Matematicko-fyzikálny časopis

Milan Petráš

# Singularity Jostových funkcií a potenciály prípad P-vĺn a D-vĺn

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 12 (1962), No. 2, 136--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126810

**Terms of use:**

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1962

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

# SINGULARITY JOSTOVÝCH FUNKCIÍ A POTENCIÁLY PRÍPAD P-VĹN A D-VĹN

MILAN PETRÁŠ, Bratislava

## Úvod

Pri vyšetrovaní analytických vlastností amplitúdy rozptylu v potenciálovom poli sa obvykle najprv zvolí istá trieda potenciálov a potom sa skúma príslušná analytická štruktúra amplitúdy rozptylu.* Je však možné postupovať aj obrátene, t. j. vopred postulovať isté analytické vlastnosti a dodatočne skúmať potenciály, ktoré im prislúchajú. Tento postup sa zvolil v práci [1], v ktorej sú vyšetrované potenciály, prislúchajúce daným singularitám Jostových funkcií, pre prípad $S$-vlny. Tam bolo ukázané, že problém sa redukuje na riešenie systému $N$ nehomogénnych lineárnych rovníc v tom prípade, keď Jostova funkcia má $N$ pólov na kladnej časti imaginárnej osi a na riešenie lineárnej nehomogénnej integrálnej rovnice vtedy, keď táto funkcia sa vyznačuje nespojitosťou pozdĺž rezu, idúceho po kladnej časti imaginárnej osi v komplexnej rovine impulzu $k$. Riešenie týchto rovníc vedie nielen na hľadaný potenciál, ale aj na príslušné vlnové funkcie.

V tomto článku sa metóda práce [1] zobecňuje aj na $P$-vlny a $D$-vlny. Zobecnenie spočíva v rozšírení Jostovej funkcie o členy, ktoré odpovedajú pólom prvého a druhého rádu v bode $k = 0$. Určenie potenciálu sa potom prevádza na riešenie istých lineárnych nehomogénnych problémov, podobne ako v [1]. Ku každému potenciálu sa automaticky dostáva aj riešenie príslušnej Schrödingerovej rovnice. V závere sa odvodzujú rovnice, ktoré predstavujú $P$-vlnové a $D$-vlnové analogóny Martinovho tvaru [3] Noyesovej – Wongovej rovnice [4]. Pozoruhodnou vlastnosťou je ich homogénnosť, ktorú nenachádzame u rovnice Martinovej a Noyesovej – Wongovej.

## $N$-pólová Jostova funkcia

Odvodenie rovníc pre $N$-pólovú Jostovu funkciu v prípade vyšších momentov hybnosti je podobné postupu, ktorý bol v [1] užitý pre $l = 0$. Ako východisko slúži rovnica pre funkciu $g(k, r)$

$$g''(k, r) - 2ikg'(k, r) = u(r)\, g(k, r) \tag{1}$$

s okrajovou podmienkou

$$\lim_{r \to \infty} g(k, r) = 1. \tag{2}$$

* Napr. [2], kde sa uvažujú superpozície Yukawových potenciálov.

Funkcia $g(k, r)$ súvisí s Jostovou funkciou $f(k, r)$ jednoduchým vzťahom

$$g(k, r) = f(k, r)\,\mathrm{e}^{ikr}.$$

So zreteľom na požadované analytické vlastnosti Jostovej funkcie v komplexnej rovine impulzu $k$ a vzhľadom na tvar tejto funkcie pre voľnú časticu* možno predpokladať, že $g(k, r)$ je nasledujúceho tvaru

$$g(k, r) = 1 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{2ik + \kappa_j} + \frac{\alpha_0(r)}{ik} + \frac{\beta(r)}{(ik)^2}. \tag{3}$$

Funkcie $\alpha_j$, $\alpha_0$, $\beta$ musia pre $r \to \infty$ vymiznúť, aby bola splnená okrajová podmienka (2). Z vyjadrenia (3) vidno, že príslušná Jostova funkcia bude mať $N$ pólov v bodoch $k_j = i/2\,\kappa_j$, $(\kappa_j > 0)$ a tiež pól v bode $k = 0$, na prítomnosť ktorého usudzujeme, vychádzajúc z vyjadrenia Jostovej funkcie pre voľnú časticu. Ako uvidíme ďalej, $\beta \neq 0$ odpovedá momentu hybnosti $l = 2$ a $\beta = 0$ odpovedá $l = 1$.

