Ján Pidany

Номографирование системы уравнений частного вида

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 4, 299--311

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126863

Matematický časopis 18 (1968), No. 4

НОМОГРАФИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЧАСТНОГО ВИДА

ЯН ПИДАНИ (JÁN PIDANY), КОШИЦЕ

I. Пусть дана система двух уравнений с шестью переменными

$$x_5 = f(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{1}$$

$$x_6 = g(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Мы будем искать необходимые и достаточные условия представимости системы (1) в виде

$$A_{5,6} = A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4}, \tag{2}$$

$$B_{5,6} = B_{1,2},$$

где $A_{i,k} = A(x_i, x_k)$, $B_{i,k} = B(x_i, x_k)$.

Систему уравнений (2) можно представить номограммой с прозрачным ориентированным транспарантом [3], схема которой приведена на рисунке 1.

Предположим, что функции f и g в параллелепипеде $\mathscr{G}$ достаточно гладкие и в $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}$

$$f'_{x_i} \neq 0, \quad g'_{x_i} \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

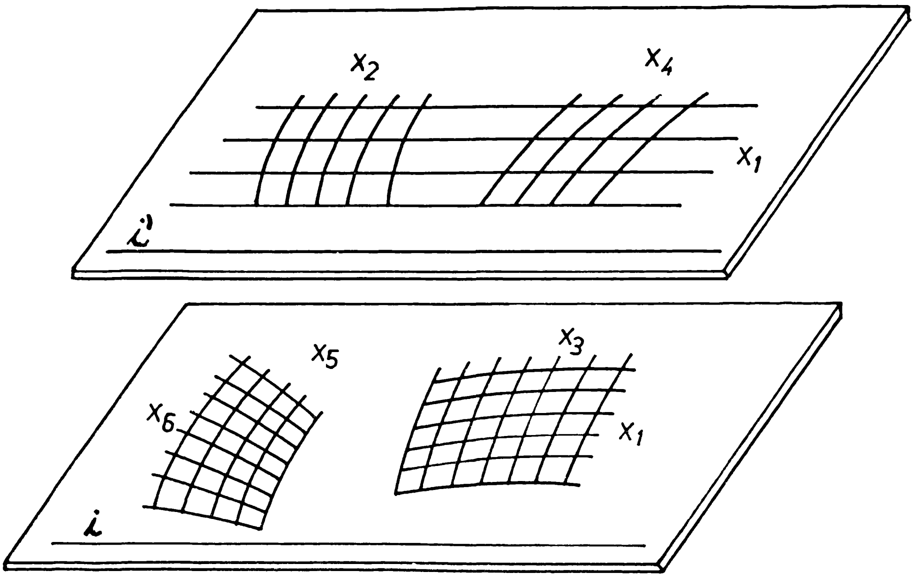
где $f'_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $g'_{x_i} = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$.

Требуется найти такую систему уравнений (2), для которой в области изменения x_i справедлива система тождеств

$$A_{5,6}(f, g) \equiv A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4}, \tag{3}$$

$$B_{5,6}(f, g) \equiv B_{1,2},$$

удовлетворящая условиям



Ключ: $(x_1, x_3) \models\!| \ (x_1, x_4)$, $i \parallel i'$, $(x_5, x_6) \leftarrow\!| \ (x_1, x_2)$.

Рис. 1.

$$\frac{\mathbf{D}(A_{1,2},\, B_{1,2})}{\mathbf{D}(x_1,\, x_2)} \neq 0, \tag{4}$$

$$\frac{\mathbf{D}(A_{5,6}\; B_{5,6})}{\mathbf{D}(x_5,\, x_6)} \neq 0. \tag{5}$$

О функциях $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ предположим, что в некоторой области также достаточно гладкие.

Теорема 1. *Для того, чтобы существовала система тождеств* (3), *удовлетворящая условиям* (4), (5), *необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$\frac{g'_{x_i}}{f'_{x_i}} = Q(f,\, g),\; i = 3,\, 4, \tag{6}$$

$$\frac{f'_{x_3}}{f'_{x_4}} = T(x_1,\, x_3,\, x_4), \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \lg \left(\frac{f'_{x_3}}{f'_{x_4}} \right) = P(x_1,\, x_3), \tag{8}$$

$$\varphi(x_1) e^{\int P(x_1,\, x_3)\, \mathrm{d}x_3} : f'_{x_3} = R(f,\, g), \tag{9}$$

где $\varphi(x_1)$ производная функция

(10) $$\frac{\mathbf{D}(f, g)}{\mathbf{D}(x_1, x_2)} \neq 0.$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость условий. Предположим, что система тождеств (3) существует и удовлетворяет условиям (4), (5).

