Vladimír Hajko

Diskontinuity na charakteristikách a rezonančných krivkách oscilačných okruhov s cievkou so železným jadrom

Matematicko-fyzikálny sborník, Vol. 1 (1951), No. 1, 31–44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126800

VLADIMÍR HAJKO

DISKONTINUITY NA CHARAKTERISTIKÁCH A REZONANČNYCH KRIVKÁCH OSCILAČNÝCH OKRUHOV S CIEVKOU SO ŽELEZNYM JADROM

Riešenie problému tzv. pseudoharmonických oscilácií, ktoré vznikajú v oscilačných okruhoch s cievkou so železným jadrom, pri zachovaní úplnej obecnosti problému, dosiaľ nie je vykonané. Jestvuje však viac riešení približných, a to alebo početných[1] alebo grafických[2], ktoré sú v dosť dobrej shode s experimentom. Tento príspevok chceme podať ako doplnok Schunckovej a Zenneckovej metódy[3] riešenia uvedeného problému. Podávame súčasne aj vysvetlenie vzniku diskontinuít na charakteristikách a rezonančných krivkách takýchto okruhov.

I.

Schunckova a Zenneckova metóda riešenia problému pseudoharmonických oscilácií, ktorej dosť dobrú shodu s experimentom potvrdili Casper, Hubmann a Zenneck[4], vyzerá takto:

Majme oscilačný okruh (obr. 1), pozostávajúci z ohmického odporu R, kapacity C a cievky so železným jadrom, ktorému je vnútená striedavá elektromotorická síla

$$e = E \sin (\omega t + \varphi).$$

Rovnica tohto okruhu je

$$i R + \frac{1}{C}\int i \, dt + z \frac{d\Phi}{dt} = e, \tag{1}$$

---

[1] Martienssen, *Physikalische Zeitschrift* 11, 448—460, 1910.

Schunck a Zenneck, *Jahrb. der drahtlos. Telegr. u. Teleph.* 19, 170—194, 1922.

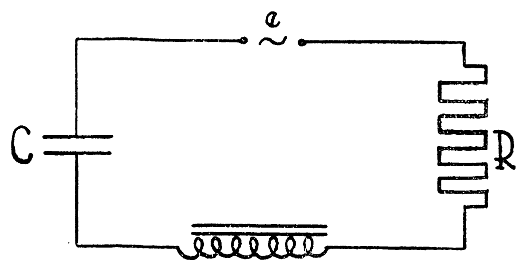
[2] Lehr, *Schwingungstechnik*, II, 336—367, Berlin 1934.

Kalantarov, Nejman, *Teoretič. osnovy elektrotechniki*, II, 254—264, Moskva-Leningrad 1948.

[3] Porov. pozn. 1.

[4] Casper, Hubmann, Zenneck, *Jahrb. d. drahtlos. Telegr.*, 63—77, 1924.

kde i je prúd prechádzajúci okruhom, z počet závitov cievky a Φ celkový magnetický indukčný tok prierezom cievky, ktorý nie je priamo úmerný intenzite prúdu, ako v prípade cievky bez železného jadra, ale je komplikovanejšou funkciou prúdu, resp. aj jeho závislosti od času.



Obr. 1.

Pre riešenie uvedeného okruhu zavádzajú Schunck a Zenneck predpoklady:

1. Prúd v okruhu je tvaru sinusového a dá sa vyjadriť vzťahom
$$i = J \sin \omega t. \tag{2}$$

2. Závislosť indukčného toku Φ prierezom cievky na intenzite magnetizačného prúdu vyjadruje vzorec
$$\Phi = A_o \operatorname{arc\,tg} \frac{z i}{S} + B_o \frac{z i}{S}, \tag{3}$$
kde A_o, B_o, S sú konštanty a z počet závitov cievky.

3. Okrem strát hysteréznych, ktorých zanedbanie je obsažené už v predpoklade 2., zanedbávajú sa aj straty, spôsobené vírivými prúdmi.

Pri týchto predpokladoch môžeme rovnicu (1) prepísať na tvar
$$i R + \frac{1}{C}\int i\, dt + (L_e + L_a)\frac{di}{dt} = e, \tag{4}$$
kde $L_e = \dfrac{z^2 B_o}{S}$ a $L_a = \dfrac{L_o}{1 + \left(\dfrac{z i}{S}\right)^2}$, pri čom $L_o = \dfrac{z^2 A_o}{S}$.

