Iva Karasová; Arnošt Kessler

Lösung von Systemen simultaner eindimensionaler Wärmeleitungsgleichungen mittels Matrizenähnlichkeitstransformationen (Reduktion gewisser simultaner Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung auf Systeme gegenseitig unabhängiger Differentialgleichungen gleicher Ordnung)

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 16 (1966), No. 2, 193--199

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 16, 2, 1966

LÖSUNG VON SYSTEMEN SIMULTANER EINDIMENSIONALER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNGEN MITTELS MATRIZENÄHNLICHKEITSTRANSFORMATIONEN

(Reduktion gewisser simultaner Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung auf Systeme gegenseitig unabhängiger Differentialgleichungen gleicher Ordnung)

IVA KARASOVÁ, ARNOŠT KESSLER, Bratislava

EINLEITUNG

Bei der Lösung verschiedenster technischer Aufgaben stösst man auf Probleme der Wärmeleitung in Mehrkörpersystemen. Wenn es möglich ist eine solche Aufgabe mittels eindimensionaler Wärmeleitungsgleichungen zu beschreiben, wobei diese dann im Allgemeinen ein simultanes Differentialgleichungssystem bilden werden, so wird es eine verhältnismässig einfache Aufgabe sein, eine allgemeine Lösung der Aufgabe anzugeben [1]. Lediglich die numerische Auswertung der Lösung bereitet mitunter bei steigender Anzahl von Gleichungen gewisse Schwierigkeiten.

In der vorliegenden Arbeit führen wir eine solche Lösungsmethode an, die es erlaubt, die Lösung des jeweiligen Gleichungssystems in einem direkten Rechengang zu bestimmen. Die Schwierigkeiten der Auswertung der allgemeinen Lösung werden so, wenigstens teilweise umgangen, was sich zumindest bei weniger „stabilen" Systemen als vorteilhaft erweisen kann.

Aber auch vom mathematischen Standpunkt ist die angewandte Methode instruktiv, wenn wir bedenken, dass sie im Grunde darauf beruht, dass wir eine geeignete Transformation angeben, mit deren Hilfe wir das simultane Gleichungssystem in ein System von einander unabhängigen Differentialgleichungen gleicher Ordnung transformieren, deren Lösung wohlbekannt ist. (Vergleiche z. B. die Methode der sukzessiven Reduktion, die zu Gleichungen höherer Ordnung führt.) Der physikalische Zusammenhang des Systems wird dann ausschliesslich durch die gemeinsamen transformierten Randbedingungen festgelegt.

FORMULATION DES PROBLEMS

Der allgemeinste Fall von eindimensionaler Wärmeleitung kann bildlich als Wärmeleitung in einem Stabe oder in einer Platte, in welchen sich Wärme entwickelt und die an der Oberfläche und an den Endquerschnitten gekühlt sind, dargestellt werden. Wenn zwei solche Stäbe (Abb. 1a) auf diese Art Wärme austauschen, dass sie mit zwei Endquerschnitten zusammengefügt sind, dann werden die beiden bezüglichen Wärmeleitungsgleichungen zwei gemeinsame Randbedingungen haben. Wenn aber der Wärmeaustausch so vonstatten geht, dass die Stäbe, wie z. B. in Abb. 1b angezeigt, mit einem Teil der Oberfläche aneinander liegen, dann tritt in jeder der beiden Wärmeleitungsgleichungen ein Koppelungsglied mit der Temperatur des anderen Stabes auf, sodass wir es dann mit zwei simultanen Differentialgleichungen zu tun haben

$$\frac{d^2T_1}{dx^2} - H_1(T_1 - T_2) = -w_1, \qquad H_i = \frac{h_{12}O_{12}}{\lambda_i P_i},$$

(1) $$i = 1, 2.$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - H_2(T_2 - T_1) = -w_2, \qquad w_i = \frac{z_i}{\lambda_i}.$$

(T Temperatur, z Intensität der Wärmeentwicklung, λ Wärmeleitfähigkeit, h Wärmeübergangszahl, O Umfang und P Querschnitt des durch den Index i bezeichneten Stabes. Die Doppelindizes zeigen an, dass es sich um Wärmeübergang zwischen den durch die Indizes bezeichneten Stäbe handelt, oder die Länge des Umfanges der Kontaktfläche usw.)

