Matematický časopis

Libuše Marková

Reperáž systému anholonomních subvariet trojrozměrné variety v pětirozměrném ekviafinním prostoru

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 1, 6--18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126799

Matematický časopis 22 (1972), No. 1

REPERÁŽ SYSTÉMU ANHOLONOMNÍCH SUBVARIET TROJROZMĚRNÉ VARIETY V PĚTIROZMĚRNÉM EKVIAFINNÍM PROSTORU

LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc

1. Úvod

V pětirozměrném reálném ekviafinním prostoru A^5 je dána trojrozměrná diferencovatelná varieta Φ_3 soustavou vektorových funkcí tří parametrů t_1, t_2, t_3. Na varietě Φ_3 je dán systém S anholonomních subvariet, z nichž každá je dána jednou Pfaffovou rovnicí vzhledem ke třem hlavním para metrům variety Φ_3 a o níž předpokládáme, že není úplně integrabilní.

Definice 1. *Obecným pohyblivým reperem $\mathscr{R}$ variety Φ_3 v A^5 nazveme množinu, která se skládá z bodu $\mathbf{M}$ variety Φ_3 a pěti lineárně nezávislých vektorů vázaných podmínkou*

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5) = 1.$$

Jak je známo, reper variety Φ_3 závisí tedy jednak na parametrech t_1, t_2, t_3 a ještě na 26 dalších — parametrech vedlejších. Kdybychom připojili reper $\mathscr{R}$ k danému systému S (viz [3], [4]), fixovali bychom tím jistý počet vedlejších parametrů, které nazveme *významnými parametry systému S*.

Definice 2. *Reper $\mathscr{R}$ variety Φ_3, který závisí pouze na hlavních a význačných parametrech systému S nazveme polokanonický reper variety Φ_3 vzhledem k systému S.*

Problémem připojení reperu $\mathscr{R}$ k soustavě subvariet S se zabýval I. Kolář v práci [4], který spolu s V. Havlem a K. Svobodou vypracovali obecnou metodu získání polokanonických reperů variet vzhledem k systémům jejich subvariet. Ukázali na to, že geometrické charakteristiky a relativní komponenty reperů jsou odlišné podle toho, ve kterém stadiu konstrukce byl tento připojen k systému subvariet.

V tomto článku se aplikuje metoda odvozená v [4] na získání polokanonického reperu Φ_3 v A^5. Cílem článku je podat geometrickou charakterizaci každého kroku reperáže, t. j. podat „názorný" výklad provedené specializace sekundárních parametrů. Dále je v článku provedeno připojení reperu $\mathscr{R}$ k soustavě S a je tak získaný reper variety Φ_3 vzhledem k S.

Definice 3. *Reper variety Φ_3, který závisí na parametrech t_1, t_2, t_3 a je připojen k systému S, nazveme kanonickým reperem variety Φ_3 vzhledem k systému S.*

Jak již bylo řečeno, uvažovanou varietu Φ_3 předpokládáme vnořenou do reálneho prostoru A^5. Vzhledem k tomu, že s vyšetřováním této variety je spojeno též vyšetřování algebraických variet v jejích tečných lineárních prostorech, budeme tyto předpokládat vnořeny do svým komplexních rozšíření.

2. Konstrukce polokanonického reperu Φ_3 v A^5

V A^5 je dána trojrozměrná plocha Φ_3. Derivační vzorce pohyblivého reperu jsou

(1) $$d\mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i, \qquad d\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k,$$

při čemž platí

(2) $$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \qquad d\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \; \omega_i^i = 0$$

V dalším indexy $i, j, k, \ldots$, nechť probíhají hodnoty 1, 2, 3, 4, 5 indexy $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hodnoty 1, 2, 3 a indexy μ, ν, λ, hodnoty 4. 5.

