Jiří Sedláček

Poznámka k jednomu problému o eulerovských grafech

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 8 (1958), No. 3, 151--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126875

POZNÁMKA K JEDNOMU PROBLÉMU O EULEROVSKÝCH GRAFECH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

Oystein Ore [3] a F. Bäbler [1] se nedávno zabývali eulerovskými grafy, v nichž existuje uzel c takový, že každá kružnice grafu prochází uzlem c. Tyto grafy totiž lze ve třídě souvislých eulerovských grafů charakterisovat také touto vlastností: Konstruujeme-li daný souvislý eulerovský graf jedním (uzavřeným) tahem, přičemž vycházíme z uzlu c, potom po každé, když se dostaneme do uzlu c a nemůžeme už z něho ven, jsme prošli všemi hranami grafu. V tomto příspěvku chceme naznačit jisté zobecnění citovaného problému O. Oreho a F. Bäblera.

Budiž G konečný neorientovaný graf bez smyček (v tomto příspěvku připouštíme též existenci isolovaných uzlů). Nechť H_1, H_2 jsou dva podgrafy grafu G definované takto:

a) Množina uzlů grafu H_i ($i = 1, 2$) je rovna množině uzlů grafu G.

b) Každá hrana grafu G patří právě jednomu z grafů H_1, H_2.

Potom řekneme, že H_1, H_2 jsou *komplementární* podgrafy v grafu G.

Nechť $U \neq \emptyset$ je podmnožina množiny uzlů grafu G. Řekneme, že podgraf H grafu G je *úplný vzhledem k* U, platí-li:

a) Existuje eulerovský[1] podgraf H' grafu G takový, že H, H' jsou komplementární podgrafy v G.

b) Pro každé $x \in U$ je keřík[2] K_x podgrafem v H.

Zřejmě graf G je sám svým podgrafem úplným vzhledem k libovolné neprázdné podmnožině U množiny svých uzlů. V tomto případě mluvíme o *triviálním* podgrafu úplném vzhledem k U, ostatní případy úplných podgrafů nazveme *netriviálními*.

Přistupme nyní k zobecnění jedné věty O. Oreho a F. Bäblera.

Věta 1. *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby v konečném neorientovaném grafu G existoval jen triviální podgraf úplný vzhledem k dané neprázdné*

---

[1] Slovům „eulerovský graf" zde ovšem dáváme širší náplň než König [2], neboť připouštíme také isolované uzly. Tak např. podgraf N grafu G, který obsahuje všechny uzly grafu G a žádnou hranu, je eulerovský. Podgrafy N, G jsou v G komplementární.

[2] *Keřík* K_x je podgraf grafu G, který obsahuje všechny hrany grafu G incidující s uzlem x a všechny koncové uzly všech těchto hran (viz [2], str. 128).

podmnožině U množiny uzlů grafu G, je, aby na každé kružnici grafu G ležel aspoň jeden uzel $x \in U$.

Důkaz. Nechť v grafu G existuje jenom triviální podgraf úplný vzhledem k U a nechť přitom existuje kružnice O, na které neleží žádný uzel množiny U. Sestrojme podgraf H grafu G tak, že z G vynecháme všechnyh rany kružnice O. K podgrafu H existuje v G komplementární eulerovský podgraf H' (složený ze všech uzlů grafu G a ze všech hran kružnice O). Tím docházíme ke sporu, neboť $\varkappa$ je netriviální podgraf úplný vzhledem k U.

Nechť nyní obráceně existuje v grafu G netriviální podgraf $\bar{H}$ úplný vzhledem k U; sestrojme k němu komplementární podgraf $\bar{H}'$. Protože množina hran (eulerovského) grafu $\bar{H}'$ není prázdná, můžeme v $\bar{H}'$ sestrojit kružnici Ω (viz König [2], str. 19, věta 1). Kdyby existoval uzel $x \in U$ ležící na Ω, označme h_1, h_2 dvě hrany kružnice Ω incidující s uzlem x. Hrany h_1, h_2 by nepatřily ke grafu $\bar{H}$, tedy graf $\bar{H}$ by nebyl podgraf úplný vzhledem k U. Na kružnici Ω tedy neleží žádný uzel z množiny U. Důkaz je podán.

O. Ore a F. Bäbler se zabývali případem, kdy G je souvislý eulerovský graf a U je množina s jediným prvkem c. Pak ovšem podgraf H úplný vzhledem k U je eulerovský. Vyloučíme-li případ, že se G redukuje na isolovaný uzel c, lze nutnou a postačující podmínku z věty 1 vyslovit tak, jak jsme uvedli na počátku tohoto článku. Každý souvislý eulerovský graf (s neprázdnou množinou hran) lze totiž — jak známo — konstruovat jedním uzavřeným tahem, takže triviálnímu podgrafu H úplnému vzhledem k U odpovídá tah konstruující celý graf G, netriviálnímu podgrafu H pak tah konstruující jistý jeho vlastní podgraf.

