

Matematický časopis

Anton Kotzig

Sur le nombre des 4-cycles dans un tournoi

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 4, 247--248,249--254

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126868>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

SUR LE NOMBRE DES 4-CYCLES DANS UN TOURNOI

ANTON KOTZIG, Bratislava

Sous la notion du graphe nous entendrons ici un graphe fini sans boucles et sans arêtes multiples. Si nous orientons chacune des arêtes du graphe complet non orienté, nous obtenons un graphe complet antisymétrique (d'après la terminologie de Berge [1]). Si nous remplaçons dans un graphe orienté une certaine arête e par une arête joignant les mêmes deux sommets mais, de l'orientation inverse, nous dirons, que nous avons fait l'inversion de l'arête e .

Remarque 1. On nomme souvent une arête orientée un arc. Pour éviter les malentendus — nous le disons ici tout de suite — nous nous servons du nom de l'arête orientée (comme le fait König [2]) aussi dans le cas quand il s'agit d'un arc d'après la terminologie de Berge [1].

Comme le font les autres auteurs, nous allons aussi appeler le graphe complet antisymétrique „le tournoi“.

Soit G un tournoi et soit v un de ses sommets. Nous appelons le nombre des arêtes dans G , pour lesquelles v est leur extrémité terminale (resp. leur extrémité initiale), l'affluent en v (resp. l'écoulement de v). Nous désignerons l'affluent en v par $\pi_G(v)$ et l'écoulement de v par $\omega_G(v)$. Il découle directement des définitions mentionnées ci-dessus ceci: l'affluent + l'écoulement = le degré du sommet.

Rappelons-nous ici certaines choses utiles pour nous;

Lemme 1. *Soit G un tournoi avec n sommets. Il vaut: $\pi_G(v) + \omega_G(v) = n - 1$ pour chaque sommet $v \in G$ et il est valable aussi:*

$$\sum_{v \in G} \pi_G(v) = \sum_{v \in G} \omega_G(v) = \binom{n}{2}$$

Démonstration. La validité du lemme est évidente.

Lemme 2. *Dans un tournoi acyclique avec n sommets et seulement dans un tel tournoi on peut noter les sommets v_1, v_2, \dots, v_n de telle manière, qu'il vaut:*

(1) $[i < j] \Leftrightarrow [v_i \text{ est extrémité initiale, } v_j \text{ l'extrémité terminale de l'arête joignant les sommets } v_i, v_j]$:

(2) $\pi_G(v_i) = i - 1: \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

(3) $\omega_G(v_i) = n - i: \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

Démonstration. Rédei en [4] (voir aussi [2]) a prouvé que dans chaque tournoi G il existe un chemin hamiltonien (= chemin élémentaire qui contient tous les sommets du tournoi). Si nous notons les sommets de G par v_1, v_2, \dots, v_n dans l'ordre dans lequel un voyageur parcourant ce chemin les visite, nous obtenons la notation des sommets qui possède la propriété (1) (si (1) n'était pas valable, G devrait contenir un cycle). Il s'ensuit directement que (2) est aussi valable et, d'après le lemme 1, est valable aussi (3): q. e. d.

Soit G un graphe orienté. Nous définissons les nombres: $\dot{\pi}(G)$, $\dot{\omega}(G)$ de la façon suivante;

$$\dot{\pi}(G) = \sum_{v \in G} \pi_G^2(v): \quad \dot{\omega}(G) = \sum_{v \in G} \omega_G^2(v).$$

Lemme 3. *Dans un tournoi G quelconque il vaut; $\dot{\pi}(G) = \dot{\omega}(G)$.*

Démonstration. I. Si G est un tournoi acyclique avec n sommets, nous avons (voir le lemme 2); $\dot{\pi}(G) = \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \sum_{i=1}^n (n-i)^2 = \dot{\omega}(G)$. C'est à dire; le lemme est valable pour chaque tournoi acyclique.