Výraz $L = L_e + L_a$ možno nazvať koeficientom samoindukcie cievky so železným jadrom, ktorý však vzhľadom na to, že L_a je funkciou i, teraz už nie je veličinou konštantnou. Vsadením výrazu (2) do rovnice (4) dostávame ďalej

$$J R \sin \omega t + \left[\omega (L_e + L_a) - \frac{1}{\omega C}\right] J \cos \omega t = E \sin (\omega t + \varphi) . \tag{5}$$

Vyšetrujme výraz
$$L_a \cos \omega t = \frac{L_o \cos \omega t}{1 + \left(\frac{z J}{S} \sin \omega t\right)^2} . \tag{6}$$

Výraz (6) je periodickou funkciou času. Možno ho teda vyjadriť Fourierovým radom

$$L_a \cos \omega t = \frac{L_o \cos \omega t}{1 + \left(\frac{z J}{S} \sin \omega t\right)^2} = L_o \left[p_o + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n \omega t + q_n \sin n \omega t)\right].$$

Obmedzíme sa len na prvé 3 členy Fourierovho radu s koeficientmi p_o, p_1 a q_1. Výpočtom zistíme, že $p_o = 0$, $q_1 = 0$, a

$$p_1 = \frac{2}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1),$$

kde $a = \frac{z J}{S}$. Je teda

$$L_a \cos \omega t = L_o p_1 \cos \omega t$$

a ďalej
$$L_a = L_o p_1 = \frac{2 L_o}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1) . \tag{7}$$

Výraz (7) hovorí, že L_a je funkciou len amplitúdy intenzity prúdu. Koeficient samoindukcie cievky so železným jadrom je daný potom vzťahom
$$L = L_e + L_a = \frac{z^2 B_o}{S} + \frac{2 L_o}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1) . \tag{8}$$

Pretože je L funkciou len amplitúdy intenzity prúdu, vyplýva z rovnice (5) pre túto amplitúdu, J, a amplitúdu napätia, E, jednoduchý vzťah

$$J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} , \tag{9}$$

kde však J vystupuje aj v L.

Rovnica (9) umožňuje sostrojiť krivky závislosti intenzity prúdu od napätia, resp. od vnútenej kruhovej frekvencie. Pri sostrojovaní týchto kriviek podľa rovnice (9) musíme však postupovať obrátene, a to tak, že k určitej hodnote intenzity prúdu hľadáme príslušnú hodnotu napätia, resp. príslušné hodnoty kruhovej frekvencie.

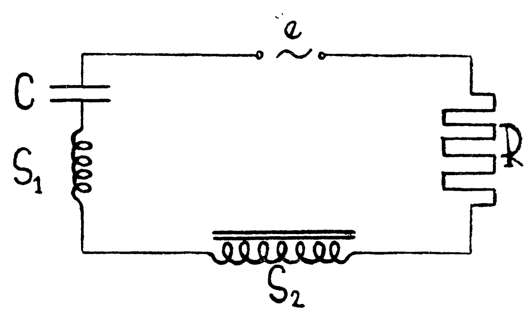
Schunck a Zenneck použili túto metódu vo svojej práci na vyšetrovanie vlastností okruhu (obr. 2), ktorého ohmický odpor je $R = 5\,\Omega$, kapacita $C = 0{,}1\ \mu F$, cievka bez železného jadra S_1 má koeficient samoindukcie $L_1 = 0{,}2533 \cdot 10^{-3}$ H a magnetický indukčný tok železným jadrom v cievke S_2 je v závislosti na intenzite prúdu daný vzťahom

$$\Phi = \left(8700 \text{ arc tg } \frac{i}{100} + 183 \frac{i}{100}\right) \text{M}$$

kde i je prúd v ampéroch a M znamená jeden maxwell. Je teda v (3)

$\frac{\tilde{z}}{S} = \frac{1}{100}$ A^{-1}, $B_o = 183$ M a $A_o = 8700$ M, takže

$$\frac{L_e}{L_o} = \frac{B_o}{A_o} = \frac{183}{8700}. \tag{10}$$



Obr. 2.

Rezonancia v okruhu pre minimálne hodnoty amplitúdy intenzity prúdu, kedy $L_a = L_o$, nastala pri frekvencii

$$\nu_o = 10\,000/\text{sec} \qquad (\omega_o = 2\pi \cdot 10^4/\text{sec}).$$

Z toho vyplýva

$$\omega_o (L_1 + L_e + L_o) = \frac{1}{\omega_o C} = 159{,}15\ \Omega. \tag{11}$$