Po dosadení (3) do (1) dostaneme systém rovníc pre funkcie $\alpha_j$, $\alpha_0$, $\beta$ a pre potenciál $u$

$$\alpha_j'' + \kappa_j\alpha_j' + 2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\right)\alpha_j = 0, \tag{4}$$

$$\alpha_0'' - 2\beta' + 2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\right)\alpha_0 = 0, \tag{5}$$

$$\beta'' + 2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\right)\beta = 0, \tag{6}$$

$$u = -2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\right). \tag{7}$$

V dodatku je ukázané, že riešenie týchto rovníc sa dá previesť na riešenie systému $N$ lineárnych nehomogénnych rovníc. Pritom treba rozlišovať prípad, keď $\beta = 0$, a prípad, keď $\beta \neq 0$. V prvom prípade príslušný lineárny nehomogénny systém znie

$$\alpha_j^{(1)}(r) = \kappa_j c_j^{(1)}\mathrm{e}^{-\kappa_j r}\left[1 + \frac{2}{\kappa_j(r + r_1)} + 2\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{2}{\kappa_j\kappa_i(r + r_1)}\right)\alpha_i^{(1)}(r)\right], \tag{8}$$

pričom $c_j^{(1)}$ a $r_1$ sú integračné konštanty. Pre funkciu $\alpha_0^{(1)}(r)$ pritom platí

$$\alpha_0^{(1)}(r) = \frac{1}{r + r_1}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i^{(1)}(r)}{\kappa_i}\right). \tag{9}$$

* Jostova funkcia, prislúchajúca voľnej častici, má pre $l = 1$ a $l = 2$ tento tvar:

$$f_1^{(0)}(k, r) = \mathrm{e}^{-ikr}\left(1 + \frac{1}{ikr}\right),$$

$$f_2^{(0)}(k, r) = \mathrm{e}^{-ikr}\left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{3}{(ikr)^2}\right).$$

V druhom prípade tento systém má tvar

$$\chi_j^{(2)}(r) = \kappa_j c_j^{(2)} e^{-\kappa_j r}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\chi_i^{(2)}(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{3(r + r_2)^2}{(r + r_2)^3 + 3s}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{2}{\kappa_j} + \frac{4}{\kappa_j^2(r + r_2)}\right)\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\chi_i^{(2)}(r)}{\kappa_i} + \frac{4}{r + r_2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\chi_i^{(2)}(r)}{\kappa_i^2}\right)\right] \tag{10}$$

s integračnými konštantami $c_j^{(2)}$, $s$, $r_2$. Funkcie $\chi_0^{(2)}$ a $\beta$ sú určené vzťahmi

$$\chi_0^{(2)}(r) = \frac{3(r + r_2)^2}{(r + r_2)^3 + 3s}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\chi_i^{(2)}(r)}{\kappa_i} + \frac{4}{r + r_2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\chi_i^{(2)}(r)}{\kappa_i^2}\right). \tag{11}$$

$$\beta(r) = \frac{\chi_0(r)}{r + r_2}. \tag{12}$$

Potenciál $u(r)$ sa pri známych funkciách $\chi_i$ a $\chi_0$ určí v obidvoch prípadoch z rovnice (7).

Asymptotický tvar funkcií $\chi_j^{(1)}$ a $\chi_0^{(1)}$, ako vyplýva z rovníc (8) a (9), je

$$\left.\begin{aligned} \chi_j^{(1)}(r) &= \kappa_j c_j^{(1)} e^{-\kappa_j r}, \\ \chi_0^{(1)}(r) &= \frac{1}{r + r_1}, \end{aligned}\quad r \to \infty \right| \tag{13}$$

Tomu prislúcha potenciál tvaru

$$u^{(1)}(r) = \frac{1 \cdot 2}{(r + r_1)^2} + 2\sum_{j=1}^{N}\kappa_j^2 c_j^{(1)} e^{-\kappa_j r}. \tag{14}$$

Podobne z rovníc (10) a (11) plynie

$$\left.\begin{aligned} \chi_j^{(2)}(r) &= \kappa_j c_j^{(2)} e^{-\kappa_j r}, \\ \chi_0^{(2)}(r) &= \frac{3(r + r_2)^2}{(r + r_2)^3 + 3s}, \qquad r \to \infty, \\ u^{(2)}(r) &= 2 \cdot 3\,\frac{(r + r_2)[(r + r_2)^3 - 6s]}{[(r + r_2)^3 + 3s]^2} + 2\sum_{j=1}^{N}\kappa_j^2 c_j^{(2)} e^{-\kappa_j r}. \end{aligned}\right| \tag{15}$$