Bod $\mathbf{M}$ reperu $\mathscr{R}$ ztotožníme s bodem plochy Φ_3. Pak platí,. formy ω^α, ω^μ jsou formami hlavními. Mezi nimi jsou tři lineárně nezávislé a existují tudíž mezi nimi dvě lineární závislosti, které lze napsat pomocí

(3) $$\omega^\mu = R_\alpha^\mu \omega^\alpha.$$

Soustavu (3) lze považovat za soustavu diferenciálních rovnic uvažované plochy Φ_3 v A^5. Jestliže vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ umístíme do tečné trojroviny plochy Φ_3 v uvažovaném bodě $\mathbf{M}$, pak soustava (3) nabývá tvaru

(4) $$\omega^\mu = 0$$

Pomocí (2) a (4) lze najít závislosti forem ω^α na sekundárních parametrech

$$-\delta\omega^\alpha = \pi_\gamma^\alpha \omega^\gamma = \pi_\alpha^\alpha \omega^\alpha + \pi_\beta^\alpha \omega^\beta$$

(pro $\alpha \neq \beta$, podle α nesčítat!)

Každá anholonomní subvarieta dané variety může mít pouze dimensi dvě. Její tečná rovina v uvažovaném bodě $\mathbf{M}$ variety Φ_3 je podprostorem tečné trojroviny variery Φ_3 v tomto bodě. Zadání soustavy anholonomních subvariet plochy Φ_3 vede k zadání tří nezávislých subvariet Ψ_1. Pak všech šest forem $\pi^\alpha_\beta(\alpha \neq \beta)$ budou význačnými formami. Počítáme-li, že každá subvarieta${}^\alpha\Psi_1$ je souřadná, pak je daná soustava diferenciálních rovnic, které ji určují typu

$$\omega^\beta = 0, \quad \omega^\gamma = 0 \quad \text{pro} \quad \beta \neq \alpha, \quad \beta \neq \gamma, \quad \alpha \neq \gamma.$$

Vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ jsou tečnými vektory ke křivkám, které jsou opsány bodem $\boldsymbol{M}$ při pohybu po příslušné subvarietě.

Hledáme nyní polokanonický reper plochy Φ_3 vzhledem k soustavě jejích anholonomních subvariet. To znamená, že formy π^α_β pro $\alpha \neq \beta$ jsou nyní význačnými formami a fixaci provádíme postupným anulováním zbývajících sekundárních forem.

Diferencujeme-li (4) vnějšně a užijeme-li Cartanova lemmatu, máme

$$\omega^\mu_\alpha = R^\mu_{\alpha\beta}\omega^\beta \qquad (R^\mu_{\alpha\beta} = R^\mu_{\beta\alpha}) \tag{5}$$

a najdeme závislost $\delta R^\mu_{\alpha\beta}$ na druhotných formách. Diferencujeme (5) a bereme v úvahu (2) a (4), dostaneme

$$(\mathrm{d}R^\mu_{\alpha\beta} - R^\mu_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta - R^\mu_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha + R^\nu_{\alpha\gamma}\omega^\mu_\nu) \wedge \omega^\beta = 0 \tag{6}$$

a tedy

$$\delta R^\mu_{\alpha\beta} - R^\mu_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta - R^\mu_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha + R^\nu_{\alpha\gamma}\pi^\mu_\nu = 0$$

Definice 4. *Fokální nadrovinou trojroviny se nazývá nadrovina, která prochází touto trojrovinou a trojrovinou konsekutivní k dané při určitém pohybu $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$, který se nazývá fokální pohyb dané trojroviny.*

Hledejme fokální nadrovinu tečné trojroviny plochy Φ_3. Nechť

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{M} + x^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha$$

je libovolný bod trojroviny $(\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Pak fokální nadrovina trojroviny $(\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je nadrovina která obsahuje tuto trojrovinu, t. zn. všechny její body a trojrovinu nekonečně blízkou k $(\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, tj. diferenciály všech bodů této trojroviny. Jestliže hledanou nadrovinu označíme Γ, pak

$$\Gamma = (\boldsymbol{Y} + \mathrm{d}\boldsymbol{Y}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\varrho),$$

kde $\mathbf{e}_\varrho$ zatím neznáme, ale lze jej vyjádřit pomocí

$$\mathbf{e}_\varrho = -\sigma_1\mathbf{e}_4 + \sigma_2\mathbf{e}_5,$$

při čemž platí, že $\boldsymbol{Y} \in (\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in \Gamma$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y} = \mathrm{d}\boldsymbol{M} + x^\alpha\,\mathrm{d}\mathbf{e}_\alpha = \boldsymbol{X}^\alpha\mathbf{e}_\alpha + x^\beta\omega^\nu_\beta\,\mathbf{e}_\nu.$$