Продифференцируем второе тождество (3):

(11) $$\frac{\partial B_{5,6}}{\partial f} f'_{x_i} + \frac{\partial B_{5,6}}{\partial g} g'_{x_i} \equiv 0, \quad , = 3,4,$$

или

(12) $$\frac{g'_{x_i}}{f'_{x_i}} \equiv - \frac{\partial B_{5,6}}{\partial f} : \frac{\partial B_{5,6}}{\partial g}.$$

Обозначив правую часть (12) через $Q(f, g)$, находим условие (6). Продифференцируем первое тождество (3):

(13) $$\frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} f'_{x_i} + \frac{\partial A_{5,6}}{\partial g} g'_{x_i} \equiv \frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_i}, \quad i = 3, 4,$$

или

(14) $$\left[\frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial A_{5,6}}{\partial g}\right] f'_{x_i} \equiv \frac{\partial A_{1,i}}{\partial x}, \quad i = 3,4$$

откуда

(15) $$\frac{f'_{x_3}}{f'_{x_4}} \equiv \frac{\partial A_{1,3}}{\partial x_3} : \frac{\partial A_{1,4}}{\partial x_4}.$$

Обозначив правую часть (15) через $T(x_1, x_3, x_4)$, находим условие (7). Прологарифмировав (15) и взяв производную по x_3, получим

(16) $$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lg \frac{f'_{x_3}}{f'_{x_4}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lg \frac{\partial A_{1,3}}{\partial x_3}\right).$$

Обозначив правую часть (16) через $P(x_1, x_3)$, находим условие (8), и из (16) получим:

(17) $$\frac{\partial A_{1,3}}{\partial x_3} = \varphi(x_1) \;\; \varphi(x_1) e^{\int P(x_1, x_3)\, dx_3},$$

где $\varphi(x_1)$-произвольная функция.

Для $i = 3$ из (14) и (17) находим:

$$(18) \qquad \frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial A_{5,6}}{\partial g} = \varphi(x_1)\, e^{\int P(x_1, x_3)\, dx_3} : f'_{x_3}.$$

Так как левая часть тождества (18) зависит только от f и g, то и правая часть (18) зависит только от f и g. Обозначив правую часть тождества (18) $R(f, g)$, получим условие (9).

Легко проверить, что услвоие (10) следует из неравенств (4), (5).

Докажем теперь достаточность условий.

Предположим, что для f и g выполнены условия (6)—(10). Покажем, что функции $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ существуют и удовлетворяют системе (3) и условиям (4), (5).

Потому что f и g даны, из (6) определим $Q(f, g)$, из (7), (9), (17) $R(f, g)$ и составим дифференциальное уравнение с частными производными

$$(19) \qquad \frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial A_{5,6}}{\partial g} = R(f, g).$$

Пусть уравнение (19) имеет решение

$$(20) \qquad A_{5,6}(f, g) = A(f, g) + F[B(f, g)],$$

где $A(f, g)$-частное решение уравнения (19), $F[B(f, g)]$ — общее решение, соответствующее однородному уравнению (19).

Если принять во внимание условие (9) для решения (20), можно (19) записать в виде (18). Из условий (7), (8) и (17) находим:

$$(21) \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A_{1,3}}{\partial x_3}\cdot\frac{1}{T}\right) = 0,$$

откуда

$$(22) \qquad \frac{\partial A_{1,3}}{\partial x_3} = T\frac{\partial A_{1,4}}{\partial x_4}.$$

Подставив в (18) значение $\partial A_{1,3}/\partial x_3$ из (22), получим:

$$(23) \qquad \frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial A_{5,6}}{\partial g} \equiv \frac{\partial A_{1,4}}{\partial x_4}\cdot\frac{1}{f'_{x_4}}.$$

Легко проверить, что (18) и (23) можно записать в виде:

$$(24) \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}[A_{5,6}(f, g)] \equiv \frac{\partial A_{1,3}}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4}[A_{5,6}(f, g)] \equiv \frac{\partial A_{1,4}}{\partial x_4}. \tag{25}$$

Интегрируя уравнение (24) по x_3, получим

$$A_{5,6} \equiv A_{1,3} + S(x_1, x_2, x_4), \tag{26}$$

продифференцируем (26) по x_4:

$$\frac{\partial A_{5,6}}{\partial x_4} \equiv \frac{\partial S}{\partial x_4} \tag{27}$$

Из (25) и (27) находим:

$$S(x_1, x_2, x_4) \equiv A_{1,2} + A_{1,4}. \tag{28}$$

Тогда

$$A_{5,6} \equiv A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4},$$

что и является первым тождеством системы (3).