Vidíme, že pre veľké $r$ potenciál v obidvoch prípadoch obsahuje vedľa superpozície exponenciálnych potenciálov i potenciály síl s ďalekým (nekonečným) dosahom. Pre $r \to \infty$ prechádzajú tieto potenciály na potenciály odstredivých síl, príslušných momentu hybnosti $l = 1$, resp. $l = 2$. Na krátkych vzdialenostiach sa však tento $P$-vlnový a $D$-vlnový charakter potenciálu stráca a v počiatku sú riešenia rovníc (8) a (10), a teda i príslušný potenciál regulárne. Aby sme i v počiatku dostali správnu asymptotiku potenciálu, musíme požadovať nasledovný asymptotický tvar funkcií pre $r \to 0$

$$\chi_j^{(1)} = \frac{a_j^{(1)}}{r}, \qquad \chi_0^{(1)} = \frac{a_0^{(1)}}{r}, \qquad r \to 0, \tag{16}$$

$$\alpha_j^{(2)} = \frac{a_j^{(2)}}{r^2} + \frac{b_j}{r}, \qquad \alpha_0^{(2)} = \frac{a_0^{(2)}}{r^2} + \frac{b_0}{r}, \qquad r \to 0 \tag{17}$$

(kde $a_j$, $a_0$, $b_j$, $b_0$ sú isté konštanty).

Toho je možno dosiahnuť vhodnou voľbou integračných konštánt $r_1$, $r_2$ a $s$. Ak píšeme riešenie rovníc (8) ako podiel dvoch determinantov

$$\alpha_j^{(1)}(r) = \frac{A_j^{(1)}(r)}{D^{(1)}(r)}, \tag{18}$$

potom, aby boli splnené asymptotické vzťahy (16), musí zrejme pre determinant sústavy (8) platiť podmienka

$$D^{(1)}(0) = 0. \tag{19}$$

Tento vzťah predstavuje podmienku pre konštantu $r_1$. Podobne pre determinant sústavy (10) musí platiť

$$D^{(2)}(0) = 0, \tag{20a}$$

$$D^{(2)\prime}(0) = 0, \tag{20b}$$

čo sú dve podmienky pre dve konštanty $r_2$ a $s$.

Zostáva ešte presvedčiť sa, či potenciál $u(r)$ má v počiatku správne chovanie. Za tým účelom dosadíme výrazy (16) do rovníc (4)–(6) (pri $\beta = 0$). Dostaneme podmienku

$$a_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{N} a_i^{(1)} = 1, \tag{21}$$

z ktorej plynie

$$u^{(1)}(r) = \frac{1\,.\,2}{r^2}, \qquad r \to 0.$$

Podobne dosadením výrazov (17) do (4)–(6) dostaneme podmienky

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{N} a_i^{(2)} &= 0, \\ b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i &= 3, \end{aligned}\right| \tag{22}$$

v dôsledku ktorých

$$u^{(2)}(r) = \frac{2\,.\,3}{r^2}, \qquad r \to 0.$$

Tým sme dokázali, že pri splnení podmienok (19) a (20) nájdené potenciály majú správne asymptotické vlastnosti pre malé i veľké $r$.

Na ilustráciu uvedieme potenciál, ktorý prislúcha jednopólovej Jostovej funkcii a $l = 1$

$$u(r) = -2[\alpha'(r) + \alpha'(r)].$$

kde

$$\alpha(r) + \alpha_0(r) = \frac{1}{r + r_1} + \frac{\kappa c\, e^{-\kappa r}\left(1 + \dfrac{2}{\kappa(r + r_1)}\right)^2}{1 - \left(1 + \dfrac{4}{\kappa(r + r_1)}\right) c\, e^{-\kappa r}} .$$

## Matica S

Prvky matice $S$, prislúchajúce jednotlivým parciálnym vlnám, súvisia s Jostovými funkciami vzťahom [5]