Aby $\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$ patřil nadrovině $(\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\varrho)$, musí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^\alpha\mathbf{e}_\alpha + \boldsymbol{X}^\varrho\mathbf{e}_\varrho = \boldsymbol{X}^\alpha\mathbf{e}_\alpha + \boldsymbol{X}^\lambda\mathbf{e}_\lambda.$$

Z tohoto požadavku dostaneme podmínku $X^4 \sigma_2 + X^5 \sigma_1 = 0$, což v našem případě se přepíše do tvaru

$$\sigma_2 x^\beta \omega^4_\beta + \sigma_1 x^\beta \omega^5_\beta = 0 . \tag{7}$$

Bereme-li nyní v úvahu (5), lze (7) upravit na tvar

$$\sigma_2 x^\beta R^4_{\beta\alpha} \omega^\alpha + \sigma_1 x^\beta R^5_{\beta\alpha} \omega^\alpha = 0 .$$

Protože existuje pohyb každého bodu této trojroviny. musí být poslední vztah totožností vzhledem k x^β a lze tedy psát

$$\omega^\alpha (\sigma_2 R^4_{\beta\alpha} + \sigma_1 R^5_{\beta\alpha}) = 0 . \tag{8}$$

Tím dostáváme pro ω^α soustavu tří homogenních lineárních rovnic. Aby tato soustava měla netriviální řešení, je nutné a stačí, aby $\det \| \sigma_2 R^4_{\alpha\beta} + \sigma_1 R^5_{\alpha\beta} \| = 0$, což vede k rovnici

$$\sigma_1^3 \Lambda^5 + \sigma_1^2 \sigma_2 \Lambda^* + \sigma_1 \sigma_2^2 \Lambda + \sigma_2^3 \Lambda^4 = 0 , \tag{9}$$

kde

$$\Lambda^\mu = \begin{vmatrix} R^\mu_{11} & R^\mu_{12} & R^\mu_{13} \\ R^\mu_{21} & R^\mu_{22} & R^\mu_{23} \\ R^\mu_{31} & R^\mu_{32} & R^\mu_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Lambda^* = \begin{vmatrix} R^4_{11} & R^4_{12} & R^4_{13} \\ R^5_{21} & R^5_{22} & R^5_{23} \\ R^5_{31} & R^5_{32} & R^5_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R^5_{11} & R^5_{12} & R^5_{13} \\ R^4_{21} & R^4_{22} & R^4_{23} \\ R^5_{31} & R^5_{32} & R^5_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R^5_{11} & R^5_{12} & R^5_{13} \\ R^5_{21} & R^5_{22} & R^5_{23} \\ R^4_{31} & R^4_{32} & R^4_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} R^5_{11} & R^5_{12} & R^5_{13} \\ R^4_{21} & R^4_{22} & R^4_{23} \\ R^4_{31} & R^4_{32} & R^4_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R^4_{11} & R^4_{12} & R^4_{13} \\ R^5_{21} & R^5_{22} & R^5_{23} \\ R^4_{31} & R^4_{32} & R^4_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R^4_{11} & R^4_{12} & R^4_{13} \\ R^4_{21} & R^4_{22} & R^4_{23} \\ R^5_{31} & R^5_{32} & R^5_{33} \end{vmatrix}$$