Пусть уравнение

$$\frac{\partial B_{5,6}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial B_{5,6}}{\partial g} = 0 \tag{29}$$

имеет общее решение

$$B_{5,6} = F_1[B(f, g)]. \tag{30}$$

С помощью условия (6) для решения (30) уравнение (29) запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[B_{5,6}(f, g)] \equiv 0; \quad i = 3,4,$$

следовательно,

$$B_{5,6}(f, g) \equiv B_{1,2},$$

что и является вторым тождеством системы (3).

Из условия (10) вытекает, что полученная система удовлетворяет условиям (4) и (5). Теорема доказана.

Из теоремы следует метод определения неизвестных функций $A_{i,k}$, $B_{i,k}$. Из условий (6), (9) наидем R, Q и составим уравнение:

$$\frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial A_{5,6}}{\partial g} = R(f, g). \tag{31}$$

Решение уравнения (31) дает функцию

(32) $$A_{5,6}(f, g) = A(f, g) + F[B(f, g)].$$

Общее решение однородного уравнения, соотвествующего (31),

(33) $$\frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} + Q(f, g)\frac{\partial A_{5,6}}{\partial g} = 0$$

дакт функцию

(34) $$B_{5,6}(f, g) = F_1[B(f, g)].$$

В функции $A_{5,6}(f, g)$ и $B_{5,6}(f, g)$ вместо f и g подставим данные функции и получим:

$$A_{5,6}(x_5, x_6) = A(f, g) + F[B(f, g)],$$
$$B_{5,6}(x_5, x_6) = F_1[B(f, g)].$$

Из доказанной теоремы следует, что правые части полученных равенств должны допускать преобразование к виду (3).

Пример. Чтобы проиллюстрировать изложенный метод, расмотрим систему уравнений

$$x_5 = \sin(x_1^2 - x_2 + x_3^2 + x_1 \,.\, x_4^2),$$
$$x_6 = \sqrt{(x_1 - x_3^2 - x_1 \,.\, x_4^2)}.$$

Легко проверить, что условия теоремы выполнены, причем

$$Q(f, g) = -1 : 2g\sqrt{(1 - f^2)},$$
$$R(f, g) = 1 : \sqrt{(1 - f^2)}.$$

Зная функции Q и R, составим дифференциальное уравнение

(35) $$2g\sqrt{(1 - f^2)}\frac{\partial A_{5,6}}{\partial f} - \frac{\partial A_{5,6}}{\partial g} = 2g,$$

откуда

$$A_{5,6}(f, g) = \arc\sin f.$$

Из однородного уравнения, соответствующего уравнению (35), получим функцию

$$B_{5,6}(f, g) = \arc\sin f + g^2.$$

В функции $A_{5,6}(f, g)$ и $B_{5,6}(f, g)$ вместо f и g подстваим данные функции