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{f_l(k)}{f_l(-k)} . \tag{23}$$

kde

$$f_l(k) = \lim_{r \to 0} r^l f_l(k, r), \qquad l = 1, 2.$$

Ak zavedieme konštanty

$$a_j^{(l)} = \lim_{r \to 0} r^l \alpha_j^{(l)}(r),$$

môžeme funkcie $f_l(k)$ písať v tvare

$$f_1(k) = 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(1)}}{2ik + \kappa_j} + \frac{2}{ikr_1} \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(1)}}{\kappa_j} . \tag{24}$$

$$f_2(k) = 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(2)}}{2ik + \kappa_j} + \frac{1}{ik}\left(1 + \frac{1}{ikr_2}\right) . \frac{3r_2^2}{r_2^3 + 3s} \times$$

$$\times \left(2 \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(2)}}{\kappa_j} + \frac{4}{r_2} \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(2)}}{\kappa_j^2}\right) . \tag{25}$$

Ukážeme, že pre určenie konštánt $a_j^{(l)}$ nie je potrebné poznať vopred funkcie $\alpha_j^{(l)}(r)$. Skutočne, vychádzajúc z rovnice (18) možno písať

$$a_j^{(l)} = \frac{A_j^{(l)}(0)}{d^{(l)}} ,$$

kde $d^{(l)}$ je istá konštanta. Použitím známych viet z teórie determinantov ľahko odvodíme pre $a_j^{(l)}$ tento systém homogénnych lineárnych rovníc

$$a_j^{(1)} = \kappa_j c_j^{(1)} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{2}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{4}{\kappa_j \kappa_i r_1}\right) a_i^{(1)} , \tag{26}$$

$$a_j^{(2)} = \kappa_j c_j^{(2)} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{2}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{3r_2^2}{r_2^3 + 3s}\left(\frac{2}{\kappa_j} + \frac{4}{\kappa_j^2 r_2}\right) . \left(\frac{2}{\kappa_i} + \frac{4}{\kappa_i^2 r_2}\right)\right] a_i^{(2)} . \tag{27}$$

Rovnice (19) a (20a) predstavujú teraz podmienky riešiteľnosti rovníc (26) a (27). Rovnica (20b) musí byť pripojená k (27) ako dodatočná podmienka, určujúca prípustné hodnoty $r_2$ a $s$.

Rovnicami (26) a (27) sú konštanty $a_j^{(l)}$ určené až na multiplikatívny faktor. Pohľad na rovnice (23)–(25) však ukazuje, že tento faktor sa vo vyjadrení $S_l(k)$ vykráti.

Poznamenajme ešte, že integračné konštanty $c_j^{(l)}$ súvisia s rezíduami funkcie $S_l(k)$ v póloch $i/2\,\kappa_j$. Príslušný vzťah plynie z (23)–(27)

$$-i\kappa_j c_j^{(l)} = \operatorname{Rez} S_l(k)/k = \frac{i}{2}\kappa_j\,. \tag{28}$$

Ak teda poznáme rezíduá funkcie $S_l(k)$ (a samozrejme i $\kappa_j$), môžeme pomocou (26) a (27) určiť konštanty $a_j^{(l)}$, a teda i $S_l(k)$.

Výsledky, odvodené pre $N$ pólovú Jostovu funkciu, možno zobecniť aj na singularity typu nespojitosti pozdĺž rezu, idúceho po imaginárnej osi od $\mu/2$ do $\infty$. Pre funkciu $g(k, r)$ v takomto prípade píšeme

$$g(k, r) = 1 + 2\int_{\mu}^{\infty} \frac{\alpha(\kappa, r)}{2ik + \kappa}\,d\kappa + \frac{\alpha_0(r)}{ik} + \frac{\beta(r)}{(ik)^2}\,. \tag{29}$$

Ďalšie rovnice dostaneme nahradením súm v uvedených vzťahoch príslušnými integrálmi (za predpokladu, že tieto konvergujú). Ako príklad uvedieme integrálny prepis rovníc (26) a (27)

$$a^{(1)}(\kappa) = c^{(1)}(\kappa)\int_{\mu}^{\infty}\left(\frac{2}{\kappa + \kappa'} + \frac{4}{\kappa\kappa' r_1}\right)a^{(1)}(\kappa')\,d\kappa', \tag{30}$$

$$a^{(2)}(\kappa) = c^{(2)}(\kappa)\int_{\mu}^{\infty}\left[\frac{2}{\kappa + \kappa'} + \frac{3r_2^2}{r_2^3 + 3s}\left(\frac{2}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2 r_2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{2}{\kappa'} + \frac{4}{\kappa'^2 r_2}\right)\right]a^{(2)}(\kappa')\,d\kappa'. \tag{31}$$