Rovnice (9) je třetího stupně, právě když $(\Lambda^5, \Lambda^4) \neq (0{,}0)$. Počítáme-li variace $\delta\Lambda$, $\delta\Lambda^*$, $\delta\Lambda^4$, $\delta\Lambda^5$, dostaneme následující relace

$$\begin{aligned} \delta\Lambda^4 &= 2\Lambda^4(\pi^1_1 + \pi^2_2 + \pi^3_3) - 3\Lambda^4\pi^4_4 - \Lambda\pi^4_5 \\ \sigma\Lambda^5 &= 2\Lambda^5(\pi^1_1 + \pi^2_2 + \pi^3_3) - 3\Lambda^5\pi^5_5 - \Lambda^*\pi^5_4 \\ \delta\Lambda &= 2\Lambda(\pi^1_1 + \pi^2_2 + \pi^3_3 - \pi^4_4) - \Lambda\pi^5_5 - 2\Lambda^*\pi^4_5 - 3\Lambda^4\pi^5_4 \\ \delta\Lambda^* &= 2\Lambda^*(\pi^1_1 + \pi^2_2 + \pi^3_3 - \pi^5_5) - \Lambda^*\pi^4_4 - 2\Lambda\pi^5_4 - 3\Lambda^5\pi^4_5 \end{aligned} \tag{10}$$

Vyloučíme-li z úvah násobné kořeny rovnice (9), pak lze zavést takovou fixaci v (10), aby rovnice (9) byla tvaru

$$\delta_1^3 + \delta_2^3 = 0 \tag{11}$$

což odpovídá volbě $A = A^* = 0$, $A^4 = A^5 \neq 0$ a pro sekundární formy platí z (10)

(12) $$\pi_5^5 = \pi_4^4, \qquad \pi_5^4 = \pi_4^5 = 0$$

Z rovnice (9) plyne:

Věta 1. *Obecně existují tři fokální směry tečné trojroviny* $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. *Při naší volbě odpovídají kořenům rovnice (*11).

Hledané nadroviny jsou pak

$$\Gamma_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5)$$

$$\Gamma_2 = (\mathbf{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5 - 1/2\,(1 + i\sqrt{3})\,\mathbf{e}_4)$$

$$\Gamma_3 = (\mathbf{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5 - 1/2\,(1 - i\sqrt{3})\,\mathbf{e}_4)$$

Zadání Γ_α určují vzájemnou volbou vektorů $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$.

Hledejme dvojpoměry

$$W_1 = DV(\Gamma_4, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$$

$$W_2 = DV(\Gamma_5, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3),$$

kde $\Gamma_\mu = (\mathbf{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\mu)$. Pak platí

$$W_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \qquad W_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}$$

a tedy

(13) $$W_1 + W_2 - 1 = 0, \qquad W_1^{-1} + W_2^{-1} - 1 = 0$$

Souřadné nadroviny Γ_4, Γ_5 jsou tedy v naší fixaci zvoleny tak, aby byly splněny vztahy (13) pro příslušné dvojpoměry.

Vraťme se k fixaci (12). Z ní plyne, že formy μ_5^4 a μ_4^5 jsou hlavní a lze tedy položit

(14) $$\omega_\mu^\nu = R_{\mu\alpha}^\nu \omega^\alpha \quad \text{pro} \quad \mu \neq \nu$$

Vnějším diferencováním dostaneme

(15) $$\omega_\mu^\alpha \wedge \omega_\alpha^\nu + \omega_\mu^\lambda \wedge \omega_\lambda^\nu = \mathrm{d}R_{\mu\alpha}^\nu \wedge \omega^\alpha + R_{\mu\alpha}^\nu \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha$$

z čehož plyne

$$\delta R_{\mu\alpha}^\nu + R_{\mu\alpha}^\nu(\pi_\nu^\nu - \pi_\mu^\mu) - R_{\mu\beta}^\nu \pi_\alpha^\beta - R_{\alpha\beta}^\nu \pi_\mu^\beta = 0.$$