Es zeigt sich schliesslich, dass die Wärmeleitung in einem ganzen System von n Stäben und Platten ganz allgemein durch folgendes in der Matrizensymbolik angeschriebenes Differentialgleichungssystem beschrieben werden kann. (Nähere Einzelheiten siehe [1])

(2) $$\mathbf{E}\frac{d^2\mathbf{T}(x)}{dx^2} - \mathbf{H}\mathbf{T}(x) = -\mathbf{W},$$

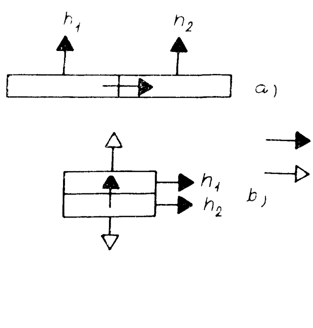

Abb. 1. Zwei Stäbe, zwischen welchen es (a) über die Endquerschnitte, (b) über deren Oberfläche zu Wärmeaustausch kommt.

wo

$$\mathbf{T}(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n}{}' H_{1k} & -H_{12} & \ldots & -H_{1n} \\ -H_{21} & \sum\limits_{k=0}^{n}{}' H_{2k} & \ldots & -H_{2n} \\ & \vdots & & \\ -H_{n1} & -H_{n2} & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{n}{}' H_{nk} \end{bmatrix}, \quad H_{ik} \geq 0, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

(H_{i0} charakterisiert die Wärmeübergabe an die Umgebung, H_{ik} den Wärmeübergang zwischen dem i-ten und dem k-ten Stab.)

Die Randbedingungen können ganz allgemein aufgefasst werden.

$$\text{(2a)} \qquad \left\{ \mathbf{E} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}x} + \mathbf{H}^*(x) \right\}_{x=0, l_i} = \boldsymbol{K} \qquad i = 1,2 \ldots n .$$

Der Vektor $\boldsymbol{K}$ besteht aus konstanten Elementen.

Wir erhalten aus (2a) alle möglichen Fälle durch Einsetzen specifischer Werte für $\mathbf{H}^*$ sowie $\boldsymbol{K}$ oder durch Einsetzen von $= 0$ ev. auch anstatt von 1 in der Einheitsdiagonalmatrix usw. Die Allgemeingültigkeit von (2) und (2a) soll nur insofern eingeschränkt werden, dass die Wärmeleitzahlen, Wärmeübergangszahlen usw., d. h. alle in den Gleichungen vorkommenden Koeffizienten konstant (von der Temperatur unabhängig) sind.

TRANSFORMATION DES SIMULTANEN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMS IN EIN SYSTEM VON EINANDER UNABHÄNGIGEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Bestimmen wir zunächst die Eigenwerte der Matrix des Differentialgleichungssystems (2), z. B. in dem wir die charakteristische Gleichung des Determinanten der Matrix konstruieren und nach Null setzen, die Wurzeln der Gleichung bestimmen

$$\text{(3)} \qquad |\mathbf{H} - p\mathbf{E}| = (p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n) = 0 .$$

Da gezeigt werden kann, dass die Matrix $\mathbf{H}$ symetrisierbar ist, existiert eine Ähnlichkeitstransformation

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{c}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{c} = \mathbf{n}$$

durch die die Matrix $\mathbf{H}$ in eine Normalform $\mathbf{n}$ transformiert wird. Die Elemente der Matrix $\mathbf{n}$, die wegen der Symetrisierbarkeit von $\mathbf{H}$ eine Diagnalmatrix ist(¹), werden durch die Eigenwerte von $\mathbf{H}$ gebildet.