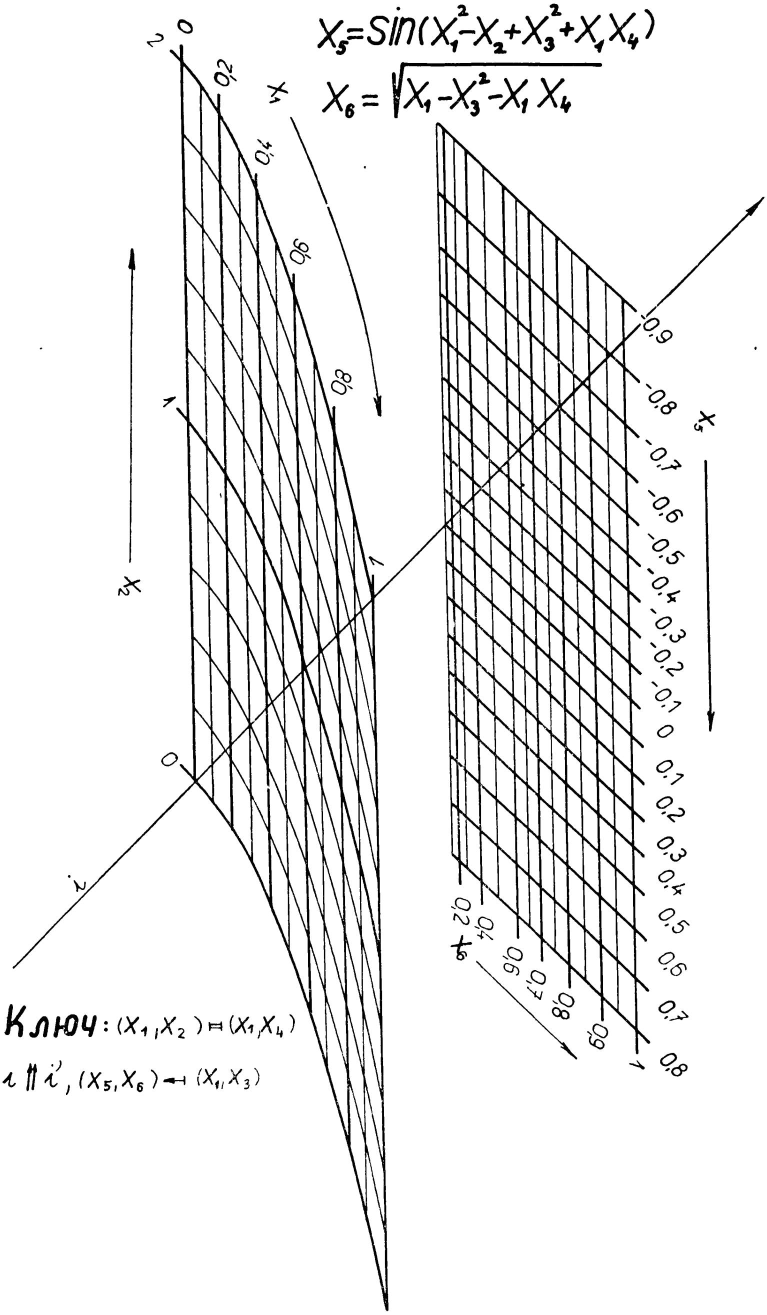


Рис. 2а — неподвижная плоскость.

