Milan Kolibiar

Poznámka k reprezentácii sväzu pomocou rozkladov množiny

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 4 (1954), No. 2, 79--80

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126899`

POZNÁMKA K REPREZENTÁCII SVÄZU POMOCOU ROZKLADOV MNOŽINY

M. KOLIBIAR

Nech S je sväz definovaný na množine M. Sväzové operácie označíme znakmi $\cap$, $\cup$. Ak R, R' sú rozklady množiny M, $R \leqq R'$ bude značiť, že rozklad R je zjemnením rozkladu R'. Znakom $R \cap R'$ ($R \cup R'$) označíme najväčšie spoločné zjemnenie (najmenší spoločný zákryt) rozkladov R, R'.[1] Množina všetkých rozkladov množiny M s operáciami najväčšieho spoločného zjemnenia a najmenšieho spoločného zákrytu je úplný sväz, ktorý označíme $\mathfrak{S}$. Ak prvky x, $y \in M$ patria do tej istej triedy rozkladu R množiny M, budeme písať $x \equiv y$ (R).

V tejto poznámke ukážeme, že sväz $\mathfrak{S}$ obsahuje podmnožinu X, ktorá je izomorfná so sväzom S vzhľadom na *jednu* sväzovú operáciu. Ak sväz S je distributívny, podmnožina X tvorí podsväz sväzu $\mathfrak{S}$, izomorfný so sväzom S (vzhľadom na *obe* operácie).

1. Nech $a \in S$. Pre prvky x, $y \in S$ položme $x \equiv y$ vtedy a len vtedy, keď $a \cup x = a \cup y$. Relácia $\equiv$ je zrejme reflexívna, symetrická a tranzitívna, definuje teda rozklad množiny M. Tento rozklad označíme R^a. Množinu všetkých rozkladov R^a, kde $a \in S$, označíme X.

Vzťah $a \equiv x$ (R^a) platí vtedy a len vtedy, keď $a = a \cup a = a \cup x$, t. j. $x \leqq a$. Z toho vyplýva, že jednou triedou rozkladu R^a je hlavný ideál skladajúci sa z prvkov $x \leqq a$.

1.1. *Pre* $a, b \in S$ je $R^a \cup R^b = R^{a \cup b}$.

D ô k a z. Nech pre prvky x, $y \in S$ platí $x \equiv y$ (R^a). Potom $a \cup x = a \cup y$. Odtiaľ vyplýva $(a \cup b) \cup x = (a \cup b) \cup y$, t. j. $x \equiv y$ $(R^{a \cup b})$. Teda $R^a \leqq R^{a \cup b}$. Podobne sa dokáže $R^b \leqq R^{a \cup b}$. Odtiaľ vyplýva $R^a \cup R^b \leqq R^{a \cup b}$.

2. Nech pre prvky x, $y \in S$ platí $x \equiv y$ $(R^{a \cup b})$. Potom $a \cup b \cup x = a \cup b \cup y$. Z rovností $a \cup x = a \cup (a \cup x)$, $b \cup (a \cup x) = b \cup (a \cup b \cup x) = b \cup (a \cup b \cup y)$, $a \cup (a \cup b \cup y) = a \cup (b \cup y)$, $b \cup (b \cup y) = b \cup y$ vyplýva po rade: $x \equiv a \cup x$ (R^a), $a \cup x \equiv a \cup b \cup y$ (R^b), $a \cup b \cup y \equiv b \cup y$ (R^a), $b \cup y \equiv y$ (R^b). Odtiaľ vyplýva $x \equiv y$ $(R^a \cup R^b)$. Teda $R^{a \cup b} \leqq R^a \cup R^b$ a dôkaz je ukončený.

[1] Názvy zjemnenie, najmenší spoločný zákryt a najväčšie spoločné zjemnenie rozkladov používame v zhode s prácou [1].

1.2. Uvažujme o zobrazení φ množiny M na množinu X, ktoré prvku $a \in M$ priraďuje prvok $R^a \in X$. Toto zobrazenie je prosté. Ak totiž a, b sú dva rozdielne prvky sväzu S, jednou triedou rozkladu R^a je množina prvkov X sväzu S, pre ktoré platí $x \leqq a$, jednou triedou rozkladu R^b je množina prvkov x, pre ktoré platí $x \leqq b$. Tieto triedy nie sú disjunktné (obsahujú prvok $a \cap b$) a sú zrejme rozdielne, teda rozklady R^a, R^b sú rozdielne.

Z 1.1 vyplýva, že zobrazenie φ je vzhľadom na operáciu $\cup$ izomorfizmus.

2. Nech S je *distributívny* sväz.

2.1. *Pre* $a, b \in S$ platí $R^a \cap R^b = R^{a \cap b}$.

D ô k a z. 1. Nech $x \equiv y\ (R^{a \cap b})$ $(x, y \in S)$. Potom $(a \cap b) \cup x = (a \cap b) \cup y$. Odtiaľ vyplýva $a \cup x = a \cup y$, $b \cup x = b \cup y$, t. j. $x \equiv y\ (R^a)$, $x \equiv y\ (R^b)$, teda $x \equiv y\ (R^a \cap R^b)$. Platí teda $R^{a \cap b} \leqq R^a \cap R^b$.

2. Nech $x \equiv y\ (R^a \cap R^b)$. Potom $x \equiv y\ (R^a)$, $x \equiv y\ (R^b)$, t. j. $a \cup x = a \cup y$, $b \cup x = b \cup y$. Odtiaľ vyplýva $(a \cap b) \cup x = (a \cup x) \cap (b \cup x) = (a \cup y) \cap (b \cup y) = (a \cap b) \cup y$, t. j. $x \equiv y\ (R^{a \cap b})$. Teda $R^a \cap R^b \leqq R^{a \cap b}$ a tvrdenie je dokázané.

2.2. Z 1.1 a 2.1 vyplýva, že ak S je distributívny sväz, platí $R^a \cup R^b = R^{a \cup b}$, $R^a \cap R^b = R^{a \cap b}$. To značí, že množina X je podsväz sväzu $\mathfrak{S}$, izomorfný so sväzom S.

Došlo 25. II. 1954.

Katedra matematiky
Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity
v Bratislave

LITERATÚRA

1. O. B o r ů v k a, *Theorie rozkladů v množině.* Spisy vydávané Prírodovedeckou fakultou univerzity v Brne, 278 (1946).

ПРИМЕЧАНИЕ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ СТРУКТУРЫ ПУТЕМ РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА

М. КОЛИБЯР, БРАТИСЛАВА

Выводы

Пусть S-структура, определенная на множестве M. С каждым элементом $a \in S$ поставим в соответствие разбиение R^a множества M, определенное этим образом: Элементы x, $y \in S$ принадлежать в тотже самый класс разбиения R^a тогда и только тогда, если $a \cup x = a \cup y$.

Содержанием примечания является доказательство положений:

Подмножество X структуры $\mathfrak{S}$ всех разбиений множества M, состоящее из разбиений R^a $(a \in S)$, является изоморфным с структурой S имея ввиду одную структурную операцию. Если структура S дистрибутивная, множество X образует подструктуру структуры $\mathfrak{S}$, изоморфную с структурой S.