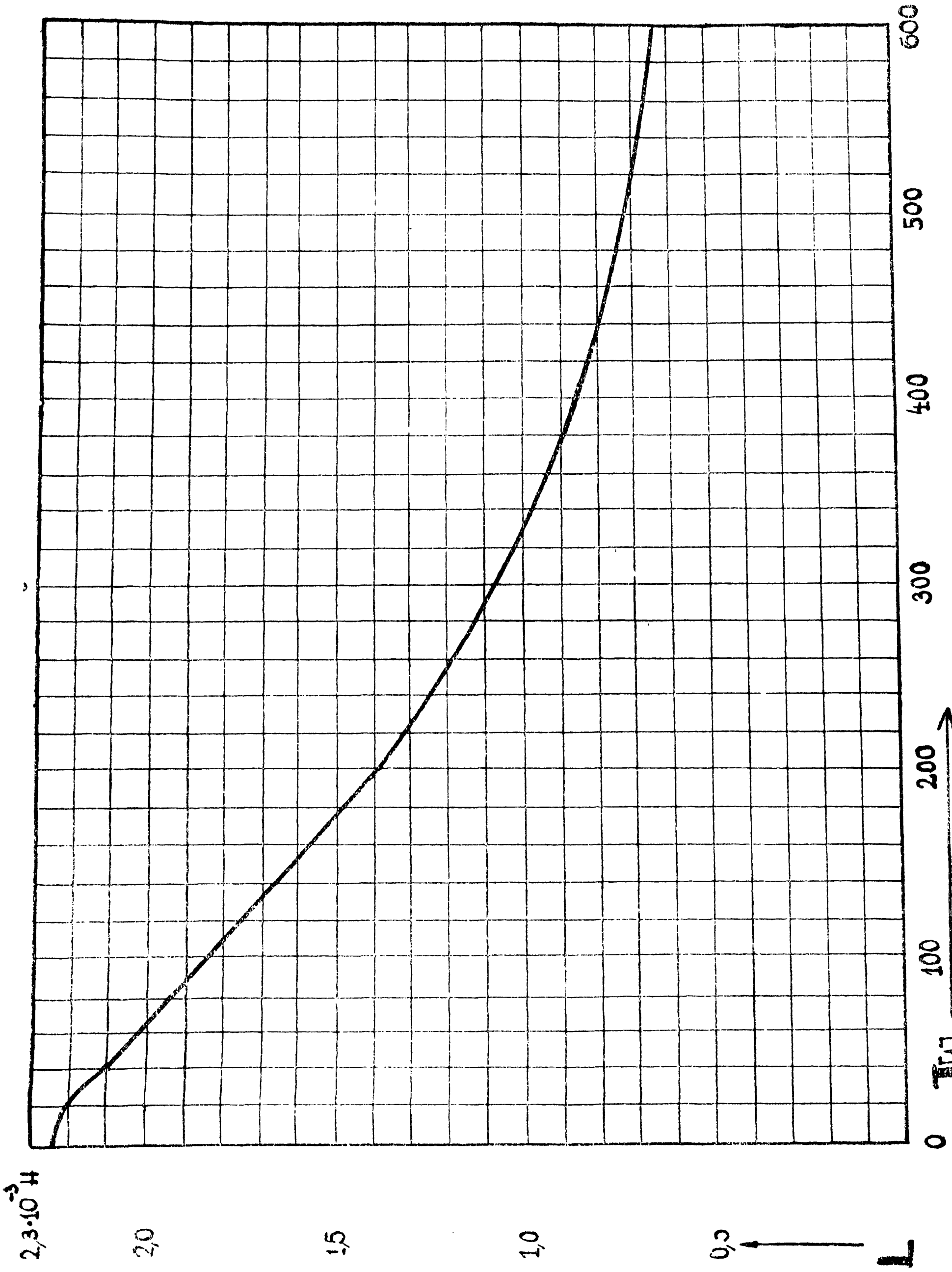
Zo vzťahov (10) a (11) je možno určiť L_e a L_o, a to

$$L_e = 4{,}6963 \cdot 10^{-5}\ \text{H}, \qquad L_o = 2{,}2327 \cdot 10^{-3}\ \text{H}.$$

Celkový koeficient samoindukcie okruhu je potom daný vzťahom

$$L = L_1 + L_e + L_o = 0{,}3003 \cdot 10^{-3}\ \text{H} + \frac{4{,}4654 \cdot 10^{-3}\ \text{H}}{\left(\frac{J}{100}\right)^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{J}{100}\right)^2} - 1\right)$$

a grafický obraz závislosti celkového koeficientu samoindukcie okruhu na amplitúde intenzity prúdu je znázornený na obr. 3.



Obr. 3.

Charakteristika okruhu, t. j. závislosť amplitúdy prúdu od amplitúdy vnúteného napätia pri kruhovej frekvencii $\omega = 2\pi \,.\, 1{,}2 \,.\, 10^4/\text{sec}$, vypočítaná podľa rovnice (9), je znázornená na obr. 4. Rezonančná krivka okruhu, t. j. závislosť amplitúdy prúdu od kruhovej frekvencie vnúteného napätia pri amplitúde vnúteného napätia $E = 1200$ V, vypočítaná tiež podľa rovnice (9), je znázornená na obr. 5.

Experimentálne sa zistilo, že časti kriviek, vyjadrujúcich uvedené závislosti, narysované čiarkovane, sú nerealizovateľné a intenzita prúdu pri hodnotách napätia E_1 (pri stúpajúcom E) a E_2 (pri klesajúcom E) (obr. 4), resp. pri kruhových frekvenciách ω_1 (pri stúpajúcom ω) a ω_2 (pri klesajúcom ω) (obr. 5), sa *diskontinuitne* mení.