II. Affirmation. Si F, G sont deux tournois avec des sommets v_1, v_2, \dots, v_n tels que G se produit de F par l'inversion de l'arête pour laquelle dans Fv_j est l'extrémité initiale et v_k l'extrémité terminale, il vaut; $[\dot{\pi}(F) = \dot{\omega}(F)] \Leftrightarrow \Leftrightarrow [\dot{\pi}(G) = \dot{\omega}(G)]$. Nous allons prouver la validité de cet affirmation. D'après la supposition il vaut; $\pi_F(v_j) = \pi_G(v_j) - 1$; $\pi_F(v_k) = \pi_G(v_k) + 1$; $\omega_F(v_j) = \omega_G(v_j) + 1$; $\omega_F(v_k) = \omega_G(v_k) - 1$. Alors; $\dot{\pi}(F) - \dot{\pi}(G) = 2[\pi_G(v_k) - \pi_G(v_j) + 1]$; $\dot{\omega}(F) - \dot{\omega}(G) = 2[\omega_G(v_j) - \omega_G(v_k) + 1]$ et alors: $[\dot{\pi}(F) - \dot{\omega}(F)] - [\dot{\pi}(G) - \dot{\omega}(G)] = 2[\pi_G(v_k) + \omega_G(v_k)] - 2[\pi_G(v_j) + \omega_G(v_j)] = 0$ (voir le lemme 1). De là découle la validité de notre affirmation.

III. Comme chaque tournoi soit il est acyclique soit, par les inversions de certaines de ses arêtes, il peut être rendu acyclique, il est clair que le lemme est valable.

Lemme 4. *Soit F un tournoi acyclique dans lequel les sommets sont notés v_1, v_2, \dots, v_n de telle sorte qu'il vaut $\pi_F(v_i) = i - 1$ pour tous les $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Soit $e = \overrightarrow{v_i v_j}$ une de ses arêtes et soit G le tournoi que nous obtenons par l'inversion de e . Le tournoi G contient alors au moins un cycle si et seulement si $j - i > 1$.*

Démonstration. Le cas $n < 3$ n'est pas intéressant (dans ce cas G ne possède aucun cycle et $j - i$ ne peut pas être plus grand que 1). Soit $n > 2$ et soit k un nombre de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que $i \neq k \neq j$. Il vaut alors: $\pi_G(v_k) = \pi_F(v_k)$. D'après le lemme 2 il est $i < j$. Il est valable aussi: $\pi_G(v_i) = \pi_F(v_i) + 1$; $\pi_G(v_j) = \pi_F(v_j) - 1$. Il s'ensuit que $[j - i = 1] \Leftrightarrow [\pi_F(v_j) = \pi_G(v_i); \pi_F(v_i) = \pi_G(v_j)]$. Donc: si $j - i = 1$, les graphes F, G sont isomorphes et G est acyclique (voir le lemme 2). Soit maintenant $j - i = c > 1$, c'est à dire

$i + 1 = k \neq j$. Il vaut évidemment: $\pi_G(v_{i+1}) = \pi_F(v_{i+1}) = \pi_F(v_i) + 1 = \pi_G(v_i)$. Ils existent deux différents sommets qui ont les affluents égaux. D'après le lemme 2, dans un tournoi acyclique cela n'est pas possible. Donc: G possède au moins un cycle, q. e. d.

Théorème 1. *Dans un tournoi acyclique avec n sommets F il vaut: $\dot{\pi}(F) = \dot{\omega}(F) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$. Soit G le tournoi qui contient au moins un cycle et qui se produit de F par l'inversion d'une certaine de ses arêtes. Il vaut alors: $\dot{\pi}(G) = \dot{\omega}(G) < \dot{\pi}(F) = \dot{\omega}(F)$.*