Za předpokladu, že determinanty $\|R_{\alpha\beta}^\nu\| \neq 0$, lze položit

(16) $$R_{\mu\alpha}^\nu = 0.$$

Toto vede k anulaci forem π^α_μ a formy ω^α_μ jsou hlavní, což vyjádříme pomocí

(17) $$\omega^\alpha_\mu = R^\alpha_{\mu\beta}\omega^\beta$$

Ze (14) dostaneme, že $\omega^\nu_\mu = 0$ pro $\nu \neq \mu$ a z (15) vztah

(18) $$\omega^\alpha_\mu \wedge \omega^\nu_\alpha = 0, \qquad \nu \neq \mu$$

Určíme geometrický význam fixace (16)

Mějme obálku systému nadrovin $\Gamma_\nu = (\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\nu)$. Především víme, že obálka je množina charakteristik, tj. průsečných útvarů dvou soumezných nadrovin při libovolném pohybu. Libovolný bod hledané charakteristiky je dán

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^\alpha \mathbf{e}_\alpha + x^\lambda \mathbf{e}_\lambda .$$

Tento bod leží v nadrovině Γ_ν, proto jeho souřadnice vyhovují rovnici této nadroviny:

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\nu) = 0,$$

z čehož plyne, že

(19) $$x^\mu = 0 \quad \text{pro} \quad \mu \neq \nu$$

Současně souřadnice bodu charakteristiky vyhovují rovnici

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\nu) = 0.$$

Druhá podmínka dává

(20) $$x^\alpha\omega^\mu_\alpha + x^\nu\omega^\mu_\nu = 0, \quad (\mu \neq \nu, \quad \text{pevné})$$

Za formy ω^μ_α, ω^μ_ν lze dosadit z (5), (14) a upravit (20) na tvar

$$(x^\alpha R^\mu_{\alpha\beta} + x^\nu R^\mu_{\nu\beta})\omega^\beta = 0, \quad \text{kde } \nu \text{ je pevné.}$$

Tato soustava musí být splněna při libovolném pohybu $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$, což dává soustavu tří lineárních homogenních rovnic pro x^α, x^ν:

(21) $$x^\alpha R^\mu_{\alpha\beta} + x^\nu R^\mu_{\nu\beta} = 0$$

Protože det $\|R^\mu_{\alpha\beta}\| = \Lambda^\mu \neq 0$, má soustava (21) hodnost $h = 3$ a můžeme x^α vypočítat pomocí x^ν. Bereme-li však v úvahu fixaci (16), dostaneme $x^\alpha = 0$ a hledaná charakteristika při libovolném pohybu Γ_ν je přímka daná

(22) $$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + x^\nu \mathbf{e}_\nu, \quad \text{kde } \nu \text{ je pevné.}$$

Tato přímka leží na trojrozměrné varietě obalované Γ_ν. Tím je dokázáno:

Věta 2. *Při reperáži (12) vektory* $\mathbf{e}_4$, *resp.* $\mathbf{e}_5$ *reperu patří do směru, který je určen charakteristikou obálky nadroviny* Γ_4, *resp.* Γ_5 *při libovolném pohybu po varietě.*

Vraťme se k ukončení specializace reperu. Vyjděme ze vztahů (17), diferencujeme je vnějšně a dostaneme pro variace $R^\alpha_{\mu\gamma}$ podle vedlejších parametrů vztahy

$$\delta R^\alpha_{\mu\gamma} - R^\alpha_{\mu\beta}\pi^\beta_\gamma + R^\beta_{\mu\gamma}\pi^\alpha_\beta - R^\alpha_{\nu\gamma}\pi^\nu_\mu = 0, \quad \nu \neq \mu \tag{23}$$

Hledejme nyní ohniska přímek $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_\nu)$. Je-li $\mathbf{X} = \mathbf{M} + x^\nu \mathbf{e}_\nu$ (ν pevně zvolené) ohnisko přímky $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_\nu)$, pak vektory $d\mathbf{X}$ a $\mathbf{e}_\nu$ jsou kolineární, což dává soustavu rovnic

$$\omega^\alpha + x^\nu\omega^\alpha_\nu = 0, \qquad x^\nu\omega^\mu_\nu = 0, \quad \text{pro} \quad \alpha = 1, 2, 3, \qquad \mu \neq \nu.$$