Funkcie $c^{(l)}(\kappa)$ súvisia s nespojitosťou $S_l(k)$ pozdĺž rezu jednoduchým vzťahom

$$\frac{1}{4\pi i}\left[S_l\left(i\frac{\kappa}{2} - \varepsilon\right) - S_l\left(i\frac{\kappa}{2} + \varepsilon\right)\right] = c^{(l)}(\kappa). \tag{32}$$

Rovnice (30) a (31) sú zobecnením Noyesovej–Wongovej rovnice (2) a (3) na $P$-vlny a $D$-vlny. Pozoruhodnou vlastnosťou týchto rovníc je homogénnosť.

## Záver

Vychádzali sme z daných analytických vlastností Jostových funkcií a hľadali sme im prislúchajúce potenciály. Táto „inverzná úloha" v teórii disperzných vzťahov vedie na rovnice, ktoré v prípade najjednoduchších singularít, pólov, môžeme exaktne riešiť. Výsledkom sú nielen hľadané lokálne potenciály, ale aj príslušné vlnové funkcie

$$\varphi_l(k, r) = \frac{f_l(k) f_l(-k, r) - f_l(-k) f_l(k, r)}{2ik}.$$

I keď sme odvodili definitívne výsledky len pre najnižšie momenty hybnosti ($l = 0, 1, 2$), dá sa očakávať, že podobným spôsobom bude možné postupovať aj pre ľubovoľné $l$. K tomu pravdepodobne stačí rozšíriť základný výraz pre Jostovu funkciu o členy, ktoré odpovedajú pólom vyšších rádov v bode $k = 0$.

## Dodatok

1. Riešenie systému rovníc (4)–(6) pre $\beta = 0$.

V tomto prípade sa uvedený systém redukuje na

$$\alpha_0'' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\,\alpha_0 = 0, \tag{D.1}$$

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\,\alpha_j = 0. \tag{D.2}$$

Násobením prvej rovnice $\alpha_j$ a druhej $\alpha_0$ a odčítaním dostaneme

$$\alpha_0 \alpha_j' = \frac{\alpha_j \alpha_0'' - \alpha_0 \alpha_j''}{\kappa_j}. \tag{D.3}$$

Po sumácii podľa $j$ môžeme získanú rovnicu použiť na úpravu rovnice (D.1)

$$\alpha_0'' + 2\alpha_0'\alpha_0 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j \alpha_0'' - \alpha_0 \alpha_j''}{\kappa_j} = 0.$$

Jej integráciou dostaneme

$$\alpha_0' + \alpha_0^2 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j \alpha_0' - \alpha_0 \alpha_j'}{\kappa_j} = 0.$$

Integračnú konštantu sme pritom položili rovnú nule s ohľadom na vymiznutie $\alpha_0$ pre $r \to \infty$. Poslednú rovnicu možno substitúciou

$$\alpha_0(r) = \frac{1}{a(r)}$$

previesť na lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorá sa dá riešiť kvadratúrou. Výsledok znie

$$\alpha_0(r) = \frac{1}{r + r_1}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{\kappa_j}\right) \tag{D.4}$$

s integračnou konštantou $r_1$.

Postup pri riešení rovníc (D.2) je analogický ako v práci [1]. Nebudeme ho preto uvádzať, ale udáme hneď výsledok

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j \, e^{-\kappa_j r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + 2\frac{\alpha_0(r)}{\kappa_j}\right); \tag{D.5}$$

$c_j$ tu predstavujú integračné konštanty. Ako vidno z (D.5), určenie $\alpha_j$ sa redukuje na riešenie systému $N$ lineárnych nehomogénnych rovníc.

