *структура и* Φ — *конгруэнтность на* L. *Тогда* $\Phi = \bigvee (\Theta_{u,v};\ u \geqslant v,\ u \equiv v\ (\Phi))$.

Лемма 14. *Пусть* Θ — *конгруэнтность на структуре* L. *Тогда* $\Theta^* = \bigvee (\Theta_{u,v};\ u \geqslant v,\ (u, v) \in E)$ — *псевдодополнение* Θ *в* Θ (L) *и* E — *множество всех таких пар элементов* (u, v) $(u, v \in L)$, *что для всех* $z, t \in L$, $\overline{u, v} \to \overline{z, t}$ *и* $z \equiv t$ (Θ) *влечет за собой* $z = t$.

Доказательство. Пусть $(u, v) \in E$, $u \geqslant v$. Если $x \leqslant y$, $x \equiv y$ $(\Theta \cap \Theta_{u,v})$, то $x \equiv y(\Theta)$ и тогда существует цепь $x = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n = y$, где $\overline{u, v} \to \overline{t_{i-1}, t_i}$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ (лемма 12). Так как $(u, v) \in E$, то $t_{i-1} \equiv t_i$ (Θ), откуда $t_{i-1} = t_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом, $x = y$. Итак, $\Theta \cap \Theta_{u,v} = O$. Из (3) следует, что

$\Theta \cap (\bigvee (\Theta_{u,v};\ u \leqslant v\ (u, v) \in E)) = \bigvee (\Theta \cap \Theta_{u,v};\ u \leqslant v,\ (u, v) \in E)) = 0$. Тогда $\bigvee (\Theta_{u,v};\ u \geqslant v,\ (u, v) \in E) \leqslant \Theta^*$. Из леммы 13 следует, что $\Theta^* = \bigvee (\Theta_{u,v};\ u \geqslant v,\ u \equiv v(\Theta^*))$. Пусть $u \geqslant v$, $u \equiv v(\Theta^*)$. Если $\overline{u, v} \to \overline{z, t}$, то $z \equiv t(\Theta^*)$. Если одновременно $z \equiv t(\Theta)$, то $z = t$. Таким образом, $(u, v) \in E$, откуда $\Theta^* \leqslant \bigvee (\Theta_{u,v};\ u \geqslant v,\ (u, v) \in E)$. Из последнего следует, что $\Theta^* = \bigvee (\Theta_{u,v};\ u \geqslant v,\ (u, v) \in E)$.

Определение 7. *Конгруэнтность* Θ *на структуре* L *будем называть слабо сепарабельной, если для всякой пары элементов* $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$ *существует такая конечная цепь* $a = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$, *что для всех*

---

[13] Без трудностей можно показать, что булева алгебра является структурой Стоуна.

$i \in \{1, \ldots, n\}$ или $\overline{t_{i-1}, t_i} \to \overline{u, v}$ $(u, v \in L)$ и $u \equiv v(\Theta)$ влечет за собой $u = v$, или для каждого $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$ и $r < s$ существуют такие $u \neq v$ $(u, v \in L)$, что $\overline{r, s} \to \overline{u, v}$ и $u \equiv v(\Theta)$.

Определение 8. *Структуру L будем называть почти слабо модулярной, если $\overline{a, b} \to \overline{u, v}$, $\overline{c, d} \to \overline{u, v}$ $(a < b,\ c < d,\ u \neq v,\ a, b, c, d, u, v \in L)$ влечет за собой существование таких элементов c_1, d_1 $(c \leqslant c_1 < d_1 \leqslant d)$, что для всякого $\overline{c_1, d_1} \to \overline{r, s}$ $(r \neq s,\ r, s \in L)$ существуют элементы $z \neq t$ $(z, t \in L)$ со следующим свойством: $\overline{a, b} \to \overline{z, t}$, $\overline{r, s} \to \overline{z, t}$.*

Примечание. Покажем, что слабо модулярная структура является почти слабо модулярной. Если $\overline{a, b} \to \overline{u, v}$, $\overline{c, d} \to \overline{u, v}$ $(a < b,\ c < d,\ u \neq v)$, то на основании определения 6 существуют такие элементы c_1, d_1 $(c \leqslant c_1 < d_1 \leqslant d)$, что $\overline{u, v} \to \overline{c_1, d_1}$. Так как отношение $\to$ транзитивно, то $\overline{a, b} \to \overline{c_1, d_1}$. Когда $\overline{c_1, d_1} \to \overline{r, s}$ $(r \neq s)$, то положим $r = z$, $s = t$ и получим: $\overline{a, b} \to \overline{z, t}$, $\overline{c_1, d_1} \to \overline{z, t}$.