Když tuto soustavu rozepíšeme, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\omega^1(1 + R^1_{\nu1}x^\nu) + \omega^2 R^1_{\nu2}x^\nu + \omega^3 R^1_{\nu3}x^\nu = 0\\
&\omega^1 R^2_{\nu1}x^\nu + \omega^2(1 + R^2_{\nu2}x^\nu) + \omega^3 R^2_{\nu3}x^\nu = 0\\
&\omega^1 R^3_{\nu1}x^\nu + \omega^2 R^3_{\nu2}x^\nu + \omega^3(1 + R^3_{\nu3}x^\nu) = 0
\end{aligned} \tag{24}$$

Pro ohnisko dostaneme

$$\begin{vmatrix} 1 + R^1_{\nu1}x^\nu & R^1_{\nu2}x^\nu & R^1_{\nu3}x^\nu \\ R^2_{\nu1}x^\nu & 1 + R^2_{\nu2}x^\nu & R^2_{\nu3}x^\nu \\ R^3_{\nu1}x^\nu & R^3_{\nu2}x^\nu & 1 + R^3_{\nu3}x^\nu \end{vmatrix} = 0$$

což dává rovnici

$$(x^\nu)^3E^\nu + (x^\nu)^2F^\nu + x^\nu G^\nu + 1 = 0 \tag{25}$$

kde

$$\begin{aligned}
E^\nu &= \begin{vmatrix} R^1_{\nu1} & R^1_{\nu2} & R^1_{\nu3} \\ R^2_{\nu1} & R^2_{\nu2} & R^2_{\nu3} \\ R^3_{\nu1} & R^3_{\nu2} & R^3_{\nu3} \end{vmatrix}\\
G^\nu &= R^1_{\nu1} + R^2_{\nu2} + R^3_{\nu3}\\
F^\nu &= \begin{vmatrix} R^1_{\nu1} & R^1_{\nu2} \\ R^2_{\nu1} & R^2_{\nu2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R^1_{\nu1} & R^1_{\nu3} \\ R^3_{\nu1} & R^3_{\nu3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R^2_{\nu2} & R^2_{\nu3} \\ R^3_{\nu2} & R^3_{\nu3} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{26}$$

Pro variace těchto koeficientů dostáváme pak vztahy

$$\begin{aligned}
\delta F^4 &= 2F^4\pi^4_4, & \delta F^5 &= 2F^5\pi^5_5,\\
\delta E^4 &= 3E^4\pi^4_4, & \delta E^5 &= 3E^5\pi^5_5,\\
\delta G^4 &= G^4\pi^4_4, & \delta G^5 &= G^5\pi^5_5.
\end{aligned} \tag{27}$$

Za předpokladu, že $E^4 E^5 F^4 F^5 \neq 0$ lze provést následující fixaci:

$$E^4E^5 = F^4F^5 \tag{28}$$

Pak z $\delta(E^4E^5 - F^4F^5) = (3E^4E^5 - 2F^4F^5)(\pi_4^4 + \pi_5^5)$, protože je $3E^4E^5 - 2F^4F^5 \neq 0$, je $\pi_4^4 + \pi_5^5 = 0$, což spolu s (12) dává

$$\pi_4^4 = \pi_5^5 = 0, \qquad \pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 0. \tag{29}$$

Geometrický význam této volby je následující.

V rovnicích (25) je poměr F^ν/E^ν roven záporně vzatému součtu souřadnic ohnisek přímky $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_\nu)$. Podle (28) platí, že

$$\frac{F^4F^5}{E^4E^5} = 1 \tag{30}$$

Tedy známe li směry vektorů $\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$, fokální nadroviny a víme-li, že platí (30), jsou vektory $\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ určeny jednoznačně.

Nyní reper závisí na dvou sekundárních, nikoliv význačných parametrech. Jim podle (29) budou odpovídat na sobě závislé formy $\pi_1^1, \pi_2^2, \pi_3^3$. Budeme fixovat i tyto parametry.