Démonstration. D'après le lemme 3 et d'après sa démonstration pour le tournoi acyclique F il vaut: $\dot{\pi}(F) = \dot{\omega}(F) = \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$. D'après le lemme 2 nous pouvons noter les sommets de F v_1, v_2, \dots, v_n de façon que $[i < j] \Leftrightarrow [\pi_F(v_i) < \pi_F(v_j)]$. Soit $e = \overrightarrow{v_r v_s}$ une telle arête de F par l'inversion de la quelle nous obtenons de F un tournoi G contenant au moins un cycle. Évidemment: $s - r = c > 1$ (d'après le lemme 4) et $\pi_F(v_r) < \pi_F(v_s)$. Donc, il vaut ce qui suit: $\dot{\pi}(G) = \dot{\pi}(F) - \pi_F^2(v_r) - \pi_F^2(v_s) + [\pi_F(v_r) + 1]^2 + [\pi_F(v_s) - 1]^2 = \dot{\pi}(F) + 2[1 - c]$. Parceque $c > 1$, la validité du théorème est claire.

Théorème 2. *Soit F un tournoi contenant au moins un cycle. Il possède alors une arête avec la propriété suivante: par l'inversion de cet arête nous obtenons de F un tel tournois G que $\dot{\pi}(G) > \dot{\pi}(F)$.*

Démonstration. Que F contient au moins un cycle. D'après [3] F contient au moins un 3-cycle (= cycle de longueur 3) avec les sommets v_i, v_j, v_k et avec les arêtes $e_1 = \overrightarrow{v_i v_j}, e_2 = \overrightarrow{v_j v_k}, e_3 = \overrightarrow{v_k v_i}$. Désignons par G_x le tournoi que nous obtenons de F par l'inversion de l'arête e_x . Il vaut;

$$p_1 = \dot{\pi}(G_1) - \dot{\pi}(F) = 2[1 - \pi_F(v_j) + \pi_F(v_i)],$$

$$p_2 = \dot{\pi}(G_2) - \dot{\pi}(F) = 2[1 - \pi_F(v_k) + \pi_F(v_j)],$$

$$p_3 = \dot{\pi}(G_3) - \dot{\pi}(F) = 2[1 - \pi_F(v_i) + \pi_F(v_k)].$$

Alors; $p_1 + p_2 + p_3 = 6$. Donc: au moins un nombre p_x doit être positif et il vaut: $\dot{\pi}(G_x) > \dot{\pi}(F)$; q. e. d.

Théorème 3. *La valeur maximum de $\dot{\pi}$ (et aussi de $\dot{\omega}$), étant donné le nombre de sommets, atteint le tournoi qui est acyclique.*

Démonstration. La validité du théorème découle du théorème 1 et 2.

Théorème 4. *Si le tournoi contient un cycle, il contient alors aussi au moins une arête telle par l'inversion de la quelle il se produit un tournoi avec un nombre plus petit de 3-cycles.*

Démonstration. Soit F un tournoi avec n sommets et avec au moins un cycle. D'après le théorème 2, il existe dans F une telle arête par l'inversion de laquelle se produit un tel tournoi G que $\dot{\pi}(G) > \dot{\pi}(F)$. Désignons par $\tau(F)$ (resp. $\tau(G)$) le nombre des 3-cycles dans F (resp. dans G). D'après [1] (p. 129) il est valable:

$$\tau(F) = \frac{1}{8} \binom{2n}{3} - \frac{1}{2} \dot{\omega}(F) = \frac{1}{8} \binom{2n}{3} - \frac{1}{2} \dot{\pi}(F); \quad \tau(G) = \frac{1}{8} \binom{2n}{3} - \frac{1}{2} \dot{\pi}(G).$$

Parceque $\dot{\pi}(G) > \dot{\pi}(F)$, il est valable aussi $\tau(G) < \tau(F)$. Cela prouve le théorème.

Théorème 5. Soit G un tournoi avec n sommets, alors $\dot{\pi}(G) \geq \frac{1}{4}n(n^2 - 2n + 2)$, si n est pair, et $\dot{\pi}(G) \geq \frac{1}{4}n(n - 1)^2$, si n est impair.