Теорема 4. *Пусть $\Theta\,(L)$ — структура конгруэнтностей на структуре L. $\Theta\,(L)$ — структура Стоуна тогда и только тогда, когда*

(ПСМ) *L — почти слабо модулярная структура и*

(СС) *всякая конгруэнтность на L слабо сепарабельна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Theta\,(L)$ — структура Стоуна, $\Theta \in \Theta\,(L)$. Тогда $\Theta^* \cup \Theta^{**} = I$, $\Theta^* \cap \Theta^{**} = O$. Пусть $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$. Тогда $a \equiv b(\Theta^* \cup \Theta^{**})$ и на основании (1) (смотри тоже ([12])) существует конечная цепь $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$, где для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ или $t_{i-1} \equiv t_i$ (Θ^*), или $t_{i-1} \equiv t_i$ (Θ^{**}). Если $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^*)$, то $\overline{t_{i-1}, t_i} \to \overline{u, v}$, $u \quad v(\Theta)$ влечет за собой $u = v$. Если $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^{**})$, то для всякого $r < s$, $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$ будет $r \equiv s(\Theta^{**})$. Допустим, что для всех пар элементов $u \neq v$ $(u, v \in L)$, удовлетворяющих отношению $\overline{r, s} \to \overline{u, v}$, будет $u \not\equiv v(\Theta)$. Пусть E везде имеет то же значение, что и в лемме 14. Тогда $(r, s) \in E$ и из леммы 14 следует $\Theta_{r,s} \leqslant \Theta^*$. Из последнего вытекает, что $r \equiv s(\Theta^*)$. Но, это противоречие, потому что $r < s$, $r \equiv s(\Theta^{**})$ и $\Theta^* \cap \cap\, \Theta^{**} = O$. Таким образом, существуют такие $u \neq v$, что $\overline{r, s} \to \overline{u, v}$ и $u \quad v(\Theta)$. Итак, мы доказали, что всякая конгруэнтность $\Theta \in \Theta\,(L)$ является слабо сепарабельной. Теперь докажем, что L — почти слабо модулярная структура. Пусть $a < b$, $c < d$, $u \neq v$, $a, b, c, d, u, v \in L$, $\overline{a, b} \to \overline{u, v}$, $\overline{c, d} \to \overline{u, v}$. Обозначим $\Theta = \Theta_{u,v}$. Так как $\Theta(L)$ — структура Стоуна, то $c \equiv d(\Theta^* \cup \Theta^{**})$. Если $c \equiv d(\Theta^*)$, то $u \equiv v(\Theta^*)$. Одновременно $u \quad v(\Theta)$. Так как $\Theta \cap \Theta^* = O$, то $u = v$ и получим противоречие, потому что $u \neq v$. Таким образом, $c \not\equiv d(\Theta^*)$. На основании (1) существуют такие элементы $c_1, d_1 \in [c, d]$, $c_1 < d_1$, что $c_1 \equiv d_1(\Theta^{**})$. Пусть $r, s \in L$, $r \neq s$ и $\overline{c_1, d_1} \to \overline{r, s}$. Очевидно, $r \equiv s(\Theta^{**})$. Если для всех $z \neq t$ $(z, t \in L)$, удовлетворящих отношению $\overline{r, s} \to \overline{z, t}$, будет $z \not\equiv t(\Theta)$, то на основании примечания после определения 4 $(r \cup s,\ r \cap s) \in E$. Из леммы 14 следует, что $\Theta_{r,s} = \Theta_{r \cup s,\, r \cap s} \leqslant \Theta^*$. Тогда $r \equiv s(\Theta^*)$ и одновременно $r \equiv s(\Theta^{**})$. Но это противоречие, потому что $\Theta^* \cap \Theta^{**} = O$ и $r \neq s$. Таким образом, существуют элементы $z',\ t' \in L$ $(z' \neq t')$ со свойством: $\overline{r,\ s} \to \overline{z',\ t'}$ и $z' \equiv t'(\Theta)$. Очевидно, $z' \cup t' \neq z' \cap t'$. Из (4) и (5) вытекает, что $\overline{r,\ s} \to \overline{z' \cap t',\ z' \cup t'}$ и $z' \cap t' \equiv z' \cup t'(\Theta)$. Тогда существуют (лемма 12) такие $z,\ t \in [z' \cap t',\ z' \cup t']$ $(z < t)$, что $\overline{u,\ v} \to \overline{z,\ t}$. Из транзитивности отношения $\to$ получим $\overline{a,\ b} \to \overline{z,\ t}$. Также $\overline{z' \cap t',\ z' \cup t'} \to \overline{z,\ t}$. Из последнего видим, что $\overline{r,\ s} \to \overline{z,\ t}$. Итак L — почти слабо модулярная структура.