II.

Z uvedeného je zrejmé, že Schunck a Zenneck hľadali tvar charakteristík a rezonančných kriviek v podstate skusmo. V ďalšom ukážeme, že je možné kvantitatívne aj kvalitatívne vyšetrovať charakteristiky a rezonančné krivky oscilačných okruhov s cievkou so železným jadrom aj metódou priamou.

Krivka závislosti koeficientu samoindukcie cievky so železným jadrom (obr. 3) od amplitúdy prúdu je takého tvaru, že ju možno s veľkou presnosťou vyjadriť analyticky vzťahom

$$L = \alpha + \frac{\beta}{1 + \gamma J^2}, \tag{12}$$

kde α, β, γ sú konštanty, závislé od geometrického tvaru a počtu závitov cievky ako aj od rozmerov a akosti železného jadra.

Ak teda položíme do rovnice (9) za L výraz (12), dostávame po úprave rovnicu tvaru

$$A_1 J^6 + (A_2 - B_1 E^2) J^4 + (A_3 - B_2 E^2) J^2 - B_3 E^2 = 0, \tag{13}$$

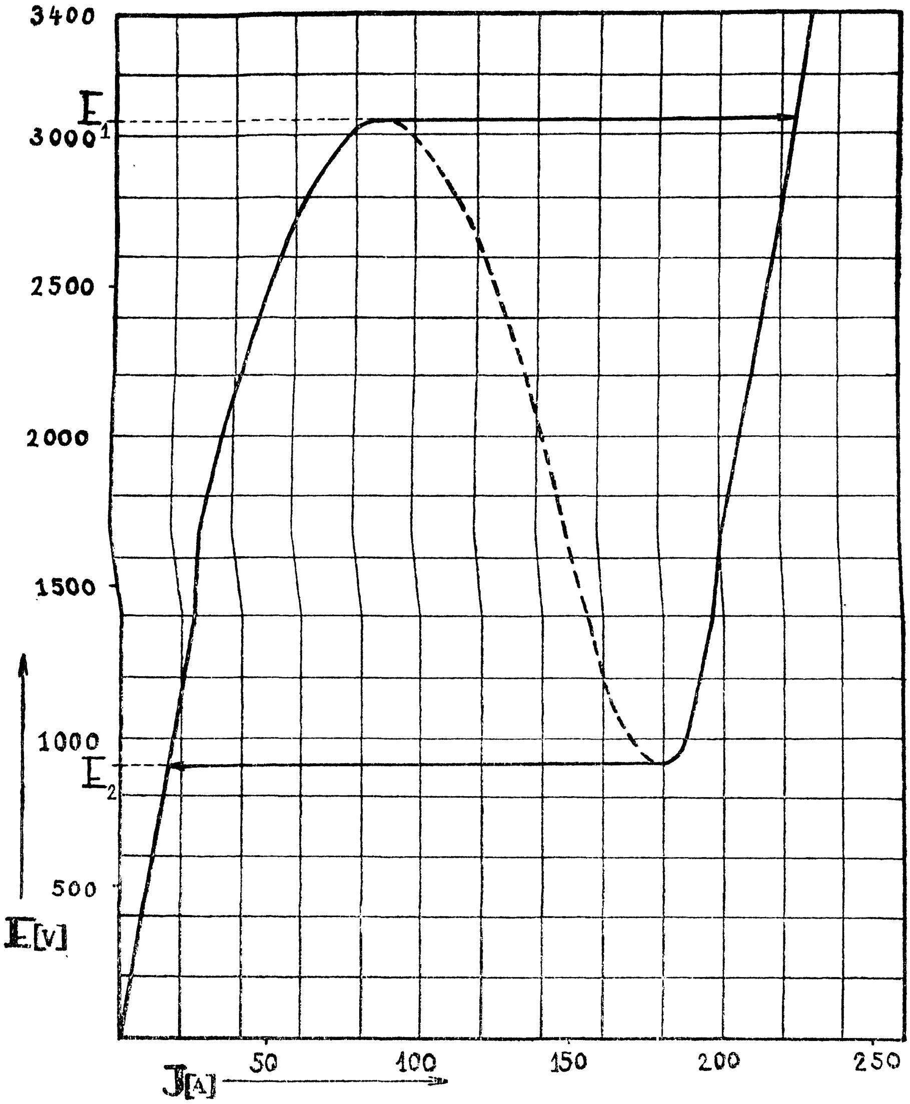
kde

$$A_1 = \omega^4 C^2 \alpha^2 \gamma^2 + \omega^2 (\gamma^2 R^2 C^2 - 2 \alpha \gamma^2 C) + \gamma^2,$$