Mějme nadrovinu určenou rovnicí

$$(\mathbf{X} - \mathbf{E}_\beta, \mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\nu, d(\mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu)) = 0, \tag{31}$$

kde $\mathbf{E}_\beta = \mathbf{M} + \mathbf{e}_\beta$, $\beta \neq \gamma$, $\nu \neq \mu$.

Hledejme průsečík této nadroviny s přímkou $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_\alpha)$, kde $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, $\alpha \neq \gamma$ při pohybu $\omega^\alpha = \omega^\beta = 0$. Je-li $\mathbf{X} = \mathbf{M} + t\mathbf{e}_\alpha$ hledaný průsečík, pak z rovnice (30) dostaneme podmínkou pro t

$$-t(R^\beta_{\nu\gamma} + R^\beta_{\mu\gamma}) - (R^\alpha_{\nu\gamma} + R^\alpha_{\mu\gamma}) = 0 \quad \text{pro} \quad \omega^\beta = \omega^\alpha = 0 \tag{32}$$

Pak položíme $R^\alpha_{\nu\gamma} + R^\alpha_{\mu\gamma} = R^\beta_{\nu\gamma} + R^\beta_{\mu\alpha}$ pro následující serii hodnot

$$\begin{matrix} \alpha = 1, & \beta = 2, & \gamma = 3; \\ \alpha = 2, & \beta = 3, & \gamma = 1; \end{matrix} \tag{33}$$

což podle (23) dává

$$0 = \pi_\gamma^\delta(R^\alpha_{\nu\delta} + R^\alpha_{\mu\delta} - R^\beta_{\nu\delta} - R^\beta_{\mu\delta}) - \pi_\delta^\alpha(R^\delta_{\nu\gamma} + R^\delta_{\mu\gamma}) + \pi_\delta^\beta(R^\delta_{\nu\gamma} + R^\delta_{\mu\gamma}). \tag{34}$$

Rozepíšeme-li (33) pro serii uvedených hodnot z (32), dostaneme z (33) formy π_1^1 a π_2^2 vyjádřeny jako lineární kombinace polosekundárních forem s koeficienty $R^\alpha_{\mu\beta}$.

Geometrický význam poslední fixace je tedy takový, že průsečík přímky $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_\nu)$ s nadrovinou $(\mathbf{X} - \mathbf{E}_\beta, \mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu, d(\mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu)) = 0$ je

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} - \mathbf{e}_\alpha \quad \text{pro} \quad \alpha = 1, 2 \tag{35}$$

Tím dostáváme polokanonický reper plochy Φ_3 v A^5 vzhledem k libovolné trojtkáni a tedy i vzhledem k danému systému anholonomních subvariet S. Je dán následující soustavou diferenciálních rovnic

$$\mathbf{dm} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha \qquad \omega^\mu = 0$$

$$\mathbf{de}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j \qquad \omega_\alpha^\mu = R_{\alpha\beta}^\mu \omega^\beta, \qquad \omega_\nu^\mu = R_{\nu\alpha}^\mu \omega^\alpha$$

při čemž platí

(36)
$$R_{\alpha\beta}^\mu = R_{\beta\alpha}^\mu \qquad \Lambda = \Lambda^* = 0,$$

$$\Lambda^4 = \Lambda^5 \neq 0, \qquad R_{\mu\alpha}^\nu = 0 \quad \text{pro} \quad \nu \neq \mu$$

a z (18) dostaneme $R_{\alpha\beta}^\nu R_{\mu\gamma}^\alpha - R_{\alpha\gamma}^\nu R_{\mu\beta}^\alpha = 0$ pro $\beta \neq \gamma$, dále $E^5E^4 = F^5F^4$

$$R_{\nu\gamma}^\alpha + R_{\mu\gamma}^\alpha = R_{\nu\gamma}^\beta + R_{\mu\gamma}^\beta \quad \text{pro} \quad \alpha = 1, 2; \quad \beta = 2, 3; \quad \gamma = 3, 1$$