Достаточность. Пусть $\Theta \in \Theta(L)$. Пусть $a \leqslant b$ $(a,\ b \in L)$. Тогда на основании (СС) существует цепь $a = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$, $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, удовлетворящая условиям определения 7. Если $\overline{t_{i-1},\ t_i} \to \overline{u,\ v}$ $(u,\ v \in L)$ и $u \equiv v(\Theta)$ влечет за собой $u = v$, то $(t_{i-1},\ t_i) \in E$, откуда (лемма 14) $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^*)$. Пусть теперь для всяких $r,\ s \in [t_{i-1},\ t_i]$ $(r < s)$ существуют такие элементы $u \neq v$ $(u,\ v \in L)$, что $\overline{r,\ s} \to \overline{u,\ v}$ и $u \equiv v(\Theta)$. Если $r \equiv s(\Theta^*)$, то $u \equiv v(\Theta^*)$. Но это противоречие, потому что $\Theta \cap \Theta^* = O$ и $u \neq v$. Таким образом, $r \not\equiv s(\Theta^*)$. Теперь покажем, что $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^{**})$. Будем рассматривать два случая:

1) Существуют такие элементы $r' \neq s'$ $(r',\ s' \in L)$ что $\overline{t_{i-1},\ t_i} \to \overline{r',\ s'}$ и $r' \equiv s'(\Theta^*)$. На основании (4) и (5) мы можем сверх того предполагать еще $r' < s'$. Из леммы 14 получим $\Theta^* = \bigvee (\Theta_{p,q};\ p \leqslant q,\ (p,\ q) \in E)$. На основании (1) и леммы 12 существуют такие $p \leqslant q$, $(p,\ q) \in E$ и $r,\ s \in L$ $(r' \leqslant r < s \leqslant s')$, что $p \equiv q(\Theta^*)$ и $\overline{p,\ q} \to \overline{r,\ s}$. Так как $\overline{r',\ s'} \to \overline{r,\ s}$, то $\overline{t_{i-1},\ t_i} \to \overline{r,\ s}$. На основании (ПСМ) существуют такие элементы $t',\ t'' \in [t_{i-1},\ t_i]$ $(t' < t'')$, что для всяких $u,\ v \in L$ $(u \neq v)$ и $\overline{t',\ t''} \to \overline{u,\ v}$ существуют $z \neq t$ такие, что $\overline{u,\ v} \to \overline{z,\ t}$ и одновременно $\overline{p,\ q} \to \overline{z,\ t}$. Так как $t' < t''$ и $t',\ t'' \in [t_{i-1},\ t_i]$, то существуют такие $u_0 \neq v_0$, что $\overline{t',\ t''} \to \overline{u_0,\ v_0}$ и $u_0 \equiv v_0(\Theta)$. Снова из (ПСМ) видим, что существуют $z_0 \neq t_0$ такие, что $\overline{u_0,\ v_0} \to \overline{z_0,\ t_0}$ и $\overline{p,\ q} \to \overline{z_0,\ t_0}$. Из последнего следует, что $z_0 \equiv t_0(\Theta^*)$. Одновременно $z_0 \equiv t_0(\Theta)$, потому что $u_0 \equiv v_0(\Theta)$. Так как $\Theta \cap \Theta^* = O$, то $z_0 = t_0$. Но это противоречие, потому что $z_0 \neq t_0$. Таким же образом надо рассматреть следующую возможность.