Démonstration. D'après le lemme 1 la somme des affluents dans G entier est $\binom{n}{2}$ et le moyen de l'affluent dans un sommet est alors $\frac{1}{2}(n - 1)$. Si $n = 2k + 1$, le minimum de $\dot{\pi}(F)$ se produit évidemment quand l'affluent de chaque sommet est $k = \frac{1}{2}(n - 1)$ (alors quand l'affluent = l'écoulement dans chaque sommet). Tels tournois existent, comme on le sait (voir [3], p. 203), pour chaque n impair. On les appelle des tournois complètement égalisés (bref; ϱ -tournois). Dans ce cas $\dot{\pi}(F) = \frac{1}{4}n(n - 1)^2$.

Si $n = 2k$, l'affluent ne peut pas être égal dans tous les sommets, car $\frac{1}{2}(n - 1)$ n'est pas un nombre entier. Le minimum $\dot{\pi}(G)$ se trouvera dans un tel tournoi dans lequel k sommets ont un affluent $(k - 1)$ et k sommets ont l'affluent k . Un tel tournoi est produit à partir d'un ϱ -tournoi avec $(2k + 1)$ sommets si nous supprimons un de ses sommets (et aussi les arêtes incidentes avec lui). Dans ce cas il vaut; $\dot{\pi}(G) = \frac{1}{4}n(n^2 - 2n + 2)$. La validité du lemme est évidente de ce que nous venons de dire.

On peut s'assurer facilement que chaque tournoi avec 4 sommets est isomorphe avec exactement un des tournois $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma, T_\delta$ qui se trouvent dans la figure 1.

Soit G un tournoi. Nous allons noter le nombre des soustournois dans G

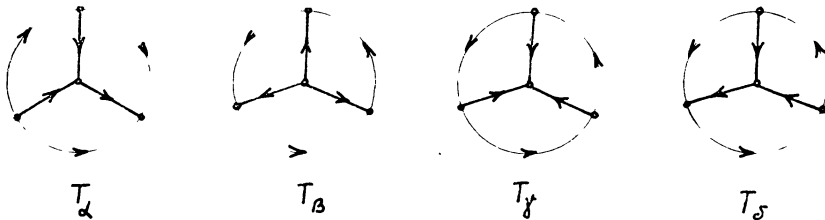


Fig. 1

qui sont isomorphes avec $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma, T_\delta$ comme il suit; $\alpha(G), \beta(G), \gamma(G), \delta(G)$.

Lemme 5. Soit G un tournoi avec n sommets. Sur le nombre $\tau(G)$ des 3-cycles dans G il est valable: $\tau(G) = -\frac{1}{n-3} [\beta(G) + \gamma(G) + 2\delta(G)]$ et $\delta(G)$ est le nombre des 4-cycles dans G .

Démonstration. Le tournoi T_α est acyclique, il ne contient pas ni un 3-cycle ni un 4-cycle. Le tournoi T_β (et aussi le tournoi T_γ) contient justement un 3-cycle et ne contient aucun 4-cycle et le tournoi T_δ possède justement deux 3-cycles et un 4-cycle (voir fig. 1). Il s'ensuit-le nombre des 4-cycles dans G est $\delta(G)$. Prenons encore en considération que chaque triple de sommets de G se trouve dans $(n-3)$ de ses différents soustournois avec 4 sommets. Pour cette raison il est valable; $(n-3)\tau(G) = \beta(G) + \gamma(G) + 2\delta(G)$. De là découle la validité du lemme.

Théorème 6. Soit G un tournoi avec n sommets, il vaut alors: $\delta(G) = \alpha(G) + \frac{1}{8}n^2(n-1)(n-3) - \frac{1}{2}(n-3)\pi^*(G)$.

Démonstration. D'après le lemme 5 et d'après [1] (p. 129) il est valable; $\beta(G) + \gamma(G) + 2\delta(G) = (n-3)\tau(G) = \frac{1}{12}n(n-1)(n-3)(2n-1) - \frac{1}{2}(n-3)\pi^*(G)$ et évidemment: $\alpha(G) + \beta(G) + \gamma(G) + \delta(G) = \binom{n}{4}$. De ces deux équations découle directement la validité du théorème.