и получим

$$\arcsin x_5 = x_1^2 - x_2 + x_3^2 + x_1 \,.\, x_4^2,$$

$$\arcsin x_5 + x_6^2 = x_1^2 - x_2 + x_1,$$

откуда получим уравнения элементов номограммы:
неподвижная плоскость

$$\xi_1 = 5 \arcsin x_5, \qquad \eta_1 = 5(\arcsin x_5 + x_6^2),$$

$$\xi_2 = 7 + 5(x_1^2 - x_2), \qquad \eta_2 = 5(x_1^2 - x_2 + x_1),$$

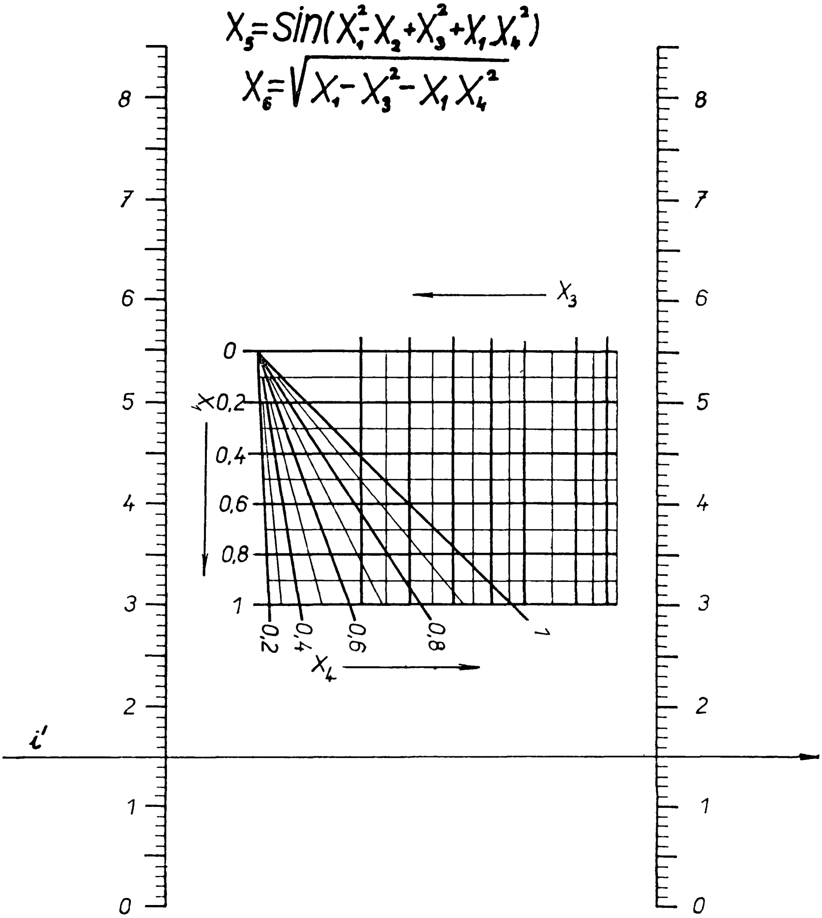


Рис. 2б — транспарант.

транспарант

$$\xi_1' = 5x_3^2, \qquad \eta_2' = 5x_1,$$

$$\xi_2' = 7 - 5x_1 \,.\, x_4^2, \qquad \eta_2' = 5x_1.$$

Номограмма приведена на рис. 2а, б.

II. Пусть теперь нам нужно привести систему четырех уравнений с девятью переменными

$$
\begin{aligned}
x_5 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_9),\\
x_6 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_9),\\
x_7 &= h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_9),\\
x_8 &= l(x_1, x_2, x_3, x_4, x_9),
\end{aligned}
\tag{36}
$$

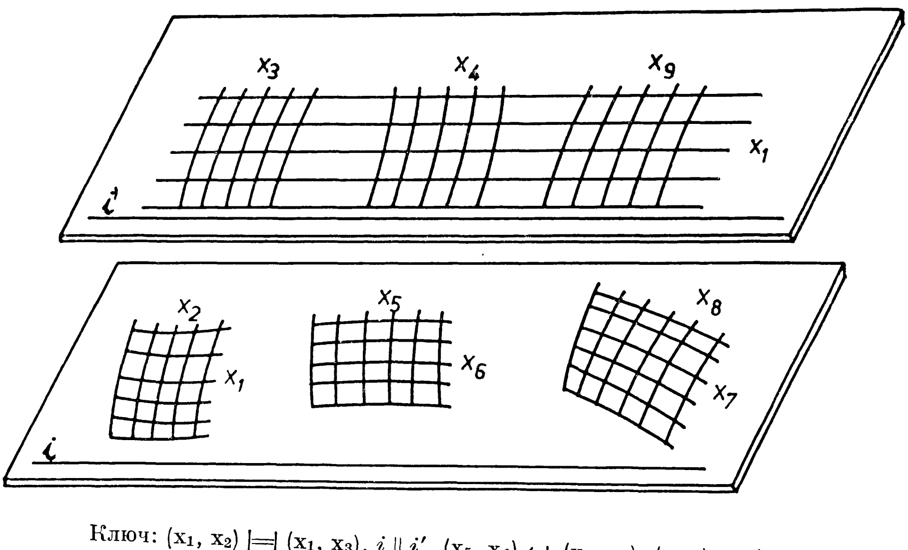
к виду

$$
\begin{aligned}
A_{1,2} + A_{1,3} = A_{5,6} - A_{1,4} = A_{7,8} - A_{1,9},\\
B_{1,2} = B_{5,6} = B_{7,8},
\end{aligned}
\tag{37}
$$

которую можно представить номограммой с прозрачным ориентированным транспарантом [3], схема которого приведена на рисунке 3.

Пусть функции f, g, h, l — достаточно гладкие в параллелепипеде $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}$

$$f'_{x_i} \neq 0,\ g'_{x_i} \neq 0,\ h'_{x_k} \neq 0,\ l'_{x_k} \neq 0; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4, 9.$$



Ключ: $(x_1, x_2) \mid\!=\!\mid (x_1, x_3)$, $i \parallel i'$, $(x_5, x_6) \leftarrow\!\dashv (x_1, x_4)$, $(x_{7,8}) \leftarrow\!\dashv (x_1, x_9)$.

Рис. 3.