2) Для всех $r,\ s \in L$, $\overline{t_{i-1},\ t_i} \to \overline{r,\ s}$ и $r \equiv s(\Theta^*)$ влечет $r = s$. Это означает, что $(t_{i-1},\ t_i) \in E$ относительно конгруэнтности Θ^*. Тогда из леммы 14 вытекает, что $\Theta_{t_{i-1},\, t_i} \leqslant \Theta^{**}$. Таким образом, $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^{**})$. На основании (1) будет $a \equiv b(\Theta^* \cup \Theta^{**})$. Так как элементы $a,\ b \in L$ были произвольно выбраны, то $\Theta^* \cup \Theta^{**} = I$ для всех $\Theta \in \Theta(L)$ и $\Theta(L)$ — структура Стоуна.

Определение 9. *Структуру L будем называть полудискретной, если для всех $x,\ y \in L$ и $x \leqslant y$ существует конечная максимальная цепь $x =$*

$- t_0 < \ldots < t_n = y$. *Если всякая конечная максимальная цепь, соединяющая произвольные элементы $x \leqslant y$, будет конечной, то L будем называть дискретной структурой.*

Для $x, y \in L$, $x \leqslant y$ интервал $[x, y]$ будем называть простым, если $x -\!\!< y$ (14). *Если $p = [x, y]$, $q = [z, t]$ — простые интервалы, то $p \to q$ будет обозначать, что $\overline{x, y} \to \overline{z, t}$.*

Следствие. *Пусть L — полудискретная структура. $\Theta(L)$ — структура Стоуна тогда и только тогда, когда для всяких простых интервалов p, q, r, для которых $p \to q$, $r \to q$ и для каждого простого интервала s, для которых $r \to s$, существует такой простой интервал t, что $p \to t$ и $s \to t$.*

Доказательство. Необходимость. Следует из теоремы 4.

Достаточность. Всякая конгруэнтность на L будет слабо сепарабельной (15). Только условие (ПСМ) требует доказательства. Пусть $\overline{a, b} \to \overline{u, v}$, $c, d \to \overline{u, v}$ ($a < b$, $c < d$, $u \neq v$, $a, b, c, d, u, v \in L$). Из (4) и (5) получим: $a, b \to \overline{u \cap v, u \cup v}$, $\overline{c, d} \to \overline{u \cap v, u \cup v}$ и $u \cap v < u \cup v$. Пусть $u \cap v < u_1 -\!\!< v_1 \leqslant u \cup v$. Тогда $\overline{a, b} \to \overline{u_1, v_1}$, $\overline{c, d} \to \overline{u_1, v_1}$. В самом деле, пусть $a = t_0 -\!\!< \ldots -\!\!< t_n = b$, $c = z_0 -\!\!< \ldots -\!\!< z_m = d$. Тогда $u_1 \equiv v_1(\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d})$. Очевидно, $\Theta_{a,b} = \bigvee (\Theta_{t_{i-1}, t_i}, \; i \in \{1, \ldots, n\})$ $\Theta_{c,d} = \bigvee (\Theta_{z_{j-1}, z_j};\; i \in \{1, \ldots, m\})$. Из (1), (2) и леммы 12 следует, что существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $t_{i-1}, t_i \to \overline{u_1, v_1}$. Аналогично, существует такое $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $z_{j-1}, z_j \to \overline{u_1, v_1}$. $[t_{i-1}, t_i]$, $[z_{j-1}, z_j]$, $[u_1, v_1]$ — простые интервалы структуры L. Пусть в соответствии с определением 8 $c_1 = z_{j-1}$ и $d_1 = z_j$. Пусть $\overline{c_1, d_1} \to \overline{r, s}$ ($r \neq s$), Очевидно, $r \cap s < r \cup s$ и из (4) и (5) следует $\overline{c_1, d_1} \to \overline{r \cap s, r \cup s}$. Пусть $r \cap s \leqslant r_1 -\!\!< s_1 \leqslant r \cup s$. Тогда $\overline{c_1, d_1} \to \overline{r_1, s_1}$. Из предположения следует, что существуют такие $z -\!\!< t$, что $\overline{r_1, s_1} \to \overline{z, t}$ и $\overline{t_{i-1}, t_i} \to \overline{z, t}$. Из (4) и (5) получим, что $\overline{r, s} \to \overline{z, t}$ и одновременно $\overline{a, b} \to \overline{z, t}$. Итак, L удовлетворяет условию (ПСМ) и из теоремы 4 следует, что $\Theta(L)$ — структура Стоуна.