Soit G un tournoi et soit $e = \overline{uv}$ l'arête quelconque dans G . Définissons l'ensemble $L_G(e)$ de certains sommets de G ainsi; $x \in G$ est élément de $L_G(e)$, si $x \notin \{u, v\}$ et si G contient toutes les deux arêtes suivantes; $\overline{ux}, \overline{xv}$. Notons; $\lambda_G(e) = |L_G(e)|$. Le théorème suivant est valable;

Théorème 7. $\alpha(G) = \sum_{e \in G} \binom{\lambda_G(e)}{2}$.

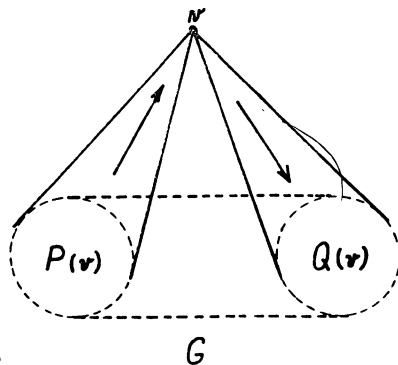


Fig. 2

Démonstration. Soit $e = \overrightarrow{uv}$ l'arête quelconque dans G et soient $x \neq y$ deux sommets de $L_G(e)$. D'après la définition de l'ensemble $L_G(e)$ le sous-tournoi F du tournoi G contenant les sommets et seulement les sommets u, v, x, y est isomorphe avec T_α (voir fig. 1). Seule l'arête e dans le tournoi entier F possède cette qualité: elle part d'un sommet qui a dans F l'écoulement 3 et se dirige vers un sommet qui possède l'affluent 3. Cela est valable pour chaque paire de sommets x, y de $L_G(e)$ et seulement pour telle paire de sommets. Le nombre de telles paires est $\binom{\lambda_G(e)}{2}$. Chaque tournoi isomorphe avec T possède une et seulement une arête avec la qualité mentionnée ci-dessus. De cela la validité du théorème est évidente.

Rappelons maintenant certaines choses connues au sujet des ϱ -tournois; Chaque ϱ -tournoi a un nombre impaire de sommets; si ce nombre dans le ϱ -tournoi G est $2n + 1$, on a alors;

$$\tau(G) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1); \quad \dot{\pi}(G) = n^2(2n + 1).$$

Suivant cela, si nous mettons dans la formule mentionnée dans le théorème 6, nous obtenons, après l'adaptation, le résultat:

Lemme 6. *Soit G un ϱ -tournoi avec $(2n + 1)$ sommets. Il vaut alors:*

$$\delta(G) = \alpha(G) + \frac{1}{2}n(n - 1)(2n + 1).$$

Dans ce qui suit nous trouverons aussi une limitation du nombre $\alpha(G)$ pour le cas où G est un ϱ -tournoi. Tout d'abord nous devons faire quelques réflexions préparatoires.

Soit G un ϱ -tournoi avec $(2n + 1)$ sommets et soit v un de ses sommets. Désignons par $P(v)$ (resp. $Q(v)$) le sous-tournoi de G qui contient les sommets et seulement les sommets de G desquels part (resp. vers lesquels se dirige) l'arête incidente avec v (voir Fig. 2). Soit $E(v)$ l'ensemble de tous les arêtes se dirigeant vers v . Soit u un sommet de $P(v)$ et soit $e = \overrightarrow{uv} \in E(v)$. Il est évidemment valable ceci (voir fig. 2); $\lambda_G(e) = \omega_{P(v)}(u)$ et de la somme

$$\kappa(v) = \sum_{e \in E(v)} \binom{\lambda_G(e)}{2}$$

il vaut;

$$\kappa(v) = \sum_{u \in P(v)} \binom{\omega_{P(v)}(u)}{2} = \frac{1}{2} \left[\dot{\omega}(P(v)) - \binom{n}{2} \right].$$

Il s'ensuit (voir le théorème 7 et considérer que chaque arête se dirige vers un sommet du graphe);

$$\alpha(G) = \sum_{v \in G} \kappa(v) = -\frac{1}{4}(n - 1)n(2n + 1) + \frac{1}{2} \sum_{v \in G} \dot{\omega}(P(v)).$$