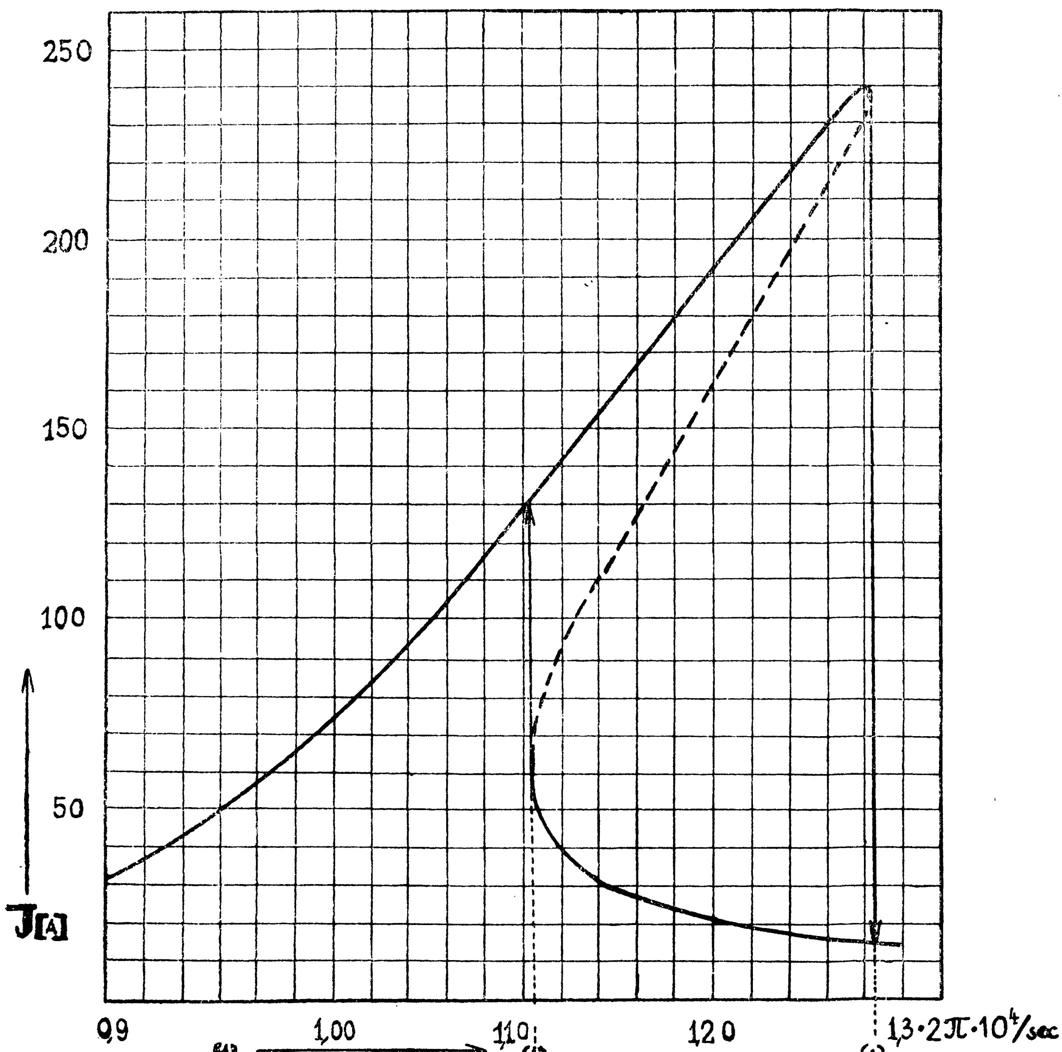
$$A_2 = \omega^4 (2 \alpha \beta \gamma C^2 + 2 \gamma \alpha^2 C^2) + \omega^2 (2 \gamma R^2 C^2 - 4 \alpha \gamma C - 2 \beta \gamma C) + 2 \gamma,$$

$$A_3 = \omega^4 (C^2 \alpha^2 + 2 \alpha \beta C^2 + C^2 \beta^2) + \omega^2 (R^2 C^2 - 2 \alpha C - 2 \beta C) + 1,$$

$$B_1 = \omega^2 C^2 \gamma^2, \qquad B_2 = 2 \omega^2 \gamma C^2, \qquad B_3 = \omega^2 C^2.$$



Obr. 4.



Obr. 5.

Rovnica (13) je kubickou rovnicou pre J^2. Jej koeficienty sú funkciami odporu R, kapacity C, amplitúdy vnúteného napätia E ako aj vnútenej kruhovej frekvencie ω. Obsahuje teda táto rovnica v sebe analytické vyjadrenie závislosti amplitúdy prúdu J od vnúteného napätia E ako aj od kruhovej frekvencie ω. Tvar rovnice (13) umožňuje aj vysvetliť vznik diskontinuít na charakteristikách, resp. rezonančných krivkách.