Лемма 15 (Гретцер — Шмидт [4, лемма 17]). *Если L — слабо модулярная структура и Θ — конгруэнтность на L, то $x \equiv y(\Theta^*)$ $(x, y \in L)$ тогда и только тогда, когда для всех $u, v \in [x \cap y, x \cup y]$, $u \equiv v(\Theta)$* влечет за собой $u = v$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u, v \in [x \cap y, x \cup y]$ и $x \equiv y(\Theta^*)$. Из (4) и (5) видим, что $\overline{x, y} \to \overline{u, v}$. Из последнего получим, что $u \equiv v(\Theta^*)$. Если одновременно и $u \equiv v(\Theta)$, то $u = v$, потому что $\Theta \cap \Theta^* = O$.

Достаточность. Из леммы 14 $\Theta^* = \bigvee (\Theta_{u,v};\, u \leqslant v, (u, v) \in E)$, где $(u, v) \in$

(14) $x -\!\!< y$ обозначает, что y покрывает x.

(15) Для всякого $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$ достаточно взять конечную максимальную цепь, соединяющую элементы a, b.

$\in E$ тогда и только тогда, когда для всех $z, t \in L$, для которых $\overline{u, v} \to \overline{z, t}$ и $z \equiv t(\Theta)$, будет $z = t$. Покажем, что $(x \cap y, x \cup y) \in E$, откуда на основании леммы 14 будет $\Theta_{x \cap y, x \cup y} \leqslant \Theta^*$. Пусть $\overline{x \cap y, x \cup y} \to \overline{z, t}$ и $z = t(\Theta)$. Если $z \neq t$, то из слабой модулярности структуры L следует $\overline{z, t} \to \overline{u, v}$ для некоторых $u, v \in [x \cap y, x \cup y]$, $u < v$. Очевидно, $u \equiv v(\Theta)$. Но из предположения следует $u = v$ и мы получили противоречие. Таким образом, $z = t$, $(x \cap y, x \cup y) \in E$ и $\Theta_{x,y} = \Theta_{x \cap y, x \cup y} \leqslant \Theta^*$.

Лемма 16. *Если L — слабо модулярная структура, то конгруэнтность Θ на L слабо сепарабельна тогда и только тогда, когда для всех $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$ существует такая конечная цепь $a = t_0 \leqslant t_1 < \ldots \leqslant t_n = b$, что для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ или $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$ и $r \equiv s(\Theta)$ влечет за собой $r = s$ или для каждого $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$, $r < s$ существует r_1, s_1 $(r \leqslant r_1 < s_1 \leqslant s)$ и $r_1 \equiv s_1(\Theta)$.*

Доказательство. Достаточное условие очевидно.

Необходимость. Пусть Θ — слабо сепарабельная конгруэнтность. Тогда для всех $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$ существует конечная цепь $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$, удовлетворяющая условиям определения 7. Пусть $\overline{t_{i-1}, t_i} \to \overline{u, v}$, $u \equiv v(\Theta)$ влечет за собой $u = v$. Тогда из $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$ и $r \equiv s(\Theta)$ следует $r \cap s \equiv r \cup s(\Theta)$. Очевидно, $\overline{t_{i-1}, t_i} \to \overline{r \cap s, r \cup s}$. Таким образом, $r \cap s = r \cup s$, откуда $r = s$. Пусть для всех $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$ и $r < s$ существуют такие $u \neq v$, что $\overline{r, s} \to \overline{u, v}$ и $u \equiv v(\Theta)$. Слабая модулярность влечет за собой существование таких элементов $r_1 < s_1$ $(r \leqslant r_1 < s_1 \leqslant s)$, что $\overline{u, v} \to \overline{r_1, s_1}$, откуда $r_1 \equiv s_1(\Theta)$.