Требуем найти такую систему уравнений (37), чтобы в области изменения переменных x_i была справедлива система тождеств:

$$(38)\qquad A_{5,6}(f,\, g) \equiv A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4} - A_{7,8}(h,\, l) - A_{1,9} + A_{1,4}$$

$$B_{5,6}(f,\, g) \equiv B_{1,2} \equiv B_{7,8}(h,\, l),$$

удовлетворящая условиям

$$(39)\qquad \frac{\mathbf{D}(A_{i,i+1},\, B_{i,i+1})}{\mathbf{D}(x_i,\, x_{i+1})} \neq 0,\ i = 1,\, 5,\, 7,$$

причем $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ в некоторой области достаточно гладкие. Из общей системы уравнений (37) можно выделить подсистему

$$A_{1,2} + A_{1,3} = A_{5,6} - A_{1,4},$$

$$B_{1,2} = B_{5,6},$$

или

$$(40)\qquad A_{5,6} = A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4},$$

$$B_{5,6} = B_{1,2}.$$

Условия существования системы уравнений (40) вытекают из теоремы 1. Если эти условия выполнены, то можем определить функции $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, $A_{5,6}$, $B_{1,2}$, $B_{5,6}$.

Систему уранений (37) можно привести к виду

$$(41)\qquad A_{7,8} = u + A_{1,9},$$

$$B_{7,8} = v,$$

где u, v определены посредством равенств

$$(42)\qquad u - A_{1,2} + A_{1,3},$$

$$v = B_{1,2}.$$

Легко проверить, что u и v независимы.

Пусть даны функции:

$$(43)\qquad x_7 - h(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_9),$$

$$x_8 \quad l(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_9).$$

Решим сопрос, когда существует система уравнений (41), решением которой служит (43), причем h, l независимы.

Независимость h, l вытекает из (39) и независимости u, v.

Теорема 2. *Для того чтобы существовала система тождеств:*

$$A_{7,8}(h, l) \equiv u(x_1, x_2, x_3) + A_{1,9}, \tag{44}$$

$$B_{7,8}(h, l) = v(x_1, x_2),$$

удовлетворящая условиям (39), *необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$l'_{x_i} : h'_{x_i} = S(h, l),\ i = 3, 4, 9, \tag{45}$$

$$z : h'_{x_9} = K(h, l), \tag{46}$$

$$Z(x_1, x_9) = (h'_{x_9} : h'_{x_3}) u'_{x_3}, \tag{47}$$

$$\frac{f'_{x_2} g'_{x_3} - f'_{x_3} g'_{x_2}}{h'_{x_2} l'_{x_3} - h'_{x_3} l'_{x_2}} = \frac{f'_{x_1} g'_{x_3} - f'_{x_3} g'_{x_1}}{h'_{x_1} l'_{x_3} - h'_{x_3} l'_{x_1}} = \frac{f'_{x_1} g'_{x_2} - f'_{x_2} g'_{x_1}}{h'_{x_1} l'_{x_2} - h'_{x_2} l'_{x_1}}. \tag{48}$$

Доказательство. Докажем необходимость условий.

Пусть существует система (44), удовлетворящая условиям (39). Продифференцируем (44):

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial h} h'_{x_i} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial l} l'_{x_i} \equiv u'_{x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{49}$$

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial h} h'_{x_9} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial l} l'_{x_9} \equiv \frac{\partial A_{1,9}}{\partial x_9}, \tag{50}$$

$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial h} h'_{x_k} + \frac{\partial B_{7,8}}{\partial l} l'_{x_k} \equiv v'_{x_k}, \quad \kappa = 1,2, \tag{51}$$

$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial h} h'_{x_k} + \frac{\partial B_{7,8}}{\partial l} l'_{x_k} \equiv 0, \quad \kappa = 3, 4, 9. \tag{52}$$

Из (52) получим:

$$l'_{x_k} : h'_{x_k} \equiv -\frac{\partial B_{7,8}}{\partial h} : \frac{\partial B_{7,8}}{\partial l}. \tag{53}$$

Обозначив правую часть (53) через $S(h. l)$, находим условие (45).