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} p_1 & 0 \dots & & \\ 0 & p_2 \dots & & \\ 0 & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & p_n \end{vmatrix} \tag{5}$$

Transformieren wir nun das gegebene Gleichungssystem (2) an Hand der linearen Transformation $\mathbf{T}(x) = \mathbf{c}\mathbf{U}$, indem wir für $\mathbf{T}(x)$ einsetzen

$$\mathbf{E}\mathbf{c}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}x^2} - \mathbf{H}\mathbf{c}\mathbf{U} = -\mathbf{W}$$

und multiplizieren wir von links mit der reziproken $\mathbf{c}^{-1}$

$$\mathbf{E}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}x^2} - \mathbf{n}\mathbf{U} = -\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{c}^{-1}\mathbf{W}. \tag{6}$$

Es ist evident, dass das transformierte Gleichungssystem (6) nunmehr aus voneinander unabhängigen Wärmeleitungsgleichungen besteht. (im Gegensatz zu den simultanen; hier denken wir keineswegs an die Randbedingungen, die, wie wir sehen werden, die Gleichungen verknüpfen.) Da, wie in [1] gezeigt wurde, die Eigenwerte p_i, $i = 1, 2, \dots n$ Quadrate der Wurzeln der charakterischen Gleichung $|\mathbf{H} - p^2\mathbf{E}| = 0$ sind und aus physikalischen Gründen $p_i = 0$ nicht in Betracht gezogen wird, gilt $p_i > 0$. Wir können darum die Lösung von (6) direkt anschreiben

$$U_i(x) = \frac{m_i}{p_i}(1 - \cosh\sqrt{p_i}\,x) + A_i\cosh\sqrt{p_i}\,x + \frac{B_i}{\sqrt{p_i}}\sinh\sqrt{p_i}\,x, \tag{7}$$

$$i = 1, 2 \dots n,$$

wo A_i und B_i vorderhand nicht näher bestimmte Konstanten sind. Hieraus

(¹) Wie leicht nachgewiesen werden kann, wenn wir Gl. (1) in der Form

$$\lambda_1 P_1 \frac{\mathrm{d}^2 T_1}{\mathrm{d}x^2} - h_{12}O_{12}(T_1 - T_2) = -z_1$$

anschreiben, ist die Matrix $\mathbf{H}$ symetrisierbar. Sie kann als Produkt einer Diagonalmatrix und einer symetrischen Matrix dargestellt werden. Wie bekannt (siehe z. B. Schmeidler [2] S. 79) besteht die Normalform einer symetrisierbaren Matrix aus einer Diagonalmatrix der Eigenwerte der betreffenden Matrix.

ergibt sich dann durch einfaches Einsetzen in $\mathbf{T}(x)$ die gesuchte Lösung als $\mathbf{T}(x) = \mathbf{c}\mathbf{U}$.

Die Werte von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind nun so zu bestimmen, dass die Randbedingungen (2a) erfüllt werden. Grundsätzlich sind hier zwei Fälle zu unterscheiden. Im allgemeinen Falle setzt man aus (7) in $\mathbf{T}(x)$ und in (2a) ein und ordnet das Gleichungssystem nach den unbekannten Komponenten A_i, B_i und löst das so erhaltene algebraische Gleichungssystem. Nimmt speziell (2a) die Form

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{K}_1, \qquad \mathbf{T}(l) = \mathbf{K}_2$$

an, so haben wir

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{c}^{-1}\mathbf{T}(x), \qquad x = 0, l. \tag{8}$$