Без трудностей можно доказать

Следствие. *Всякая сепарабельная конгруэнтность на слабо модулярной структуре является слабо сепарабельной.*

Теперь покажем, что [4, теорема 11] следует из теоремы 4. Очевидна следующая

Лемма 17. *L — булева алгебра тогда и только тогда, когда L — структура Стоуна и $x = x^{**}$ тождественным образом.*

Теорема 5 (Гретцер — Шмидт [4]). *Структура $\Theta(L)$ некоторой структуры L является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда*

(СМ) *L — слабо модулярная и*

(С) *всякая конгруэнтность на L сепарабельна.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\Theta(L)$ — булева алгебра. Тогда для всех $\Theta \in \Theta(L)$ будет $\Theta \cup \Theta^* = I$. Пусть $a < b$, $u \neq v$ $(a, b, u, v \in L)$, $\overline{a, b} \to \overline{u, v}$. Положим $\Theta = \Theta_{u,v}$. Тогда $a \equiv b(\Theta \cup \Theta^*)$. Из последнего и (1) вытекает, что существует цепь $a = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$, где для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ или $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta)$ или $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^*)$. Если a —

$= b(\Theta^*)$, то очевидно $u = v(\Theta^*)$. Мы получили противоречие, потому что $u = v(\Theta)$, $\Theta \cap \Theta^* = O$ и $u \neq v$. Таким образом $a \not\equiv b(\Theta^*)$. Тогда существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $t_{j-1} \equiv t_j(\Theta)$ и $t_{j-1} < t_j$. На основании леммы 12 существуют такие $a_1, b_1 \in [t_{j-1}, t_j]$, где $a_1 < b_1$ и $\overline{u, v} \to \overline{a_1, b_1}$. Тем самым доказано условие (СМ). Так как $\Theta \cup \Theta^* = I$ для всех $\Theta \in \Theta(L)$, то из (1) и леммы 15 следует условие (С).

Достаточность. Пусть L удовлетворяет условиям (СМ) и (С). Из примечания после определения 8 и следствия после леммы 16 следует выполняемость всех условий теоремы 4. Итак $\Theta(L)$ — структура Стоуна. Покажем еще, что $\Theta = \Theta^{**}$ тождественным образом в $\Theta(L)$. Пусть $a < b$ $(a, b \in L)$ и $a \equiv b(\Theta^{**})$. На основании (С) существует цепь $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, где для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ или $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta)$ или $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$ и $r \equiv s(\Theta)$ влечет за собой $r = s$, откуда, в последнем случае, $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^*)$ (лемма 15). Так как $a \equiv b(\Theta^{**})$, то и $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^{**})$, откуда $t_{i-1} = t_i$. Таким образом, $a \equiv b(\Theta)$ и $\Theta = \Theta^{**}$. Итак, из леммы 17 вытекает, что $\Theta(L)$ — булева алгебра.

Лемма 18. *Пусть S — выпуклая подструктура дистрибутивной структуры L* (16). *Пусть Θ — конгруэнтность на L. Пусть для $x, y \in S$ $x \equiv y(\overline{\Theta})$ тогда и только тогда, когда $x \equiv y(\Theta)$. Тогда $\overline{\Theta}$ — конгруэнтность на S и отображение $\Theta \to \overline{\Theta}$ — гомоморфизм $\Theta(L)$ на $\Theta(S)$, сохраняющий псевдодополнения.*