2. Riešenie systému rovníc (4)–(6) pre $\beta \neq 0$.

V tomto prípade máme riešiť kompletný systém rovníc

$$\beta'' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\beta = 0, \tag{D.6}$$

$$\alpha_0'' - 2\beta' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\alpha_0 = 0, \tag{D.7}$$

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\alpha_j = 0. \tag{D.8}$$

Pokiaľ ide o rovnicu (D.6), uspokojíme sa so špeciálnym riešením tvaru

$$\beta(r) = \frac{\alpha_0(r)}{r + r_2}, \tag{D.9}$$

ktoré v nekonečne vymizne a ktoré možno overiť priamym dosadením ($r_2$ je integračná konštanta). Pre riešenie rovnice (D.7) získame najprv istý pomocný vzťah. Násobíme túto rovnicu $\alpha_j$, rovnicu (D.8) $\alpha_0$ a odčítame. Tým dostaneme

$$\alpha_j'\alpha_0 = \frac{\alpha_j\alpha_0'' - \alpha_0\alpha_j''}{\kappa_j} - 2\beta'\frac{\alpha_j}{\kappa_j}. \tag{D.10}$$

Podobným spôsobom z rovníc (D.6) a (D.8) odvodíme vzťah

$$\beta\alpha_j' = \frac{\alpha_j\beta'' - \beta\alpha_j''}{\kappa_j}. \tag{D.11}$$

Z rovníc (D.10) a (D.11) plynie

$$\alpha_j'\alpha_0 = \frac{\alpha_j\alpha_0'' - \alpha_0\alpha_j''}{\kappa_j} - 2\beta'\frac{\alpha_j}{\kappa_j} - 2\beta\frac{\alpha_j'}{\kappa_j} + 2\frac{\alpha_j\beta'' - \beta\alpha_j''}{\kappa_j^2}. \tag{D.12}$$

Posledná rovnica predstavuje hľadaný pomocný vzťah. S jeho použitím možno rovnicu (D.7) prepísať na tvar

$$\alpha_0'' - 2\beta' + 2\alpha_0'\alpha_0 + 2\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\alpha_0'' - \alpha_0\alpha_j''}{\kappa_j} + 4\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\beta'' - \beta\alpha_j''}{\kappa_j^2} -$$

$$- 4\beta'\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{\kappa_j} - 4\beta\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j'}{\kappa_j} = 0.$$

Túto rovnicu integrujeme už bez ďalších úprav

$$\alpha_0' - 2\beta + \alpha_0^2 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j\alpha_0' - \alpha_0\alpha_j'}{\kappa_j} + 4\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j\beta' - \beta\alpha_j'}{\kappa_j^2} - 4\beta\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\kappa_j} = 0.$$

Pritom sme integračnú konštantu položili opäť rovnú nule vzhľadom na vymiznutie funkcie $\alpha_0$ v nekonečne. V poslednej rovnici vyjadríme $\beta$ pomocou (D.9) a substitúciou

$$\alpha_0 = \frac{1}{a}$$

ju prevedieme na lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Riešenie takto vzniknutej rovnice vedie na nasledovné vyjadrenie $\alpha_0$:

$$\alpha_0(r) = \frac{3(r + r_2)^2}{(r + r_2)^3 + 3s}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{\kappa_j} + \frac{4}{r + r_2}\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{\kappa_j^2}\right) \tag{D.13}$$

s novou integračnou konštantou $s$.

Rovnica (D.8) sa rieši podobne ako v (1) s výsledkom

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j \mathrm{e}^{-\kappa_j r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + 2\frac{\alpha_0(r)}{\kappa_j} + 4\frac{\beta(r)}{\kappa_j^2}\right). \tag{D.14}$$

v ktorom $c_j$ sú ďalšie integračné konštanty.

## LITERATÚRA


[1] Petráš M., v tlači.

[2] Blankenbecler R., Goldberger M. L., Khuri N. N., Treiman S. B., Ann. Phys. N. Y. 10 (1960), 62.

[3] Martin A., Nuovo Cimento 19 (1961), 1257.

[4] Noyes H. P., Wong D. Y., Phys. Rev. Lett. 3 (1959), 191.

[5] Regge T., Nuovo Cimento 9 (1958), 295.



Došlo 18. 1. 1962.



*Katedra teoretickej fyziky*
*Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského*
*v Bratislave*


## ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИЙ ЙОСТА И ПОТЕНЦИАЛЫ СЛУЧАЙ P-ВОЛН и D-ВОЛН


Милан Петраш


Резюме


Метод работы [1] для определения потенциала из данных особенностей функции Йоста обобщается на $p$-волны и $d$-волны. Подобно как в [1] проблема сводится в случае $N$ полюсов к решению системы $N$ линейных неоднородных уравнений и в случае разрыва вдоль разреза к решению линейного интергрального уравнения. Дано $p$-волновое и $d$-волновое обобщение Мартеновой формы уравнения Ноиеса и Вонга.