Koeficienty rovnice (13) môžu sa pri konštantných a vhodných hodnotách R, C, ω meniť s vnúteným napätím E tak, že pre napätia E, spadajúce do určitého intervalu $< E_1, E_2 >$ poskytuje rovnica (13) pre J^2 tri reálne kladné korene. To znamená, že hodnotám napätia z tohto intervalu odpovedajú tri hodnoty prúdu a že teda charakteristika má tvar podľa obr. 4, čo z rovnice (9) zrejme nebolo možno predvídať. Diskontinuity vznikajú práve pri hraničných hodnotách intervalu E_1 a E_2. Podobne pri konštantných a vhodných hodnotách R, C a E môžu sa koeficienty rovnice (13) v závislosti od ω meniť tak, že pre určité hodnoty ω z intervalu $< \omega_1, \omega_2 >$ poskytuje rovnica (13) pre J^2 opäť tri reálne kladné korene. To znamená, že hodnotám kruhovej frekvencie z uvedeného intervalu odpovedajú tri hodnoty intenzity prúdu a rezonančná krivka má tvar podľa obr. 5, čo opäť z rovnice (9) nebolo možno predvídať. Rovnica (13) hovorí však aj to, že diskontinuity na charakteristikách, resp. rezonančných krivkách nemusia nevyhnutne vzniknúť a ako to vyplýva z meraní Caspera, Hubmanna a Zenneckа[4], ani vždy nevznikajú. Ak totiž koeficienty rovnice (13) sa pri konštantných hodnotách R, C, ω, resp. R, C, E menia v závislosti od E, resp. od ω tak, že rovnica (13) neposkytuje pre J^2 pri nijakej hodnote E, resp. ω tri reálne kladné korene, potom na charakteristike, resp. rezonančnej krivke príslušného okruhu diskontinuity nevznikajú.

Na základe tvaru koeficientov rovnice (13) je možno predpokladať, že diskontinuity môžu vzniknúť aj na krivkách, vyjadrujúcich závislosť prúdu od kapacity, C, resp. odporu, R, okruhu pri konštantných a vhodných hodnotách E, ω, R resp. E, ω, C. Ako vyplýva z meraní Rouelleových[5], diskontinuity na krivkách, vyjadrujúcich uvedené závislosti, skutočne aj za vhodných podmienok vznikajú.

---

[5] Rouelle, *Revue générale de l'electricité*, 1934 (24. nov., 1. et 8. dec.).

V miestach charakteristiky, kde sa intenzita prúdu mení skokom, platí

$$\frac{dE}{dJ} = 0.$$

Keďže diskontinuity na charakteristikách vznikajú pri konečných a nenulových hodnotách napätia, resp. prúdu, platí tiež

$$\frac{dE^2}{dJ^2} = \frac{E\,dE}{J\,dJ} = 0. \tag{14}$$

Z rovnice (13) vyplýva

$$E^2 = \frac{A_1 y^3 + A_2 y^2 + A_3 y}{B_1 y^2 + B_2 y + B_3}, \tag{15}$$

keď sme položili $y = J^2$. Derivovaním vzťahu (15) podľa y dostávame po úprave

$$\frac{dE^2}{dy} = \frac{A_1B_1y^4 + 2A_1B_2y^3 + (A_2B_2 + 3A_1B_3 - A_3B_1)y^2 + 2A_2B_3y + A_3B_3}{(B_1y^2 + B_2y + B_3)^2}. \tag{16}$$

V miestach charakteristiky, v ktorých sa intenzita prúdu mení skokom, musí teda s ohľadom na (14) a (16) platiť rovnica

$$A_1B_1y^4 + 2A_1B_2y^3 + (A_2B_2 + 3A_1B_3 - A_3B_1)y^2 + 2A_2B_3y + A_3B_3 = 0. \tag{17}$$

Táto rovnica nám umožňuje vypočítať prúd a jeho vsadením do vzťahu (15), napätia, pri ktorých vznikajú diskontinuity na charakteristikách.

Riešme teraz použitím rovnice (13) Schunckom a Zenneckom vyšetrovaný okruh podľa obr. 2. Koeficienty α, β, γ vzťahu (12) pre závislosť koeficientu samoindukcie od amplitúdy prúdu tohto okruhu (obr. 3) v časti, na ktorej okruh pracuje, majú hodnoty

$$\alpha = 1{,}0869 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{H}, \quad \beta = 1{,}4486 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{H}, \quad \gamma = 3{,}5903 \,.\, 10^{-5}\,\mathrm{A}^{-2}$$