Доказательство. Пусть $\Theta \in \Theta(L)$. Без трудностей можно доказать, что $\overline{\Theta}$ — конгруэнтность на S. Пусть $\Theta, \Phi \in \Theta(L)$. Очевидно, $\overline{\Theta \cap \Phi} = \overline{\Theta} \cap \overline{\Phi}$. Аналогично при помощи [4, лемма 5] (смотри (12)) мы можем ограничиться случаем $x \leqslant y$ $(x, y \in S)$ и доказать равенство $\overline{\Theta \cup \Phi} = \overline{\Theta} \cup \overline{\Phi}$. Пусть Θ^* — псевдодополнение Θ в $\Theta(L)$. Пусть для $x, y \in S$ $x \equiv y(\overline{\Theta^*})$. Очевидно, $x \equiv y(\Theta^*)$ и $r, s \in [x \cap y, x \cup y] \subset S$, $r \equiv s(\Theta)$ влечет за собой $r = s$. Из леммы 15 получим $x \equiv y(\overline{\Theta}^*)$. Пусть $x \equiv y(\Theta^*)$ $(x, y \in S)$. На основании леммы 15 $u, v \in [x \cap y, x \cup y]$ и $u \equiv v(\overline{\Theta})$ влечет за собой $u = v$. Но из $u \equiv v(\overline{\Theta})$ следует $u \equiv v(\Theta)$, откуда $x \equiv y(\overline{\Theta^*})$ (лемма 15). Таким образом, $\overline{\Theta^*} = \overline{\Theta}^*$. До сих пор мы доказали, что отображение $\Theta \to \overline{\Theta}$ — гомоморфизм $\Theta(L)$ в $\Theta(S)$, сохраняющий псевдодополнения. Пусть $\Psi \in \Theta(S)$. Положим $\Theta = \bigvee (\Theta_{x,y};\, x \equiv y(\Psi))$ на структуре L. Покажем, что $\overline{\Theta} = \Psi$. Очевидно, $\overline{\Theta} \geqslant \Psi$. Пусть $u, v \in S$, $u \equiv v(\Theta)$. На основании примечания после определения 4 мы можем предполагать $u \leqslant v$. Тогда существует (смотри (1) и (17)) такая конечная цепь $u = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = v$, что $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta_{x_i, y_i})$ и $x_i \equiv y_i(\Psi)$ $(x_i, y_i \in S$

(16) В [4, лемма 16] доказано, что модулярная структура является слабо модулярной.

(17) Если L — дистрибутивная структура, $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ $(a, b, c, d \in L)$, то $c \equiv d(\Theta_{a,b})$ тогда и только тогда, когда $(a \cup d) \cap c = c$, $(b \cup d) \cap c = d$.

для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$). На основании [4, теорема 1] ([17]) получим, что $t_{i-1} \equiv t_i(\overline{\Theta_{x_i, y_i}})$ и $\overline{\Theta_{x_i, y_i}} \leqslant \Psi$ на S. Так как $u \equiv v(\bigvee(\overline{\Theta_{x_i, y_i}};\ i \in \{1, \ldots, n\}))$ и $\bigvee(\overline{\Theta_{x_i, y_i}};\ i \in \{1, \ldots, n\}) \leqslant \Psi$, то $u \equiv v(\Psi)$. Таким образом, $\Theta \leqslant \Psi$, откуда $\overline{\Theta} = \Psi$.

Теорема 6. *Если L — цепь, то $\Theta(L)$ — структура Стоуна тогда и только тогда, когда L — дискретная структура, т. е. $\Theta(L)$ — булева алгебра. Если L — дистрибутивная структура с относительными дополнениями, то $\Theta(L)$ — структура Стоуна тогда и только тогда, когда для всякого $a, b \in L$ $(a \leqslant b)$ подструктура $[a, b]$ полна.*

Доказательство. Пусть L — цепь и $\Theta(L)$ — структура Стоуна. Пусть $a < b$ $(a, b \in L)$. Пусть $[a, b]$ содержит бесконечное множество элементов. Тогда из $[a, b]$ выберем цепь $a_1 < b_1 < c_1 < a_2 < b_2 < c_2 < \ldots < a_n < b_n < c_n < \ldots$ или цепь к ней дуальную. Пусть $\Theta = \bigvee(\Theta_{a_i, b_i};\ i \in \{1, \ldots, n\})$. L — дистрибутивная структура и из [4, лемма 16] следует, что L — слабо модулярная структура. Тогда из леммы 15 вытекает, что $b_i \equiv a_{i+1}(\Theta^*)$ (смотри тоже ([17]), или [4, теорема 2]). Из последнего вытекает, что в $[a, b]$ существует бесконечное множество классов разбиения, определенных конгруэнтностью Θ^* и содержащих более чем один элемент. Θ — слабо сепарабельная конгруэнтность (теорема 4). На основании определения 7, лемм 15 и 16 существует конечная цепь $a = t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b$, что для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ или $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^{**})$ или $t_{i-1} \equiv t_i(\Theta^*)$. Так как L — цепь, то $[a, b]$ содержит только конечное множество классов разбиения, определенных конгруэнтностью Θ^* и имеющих больше одного элемента. Но это противоречие. Обратно, если L — дискретная структура, то из [4, теорема 11, следствие 2] следует, что $\Theta(L)$ — булева алгебра и тем более — структура Стоуна.