Všimněme si ještě případu, kdy množina U z věty 1 má jediný prvek, tedy $U = \{c\}$. Dříve však, než budeme zkoumat vlastnosti příslušného grafu Z, uvedeme bez důkazu jednu pomocnou větu, kterou dokazuje König [2] na str. 8 jako větu 7.

Lemma 1. *Jsou-li v daném grafu W_1 a W_2 dvě různé cesty, jež obě spojují dvojici různých uzlů p, q, pak je možno sestrojit kružnici Ω, jejíž hrany patří buď cestě W_1, nebo W_2.*

K formulaci věty 2 potřebujeme ještě jeden pojem. Nechť G_1 a G_2 jsou dva grafy, které mají aspoň jeden uzel společný. Pak *maximálním společným podgrafem* grafů G_1 a G_2 rozumíme takový graf P, jenž je podgrafem grafu G_1 i grafu G_2, přičemž platí: Je-li graf Q podgrafem v grafu G_1 i v grafu G_2, pak Q je podgrafem v P. Existence a unicita maximálního společného podgrafu je zřejmá.

Věta 2. *Nechť Z je graf, v němž existuje uzel c takový, že každá kružnice grafu Z prochází uzlem c. Buďte O' a O'' dvě různé kružnice grafu Z a nechť P je jejich maximální společný podgraf. Potom platí: Je-li P souvislý, je P buď isolovaný uzel nebo cesta v grafu Z, přičemž uzel c není vnitřním uzlem této cesty.*

Není-li P souvislý, má právě dvě komponenty, z nichž jedna je tvořena isolovaným uzlem c.[3]

Důkaz. Ze souvislosti grafu P plyne, že je to buď isolovaný uzel nebo cesta v grafu Z; nechť c je vnitřním uzlem této cesty. Odstraníme z kružnice O' (resp. O'') všechny hrany a všechny vnitřní uzly cesty P (tedy i uzel c); vznikne tak cesta W_1 (resp. W_2) v grafu G. Podle lemmatu 1 je možné sestrojit kružnici Ω, jejíž hrany patří buď cestě W_1 nebo cestě W_2, tedy Ω neprochází uzlem c (spor).

Nechť nyní P má aspoň dvě komponenty; jedna z nich (označme ji P_1) obsahuje uzel c. Nechť P má ještě aspoň dvě další různé komponenty P_2 a P_3; zvolme v každé z nich jeden uzel $p \in P_2$, $q \in P_3$. Uzly p, q dělí kružnici O' (resp. O'') na dvě části (cesty); budiž W_1 (resp. W_2) ta z nich, jež neobsahuje uzel c. Sestrojme nyní opět podle lemmatu 1 kružnici Ω; ta však neprochází uzlem c (spor). Má tedy P právě dvě komponenty P_1 a P_2. Zbývá ještě dokázat, že P_1 má jen jediný uzel c. Nechť P_1 má kromě uzlu c ještě uzel $\bar{p}$. Zvolme dále uzel $\bar{q} \in P_2$. Pomocí uzlů $\bar{p}$, $\bar{q}$ lze na kružnici O' (resp. O'') opět definovat dvě cesty; označíme-li W_1 (resp. W_2) zase tu, která neprochází uzlem c, odvodíme z lemmatu 1 analogicky jako výše existenci kružnice Ω neprocházející uzlem c (spor). Důkaz je tím podán.

Závěrem chceme poznamenat, že jednoduchá zobecnění připouštějí ještě další věty, jež O. Ore a F. Bäbler uvádějí ve svých pracích.

LITERATURA

[1] F. Bäbler, Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen, Commentarii Math. Helvet. (1953), 81—100.

[2] D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[3] O. Ore, A problem regarding the tracing of graphs, Elemente d. Math., Bd. VI (1951), Nr. 3, 49—53.

Došlo 21. 12. 1957.

Matematický ústav Československé akademie věd v Praze

ЗАМЕТКА К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ОБ ЭЙЛЕРСКИХ ГРАФАХ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК

Выводы

О. Оре и Ф. Беблер занимались эйлерскими графами G, в которых существует вершина, лежащая на каждой окружности графа G. Заметка показывает возможность обобщения этой проблемы.

[3] Část tvrzení naší věty 2 uvádí F. Bäbler [1] na str. 83 v poznámce 3 pro speciálnější případ eulerovského grafu Z bez důkazu.

EINE BEMERKUNG ÜBER EULER'SCHE GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK

Zusammenfassung

O. Ore und F. Bäbler studierten eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen G, wo ein auf jedem Kreise des Graphes G liegende Knotenpunkt existiert. Diese Bemerkung zeigt, daß man die erwähnte Aufgabe leicht verallgemeinern kann.