a rovnica (13) pre tento okruh je

$$\begin{gathered} J^6\,[\omega^4 . 15{,}2280 . 10^{-30} - \omega^2 . 27{,}9884 . 10^{-20} + 12{,}8900 . 10^{-10}] + \\ + J^4\,[\omega^4 . 19{,}7938 . 10^{-25} - \omega^2 (25{,}9933 . 10^{-15} + 12{,}8900 . 10^{-24} E^2) + \\ + 7{,}1806 . 10^{-5}] + \\ + J^2\,[\omega^4 . 6{,}4288 . 10^{-20} - \omega^2 (5{,}0685 . 10^{-10} + 7{,}1806 . 19^{-19} E^2) + 1] - \\ - 1 . 10^{-14}\,\omega^2 E^2 = 0, \end{gathered}$$

kde J je prúd v A a E je napätie vo V. Riešenia tejto rovnice pri $\omega = 2\pi$ . . 1,2 . 10^4/sec pre rôzne hodnoty napätia E sú uvedené v tabuľke 1.

a riešenia tejže rovnice pri $E = 1200$ V pre rôzne hodnoty kruhovej frekvencie ω sú uvedené v tabuľke 2.

E	J_1	J_2	J_3
900 V	15,5 A	—	—
1000 V	17,3 A	170,0 A	186,0 A
1200 V	21,3 A	162,7 A	191,0 A
2000 V	37,4 A	140,4 A	208,8 A
3000 V	71,8 A	103,4 A	226,3 A
3100 V	—	—	227,1 A

Tabuľka 1.

ω	J_1	J_2	J_3
$2\pi.10^4$	72,1 A	—	—
$2\pi.1,10.10^4$	130,7 A	—	—
$2\pi.1,12.10^4$	143,6 A	94,8 A	31,6 A
$2\pi.1,20.10^4$	189,1 A	164,9 A	21,0 A
$2\pi.1,26.10^4$	230,7 A	218,9 A	16,4 A
$2\pi.1,29.10^4$	—	—	14,9 A

Tabuľka 2.

Rovnica (17) pre tento okruh pri „$\omega = 2\pi \,.\, 1,2 \,.\, 10^4$/sec je

$$1,3923.10^{-23}y^4 + 1,5512.10^{-18}y^3 - 3,0925.10^{-14}y^2 - 1,3636.10^{-9}y + \\ + 1,1148.10^{-5} = 0$$

a jej reálne kladné korene (len tie majú fyzikálny význam) sú $y_1 = 3,1596.10^4$ a $y_2 = 0,7423.10^4$. Druhé dva korene sú komplexne sdružené. Hodnoty prúdu, pri ktorých vznikajú na charakteristikách diskontinuity, sú teda $J_1 = 177,753$ A a $J_2 = 86,157$ A. Vsadením týchto hodnôt do výrazu (15) dostávame pre napätia, pri ktorých vznikajú na charakteristikách diskontinuity, hodnoty $E_1 = 912,1$ V a $E_2 = 3075,5$ V.

Vidíme, že výsledky, získané riešením rovnice (13) a (17), sú v úplnej shode s výsledkami, vypočítanými podľa rovnice (9) Schunckom a Zenneckom a znázornenými na obr. 4 a 5.

LITERATÚRA

Casper, Hubmann, Zenneck, *Jahrb. d. drahtlos. Telegr.*, 63—77, 1924.

Kalantarov, Nejman, *Teoretič. osnovy elektrotechniki*, II, 254—264, Moskva-Leningrad 1948.

Lehr, *Schwingungstechnik*, II, 336—367, Berlin 1934.

Martiensen, *Physikalische Zeitschrift* 11, 448—460, 1910.

Rouelle, *Revue gén. de l'électricité*, 1934.

Schunck a Zenneck, *Jahrb. der drahtlos. Telegr. u. Teleph.* 19, 170—194, 1922.

Выводы

Шунк и Ценнек[1]), сделая целесообразные предпосылки, связь между амплитудой силы тока J и амплитудой навязанного напряжения E с угловой частотой ω в колебательном контуре с катушкой с железным сердечником (рис. 1), выразили соотношением

$$J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{1}$$

где, однако, коэфициент самоиндукции L катушки, является функцией амплитуды силы тока J согласно соотношению

$$L = \frac{z^2 B_0}{S} + \frac{2 L_0}{a^2}\left(\sqrt{1 + a^2} - 1\right) \tag{2}$$

где $a = \frac{z J}{S}$, $L_0 = \frac{z^2 A_0}{S}$, z — число обмоток в катушке и A_0, B_0, S — постоянные. Зависимость L от J для специальной катушки в контуре согласно рис. 2 графически изображена на рис. 3. Из уравнений (1) и (2) возможно для определенных значений амплитуды силы тока установить соотвествующие амплитуды напряжения E при постоянных R, C, ω, или соотвествующие значения ω при постоянных R, C, E. Таким образом возможно получить графическое выражение зависимостей амплитуды силы тока от амплитуды напряжения или-же от угловой частоты ω (рис. 4 или-же рис. 5).