Multiplizieren wir die rechte Seite von (8), ergibt sich für jedes Paar von A_i-, B_i-Werten zunächst

$$U_i(0) = A_i = c_{i1}^{-1}T_1(0) + c_{i2}^{-1}T_2(0) + \ldots + c_{in}^{-1}T_n(0) \tag{8a}$$

und

$$U_i(l) = \frac{m_i}{p_i}\left(1 - \cosh\sqrt{p_i}\,l\right) + A_i \cosh\sqrt{p_i}\,l + \frac{B_i}{\sqrt{p_i}} \sinh\sqrt{p_i}\,l =$$
$$= c_{i1}^{-1}T_1(l) + c_{i2}^{-1}T_2(l) + \ldots + c_{in}^{-1}T_n(l)$$

und in Anbetracht dessen, dass $\mathbf{A}$ durch (8a) bestimmt ist, schliesslich

$$B_i = \frac{\sqrt{p_i}}{\sinh\sqrt{p_i}\,l}\left\{c_{i1}^{-1}T_1(l) + c_{i2}^{-1}T_2(l) + \ldots + c_{in}^{-1}T_n(l) - \right.$$
$$\left. - \frac{m_i}{\sqrt{p_i}}\left(1 - \cosh\sqrt{p_i}\,l\right) - A_i \cosh\sqrt{p_i}\,l\right\}. \tag{8b}$$

In diesem Falle können wir also A_i, B_i direkt ermitteln.

Ein Beispiel

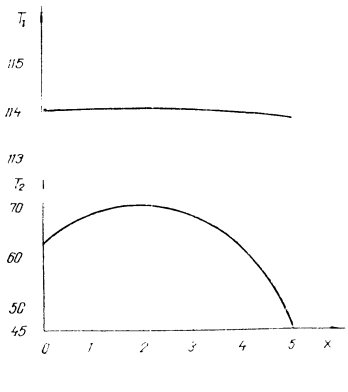

Abb. 2. Verlauf der Lösung des Beispiels

Es sei das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^2T_1}{dx^2} - 1{,}579 \,.\, 10^{-3}T_1 + 2{,}105 \,.\, 10^{-3}T_2 = 1{,}316 \,.\, 10^{-1},$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - 3{,}733 \,.\, 10^{-1}T_2 + 1{,}600 \,.\, 10^{-1}T_1 = 12{,}133.$$

gegeben, mit den Randbedingungen

$$\left(\frac{dT_1}{dx}\right)_{x=0} = 1{,}5789 \,.\, 10^{-3}\,[T_1(0) - 20],$$

$$\left(\frac{dT_2}{dx}\right)_{x=0} = 0{,}2\,[T_2(0) - 15],$$

$$\left(\frac{dT_1}{dx}\right)_{x=5} = -2{,}6315 \,.\, 10^{-3}\,T_1(5),$$

$$\left(\frac{dT_2}{dx}\right)_{x=5} = -0{,}5\,[T_2(5) - 5].$$

Die Auflösung der charakteristischen Gleichung ergibt

$$\begin{vmatrix} 1{,}5789 \,.\, 10^{-3} - p & 2{,}1053 \,.\, 10^{-3} \\ -1{,}6000 \,.\, 10^{-1} & 3{,}7333 \,.\, 10^{-1} - p \end{vmatrix} = (p - 3{,}7423 \,.\, 10^{-1})(p - 6{,}7500 \,.\, 10^{-4}),$$

woraus sich für $\mathbf{Hc} = \mathbf{c}n$ die beiden Gleichungssysteme

$$-3{,}7265 \,.\, 10^{-1}c_{11} - 2{,}1053 \,.\, 10^{-3}c_{21} = 0,$$

$$-1{,}6000 \,.\, 10^{-1}c_{11} - 9{,}0500 \,.\, 10^{-4}c_{21} = 0$$

und

$$9{,}0390 \,.\, 10^{-4}c_{12} - 2{,}1053 \,.\, 10^{-3}c_{22} = 0,$$

$$-1{,}6000 \,.\, 10^{-1}c_{12} + 3{,}7266 \,.\, 10^{-1}c_{22} = 0,$$

ergeben. Setzen wir in dem homogenen Gleichungssystem $c_{11} = 1$ und $c_{12} = 1$, erhalten wir