Théorème 8. Soit G un ρ -tournoi avec $(2n + 1)$ sommets. Il est valable:

I. $\frac{1}{8}n(n - 2)^2(2n + 1) \leq \alpha(G) \leq \frac{1}{6}(2n + 1) \binom{n}{3}$; si n est pair.

II. $\frac{1}{8}n(n - 1)(n - 3)(2n + 1) \leq \alpha(G) \leq \frac{1}{6}(2n + 1) \binom{n}{3}$; si n est impair.

III. Pour chaque n naturel il existe un tel ρ -tournoi H avec $(2n + 1)$ sommets, qu'il est valable: $\alpha(H) = (2n + 1) \binom{n}{3}$.

Démonstration. Soit v un sommet quelconque de G et soit $P(v)$ le sous-tournoi de G lui correspondant. D'après le théorème 1 et 3 il est $\omega^*(P(v)) \leq \frac{1}{6}n(n - 1)(2n - 1)$, et donc;

$$\alpha(G) = -\frac{1}{4}(n - 1)n(2n + 1) + \frac{1}{2} \sum_{v \in G} \omega^*(P(v)) \leq (2n + 1) \binom{n}{3}.$$

D'après le théorème 5 on a encore;

I. Dans le cas où n est pair: $\frac{1}{4}n(n^2 - 2n + 2) \leq \alpha^*(P(v))$ et il s'ensuit:

$$\frac{1}{8}n(n - 2)^2(2n + 1) \leq \alpha(G).$$

II. Dans le cas où n est impair: $\frac{1}{4}n(n - 1)^2 \leq \alpha^*(P(v))$ et alors:

$$\frac{1}{8}n(n - 1)(n - 3)(2n + 1) \leq \alpha(G).$$

III. Soit n un nombre naturel quelconque. Construisons le ρ -tournoi H contenant les sommets v_0, v_1, \dots, v_{2n} comme il suit: H contient les arêtes et seulement les arêtes; $\overrightarrow{v_x v_{x+1}}, \overrightarrow{v_x v_{x+2}}, \dots, \overrightarrow{v_x v_{x+n}}$, où $x = 0, 1, 2, \dots, 2n$ et où nous mettons $v_{2n+1+y} = v_y$. Il est évident, que dans le graphe G pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ il est valable; $P(v_i)$ est un tournoi acyclique. De là découle tout de suite que $\alpha(H) = (2n + 1) \binom{n}{3}$, q. e. d.

Remarque 2. On peut prouver que pour un nombre infini de différents nombres n il existe un tel ρ -tournoi G avec $(2n + 1)$ sommets, que $\alpha(G)$ atteint sa limite inférieure mentionnée dans le théorème 8. On ne sait pas jusqu'ici si un tel ρ -tournoi existe pour chaque n . La possibilité de préciser davantage la limite inférieure pour quelques b reste encore ouverte.

Théorème 9. Soit G un tournoi avec $(2n + 1)$ sommets. Du nombre $\delta(G)$ des 4-cycles dans G il est valable;

I. $\frac{1}{8}n^3(2n + 1) \leq \delta(G) \leq (2n + 1) \binom{n + 1}{3}$, si n est pair.

II. $\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)(2n+1) \leq \delta(G) \leq (2n+1) \binom{n+1}{3}$, si n est impair.

Démonstration. La validité du théorème découle directement du lemme 6 et du théorème 8.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.
- [2] König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.
- [3] Kotzig A., *Des cycles dans les tournois*, Théorie des graphes (Journées internat. d'étude — Rome, juillet 1966), Paris—New York 1967.
- [4] Rédei L., *Ein kombinatorischer Satz*, Acta Litt. Sc. (Sc. Math.) Szeged 7 (1934), 39—43.

Reçu le 6 décembre 1966.

*Katedra
numerickej matematiky a matematickej štatistiky
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského,
Bratislava*