Для $i = 3$ из (45) и (49) получим:

$$\left[\frac{\partial A_{7,8}}{\partial h} + S(h, l) \frac{\partial A_{7,8}}{\partial l}\right] h'_{x_3} \equiv u'_{x_3}. \tag{54}$$

Аналогично из (50) найдем

(55) $$\left[\frac{\partial A_{7,8}}{\partial h} + S(h, l)\,\frac{\partial A_{7,8}}{\partial l}\right] h'_{x_9} \equiv \frac{\partial A_{1,9}}{\partial x_9}.$$

Из (54) и (55) получим

$$(h'_{x_9} : h'_{x_3})u'_{x_3} = \frac{\partial A_{1,9}}{\partial x_9}.$$

Обозначив павую часть полученного соотношения через $Z(x_1, x_9)$, находим условие (47).

Тождество (55) запишем в виде

(56) $$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial h} + S(h, l)\,\frac{\partial A_{7,8}}{\partial l} \equiv z : h'_{x_9}.$$

Из (56) следует, что правая часть тождества зависит только от h и l; обозначив ее через $K(h, l)$, находим условие (46).

Из (49) получим

(57) $$(h'_{x_2}l'_{x_3} - h'_{x_3}l'_{x_2})u'_{x_1} - (h'_{x_1}l'_{x_3} - h'_{x_3}l'_{x_1})u'_{x_2} + (h'_{x_1}l'_{x_2} - h'_{x_2}l'_{x_1})u'_{x_3} \equiv 0.$$

По предположению условия существования системы (40) выполнены, следовательно, условие (57) должно выполняться также и для функции f и g:

(58) $$(f'_{x_2}g'_{x_3} - f'_{x_3}g'_{x_2})u'_{x_1} - (f'_{x_1}g'_{x_3} - f'_{x_3}g'_{x_1})u'_{x_2} + (f'_{x_1}g'_{x_2} - f'_{x_2}g'_{x_1})u'_{x_3} \equiv 0.$$

Условие совместности системы (57), (58) относительно u имеет вид (48).

Докажем теперь достаточность условий.

Пусть выполнены условия (45)—(48). Покажем, что система (44) существует и удовлетворяет условиям (39).

Из (45) определим $S(h, l)$, а из (46), (47) $K(h, l)$.

Составим уравнение

(59) $$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial h} + S(h, l)\,\frac{\partial A_{7,8}}{\partial l} = K(h, l),$$

котрое пусть имеет решение

(60) $$A_{7,8}(h, l) = C(h, l) + M[N(h, l)],$$

где $C(h, l)$ частное решение уравнения (59), $M[N(h, l)]$ — общее решение, соответствующее однородному уравнению (59).

Если принять во внимание условия (45), (46) для решения (60), можно (59) записать в виде

$$(61) \qquad \frac{\partial}{\partial x_9}[A_{7,8}(h, l)] \equiv \frac{\partial A_{1,9}}{\partial x_9}.$$

Подобно, если уравнение

$$(62) \qquad \frac{\partial B_{7,9}}{\partial h} + S(h, l)\frac{\partial B_{7,8}}{\partial l} = 0$$

имеет общее решение

$$(63) \qquad B_{7,8}(h, l) = M_1[N(h, l)],$$

то

$$(64) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}[B_{7,8}(h, l)] \equiv 0,\ i = 3, 4, 9.$$

Интегрируя (61) по x_9, получаем

$$(65) \qquad A_{7,8} \equiv m(x_1, x_2, x_3) + A_{1,9}.$$

Из (64) получим

$$(66) \qquad B_{7,8} \equiv n(x_1, x_2).$$

Используя условия (47), получим

$$u = m, \quad v = n.$$

Подставив в тождество (65) и (66) эти значения n и m, получим систему тождеств (44). Теорема доказана.

Из теоремы 2, аналогично, как для системы (3), вытекает метод определения неизвестных функций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боголюбов Ю. С., *О представимости системы двух уравнений с шестью переменными в виде, допускающем построение номограммы с ориентированным транспарантом в виде линейки*, Номограф. сб. № 3, ВЦ АН СССР, 1965, 150—157.

[2] Боголюбов Ю. С., *О представимости системы четырех уравнений с девятью переменными в виде, допускающем построение номограммы с ориентированным транспарантом*, Номограф. сб. № 3, ВЦ АН СССР, 1965, 158—166.

[3] Хованский Г. С., *Исследование возможностей преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом*, Вычисл. мат. сб. 7, АН СССР, 1961, 133—150.

[4] Pleskot V., *Nomografie*, SNTL, Praha 1963.

Поступило 21. 5. 1966.

Katedra matematiky Strojníckej fakulty
Vysokej školy technickej,
Košice