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1{,}77 \,.\, 10^{2} & 4{,}29 \,.\, 10^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{c}^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}4183 \,.\, 10^{-3} & -5{,}6370 \,.\, 10^{-3} \\ 9{,}9770 \,.\, 10^{-1} & 5{,}6370 \,.\, 10^{-3} \end{pmatrix}$$

und somit

$$
\mathbf{U} = \left| \begin{matrix} 1,8191 \,.\, 10^{-1} + (A_1 + 1,8191 \,.\, 10^{-1}) \cosh \sqrt{p_1}\, x + \dfrac{B_1}{\sqrt{p_1}} \sinh \sqrt{p_1}\, x \\ 2,9580 \,.\, 10^{2} + (A_2 - 2,9580 \,.\, 10^{2}) \cosh \sqrt{p_2}\, x + \dfrac{B_2}{\sqrt{p_2}} \sinh \sqrt{p_2}\, x \,. \end{matrix} \right|
$$

$$
\sqrt{p_1} = 6,1175 \,.\, 10^{-1}, \qquad \sqrt{p_2} = 2,5990 \,.\, 10^{-2}.
$$

Setzen wir nun die Werte der Randbedingungen sowie $\mathbf{T}(x) = \mathbf{c}\mathbf{U}(x)$ in (2a) ein, ergibt sich nach Multiplizieren und Umordnung schliesslich für A_i und B_i das Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} 1,9955 \,.\, 10^{-1} & 4,7984 \,.\, 10^{-4} & 1 & 0 \\ 1,9797 \,.\, 10^{-1} & 2,0589 \,.\, 10^{-3} & 0 & 1 \\ 1,1817 \,.\, 10^{1} & -1,2129 \,.\, 10^{-3} & 1,9325 \,.\, 10^{1} & -6,0328 \,.\, 10^{-3} \\ 5,2929 & 7,2550 \,.\, 10^{-3} & -8,6138 & 1,0276 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1,6835 \,.\, 10^{-2} \\ -4,8416 \,.\, 10^{-2} \\ -2,0759 \\ 1,8984 \end{pmatrix}
$$

mit der Lösung

$$
A_1 = 0,0769; \quad A_2 = 113,8997; \quad B_1 = -0,05317 \quad \text{und} \quad B_2 = 0,20130
$$

Daraus ergibt sich dann als Lösung

$$
\mathbf{T}(x) = \mathbf{c}\mathbf{U}(x) =
$$

$$
\begin{pmatrix} 295,70 + 0,105 \cosh 6,1175 \,.\, 10^{-1}x - 181,900 \cosh 2,5990 \,.\, 10^{-2}x - \\ \qquad - 0,087 \sinh 6,1175 \,.\, 10^{-1}x + 7,750 \sinh 2,5990 \,.\, 10^{-2}x \\ 159,09 - 18,585 \cosh 6,1176 \,.\, 10^{-1}x - 78,036 \cosh 2,5990 \,.\, 10^{-2}x + \\ \qquad + 15,389 \sinh 6,1175 \,.\, 10^{-1}x + 3,323 \sinh 2,5990 \,.\, 10^{-2}x \end{pmatrix}
$$

LITERATUR

[1] Karasová I., Kessler A., *Stationäre eindimensionale Wärmeströmung in n-Körpersystemen mit innerer Wärmeentwicklung I*, Apl. mat. *10* (1965), im Druck.

[2] Schmeidler W., *Vorträge über Determinanten und Matrizen*, Akademieverlag, Berlin 1949.

Eingegangen am 17. 3. 1965.

ČSAV, Fyzikálny ústav Slovenskej akadémie vied, Bratislava