Зависимость L от J согласно (2) изображена на рис. 3 имеет однако такой вид, что можно её с удовлетворительной точностью аналитически выразить соотношением:

$$L = \alpha + \frac{\beta}{1 + \gamma J^2} \tag{3}$$

где α, β, γ - подходящие постоянные, зависимые от числа обмоток и от геометрической формы катушки а также от свойств железного сердечника. Вводя соотношение (3) в уравнение (1) после некоторых переобразований мы получаем уравнение

$$A_1 J^6 + (A_2 - B_1 E^2) J^4 + (A_3 - B_2 E^2) J^2 - B_3 E^2 = 0, \tag{4}$$

где $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ суть коэфициенты, ближе определенные в тексте. Уравнение (4) есть кубическое уравнение для J^2 и содержит аналитическое выражение зависимости амплитуды силы тока от напряжения E при постоянных R, C, ω, или-же зависимости амплитуды силы тока от угловой частоты ω при постоянных R, C, E. Если взять подходящие значения R, C, ω или-же R, C, E, то коэфициенты уравнения (4) могут изменяться в зависимости от E или-же от ω так, что в определенном промежутке величин напряжения E или-же угловых частот ω, уравнение (4) дает для J^2 три вещественных положительных корня, значит характеристики (зависимости J от E) или-же кривые резонанса (зависимости J от ω) имеют вид изображенный на рис. 4 или-же на рис. 5, что из уравнения (1) нельзя было предвидеть. Таким образом опытным путем обнаруженные скачкообразные изменения силы тока при изучении зависимости силы тока от напряжения E или-же от угловой частоты ω при постоянных но подходящих R, C, ω или-же R, C, E теоретически следуют из уравнения (4).

Применением уравнения (4) был решен контур изображенный на обр. 2 и полученные результаты находятся в полном согласии с результатами Шунка и Ценнека.

Résumé

Schunck et Zenneck [1] en s'appuyant sur des suppositions convenables ont exprimé la relation entre l'amplitude, J, du courant et l'amplitude, E, de la tension aux bornes de la source du courent alternatif utilisée, de pulsation ω, dans un circuit comprenant un condensateur et une résistance inductive en forme d'une bobine a noyau de fer, par la formule

$$J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{1}$$

dans laquelle la grandeur L, la self-inductance de la bobine, est fonction de l'amplitude, J, du courant d'après la formule

$$L = \frac{z^2 B_o}{S} + \frac{2 L_o}{a^2} (\sqrt{1 + a^2} - 1), \tag{2}$$

a signification des symbols a et L_o étant, $a = \frac{z J}{S}$, $L_o = \frac{z^2 A_o}{S}$ et z désigne le nombre des spires de la bobine. La relation entre L et J pour une bobine choisie est représentée par la figure 3.

D'équations (1) et (2), pour les amplitudes du courant données, on peut calculer les amplitudes de la tension E, si les grandeurs R, C et ω sont constantes, ou les pulsations ω, quand les grandeurs R, C et E sont constantes. Ainsi on peut obtenir une représentation géometrique de la relation entre l'amplitude du courant, J, et l'amplitude de la tension, E, ou la pulsation ω (fig. 4 et 5).

Mais la relation entre L et J, donnée par (2) et représentée par la fig. 3, est de forme qu'on peut, avec précision suffisante, l'exprimer par la formule

$$L = \alpha + \frac{\beta}{1 + \gamma J^2}, \tag{3}$$

où α, β, γ sont des constantes, dépendant de nombre des spires de la bobine, sa forme géometrique et les propriétés du noyau de fer. En introduisant la relation (3) dans l'équation (1) on obtient

$$A_1 J^6 + (A_2 - B_1 E^2) J^4 + (A_3 - B_2 E^2) J^2 - B_3 E^2 = 0, \tag{4}$$

où A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 sont facteurs, dont la signification est donnée dans le texte. L'équation (4) est une équation cubique en J^2 et présente une expression analytique de la relation entre J et E pour les grandeurs R, C et ω données, ou entre J et ω, si on connait les grandeurs R, C et E. Dans certains cas les facteurs de l'équation (4) en fonction de ω ou E peuvent varier de façon que pour les valeurs de E ou ω liant dans certains intervalles l'équation (4) a 3 racines réelles positives pour J^2, c'est-à-dire les caractéristiques (relations entre J et E) ou les courbes de résonance (relations entre J et ω) sont de formes données par les fig. 4 et 5, c'est qu'on ne peut pas prévoire directement d'après l'équation (1).

Les discontinuités du courant bien connues qu'on trouve, dans les circonstances convenables, si l'on fait la recherche de la relation entre J et E ou ω par expérience, sont donc déterminées téoriquement par l'équation (4).

A l'aide de cette équation a été fait le calcule pour le circuit donné par la fig. 2 et on a trouvé que les résultats obtenus sont en accord parfait avec ceux de Schunck et Zenneck.