Пусть теперь L — дистрибутивная структура с относительными дополнениями. Пусть $\Theta(L)$ — структура Стоуна. Пусть $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$. Будем рассматривать подструктуру $S = [a, b]$. Из леммы 18 следует, что $\Theta(S)$ — тоже структура Стоуна. Но S — булева алгебра. Известно, что структура конгруэнтностей булевой алгебры изоморфна со структурой всех идеалов той же булевой алгебры (смотри [4, лемма 8]). Тогда структура всех идеалов булевой алгебры S является структурой Стоуна. Из [6, теорема 6, следствие 1] ([18]) следует, что S — полная булева алгебра. Обратно, пусть для всяких $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$ подструктура $[a, b]$ полна. Покажем, что $\Theta(L)$ — структура Стоуна. Достаточно для этого доказать, что для всех $\Theta \in \Theta(L)$ и для всяких $a \leqslant b$ будет $a \equiv b(\Theta^* \cup \Theta^{**})$. Пусть $S = [a, b]$. Из ([18]) следует, что $\Theta(S)$ — структура Стоуна. Если использовать обозна-

([18]) Структура всех идеалов булевой алгебры L является структурой Стоуна тогда и только тогда, когда L — полная структура.

чение из леммы 18, то $a \equiv b(\bar{\Theta}^* \cup \bar{\Theta}^{**})$ для всех $\Theta \in \Theta(L)$. На основании леммы 18 $\bar{\Theta}^* \cup \bar{\Theta}^{**} = \overline{\Theta^* \cup \Theta^{**}}$ и из определения конгруэнтности $\bar{\Theta}$ следует, что $a = b(\Theta^* \cup \Theta^{**})$.

Гретцер и Шмидт в [5] доказали следующую лемму:

Лемма 19. *К произвольной дистрибутивной структуре L существует обобщенная булева алгебра B* [19], *имеющая следующие свойства*

(1) *L — подструктура B,*

(2) *$\Theta(L)$ изоморфна с $\Theta(B)$,*

(3) *если $[a, b]$ — интервал структуры L конечной длины, то $[a, b]$ имеет такую же длину и в B.*

Из теоремы 6 и леммы 19 следует

Теорема 7. *Пусть L — дистрибутивная структура. $\Theta(L)$ — структура Стоуна тогда и только тогда, когда обобщенная булева алгебра B, соответствующая структуре L на основании леммы* 19, *будет локально полна* [20].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G., *Lattice theory,* New York 1948 (*Теория структур*, Москва 1952).

[2] Grätzer G., Schmidt E. T., *On a problem of M. H. Stone,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *8* (1957), 455—460.

[3] Grätzer G., Schmidt E. T., *On ideal theory for lattices,* Acta Sci. Math. (Szeged) *19* (1958), 82—92.

[4] Grätzer G., Schmidt E. T., *Ideals and congruence relations in lattices,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *9* (1958), 137—175.

[5] Grätzer G., Schmidt E. T., *On the generalized Boolean algebra generated by a distributive lattice,* Indag. Math. *20* (1958), 547—553.

[6] Катриняк Т., *Примечание к структурам Стоуна I*, Mat.-fyz. časop. *16* (1966), 128—142.

Поступило 26. 11. 1965.

Katedra algebry a teórie čísel
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava

[19] Обощенная булева алгебра — это дистрибутивная структура с относительными дополнениями и наименьшим элементом.

[20] Структура L локально полна, если для всякого $a \leqslant b$ $(a, b \in L)$ подструктура $[a, b]$ полна.