Soustava vnějších rovnic je

(37)
$$(\mathrm{d}R_{\alpha\gamma}^\mu - R_{\alpha\beta}^\mu \omega_\gamma^\beta - R_{\beta\gamma}^\mu \omega_\alpha^\beta + R_{\alpha\gamma}^\nu \omega_\nu^\mu) \wedge \omega^\gamma = 0$$

$$R_{\alpha\beta}^\nu \omega_\mu^\alpha \wedge \omega^\beta = 0$$

$$(\mathrm{d}R_{\mu\gamma}^\alpha - R_{\mu\gamma}^\alpha \omega_\mu^\mu + R_{\mu\gamma}^\beta \omega_\beta^\alpha - R_{\mu\beta}^\alpha \omega_\gamma^\beta) \wedge a^\gamma = 0$$

Dá se ukázat, že řešení této soustavy závisí na osmi funkcích třech argumentů.

3. Kanonický reper variety Φ_3 vzhledem ke specielně zvolené trojtkáni

Vraťme se k (6) a zvolme na ploše konkrétní trojtkáň za souřadnicovou fixací

(38)
$$R_{\alpha\beta}^\mu = 0 \quad \text{pro všechna} \quad \alpha \neq \beta$$

Potom za předpokladu, že

(39)
$$\begin{vmatrix} R_{\alpha\alpha}^\mu & R_{\beta\beta}^\mu \\ R_{\alpha\alpha}^\nu & R_{\beta\beta}^\nu \end{vmatrix} = D_\gamma \neq 0$$

pro $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$, $\nu \neq \mu$, dostaneme z (6)

$$\pi_\beta^\alpha = 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta.$$

Dojdeme tak ke kanonickému reperu plochy Φ_3 vzhledem k trojtkáni na ploše (jsou anulovány všechny sekundární i význačné formy).

Určeme geometrický význam volby (38), (39).

Hledáme rovnici asymptotických křivek ve tvaru

$$(\mathrm{d}^2\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0.$$

Z uvedené podmínky získáme soustavu

(40) $$\omega^{\alpha}\omega^{\mu}_{\alpha} = 0, \qquad \omega^{\alpha}\omega^{\nu}_{\alpha} = 0 \quad \text{pro} \quad \nu \neq \mu$$

což lze rozepsat s ohledem na provedenou fixaci do

$$R^{4}_{11}(\omega^1)^2 + R^{4}_{22}(\omega^2)^2 + R^{4}_{33}(\omega^3)^2 = 0$$

$$R^{5}_{11}(\omega^1)^2 + R^{5}_{22}(\omega^2)^2 + R^{5}_{33}(\omega^3)^2 = 0$$

Pak platí $(\omega^1)^2 : (\omega^2)^2 : (\omega^3)^2 = D_1 : D_2 : D_3$ a tedy asymptotické směry jsou určeny

(41) $$\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = \begin{array}{lll} \sqrt{D_1} : & \sqrt{D_2} & \sqrt{D_3} \\ -\sqrt{D_1} : & \sqrt{D_2} & \sqrt{D_3} \\ \sqrt{D_1} : & -\sqrt{D_2} & \sqrt{D_3} \\ \sqrt{D_1} : & \sqrt{D^2} & -\sqrt{D_3} \end{array}$$

Naše fixace je tedy možná pro ty plochy, na nichž $D_\alpha \neq 0$. To jsou plochy, na nichž existuje v uvažovaném bodě čtyři různé asymptotické směry. Docházíme pak k tvrzení:

Věta 3. *Předpokládejme, že v uvažovaném bodě je $D_\alpha \neq 0$, pak v něm existují čtyři různé asymptotické směry a souřadné směry jsou zvoleny tak, že asymptotické směry jsou vyjádřeny pomocí* (41).

Variety připouštějící uvedené specielní souřadné směry lze charakterizovat též následujícím způsobem.

V reálném prostoru hledejme nadkvadriky, které mají s plochou Φ_3 v uvažovaném bodě $\boldsymbol{M}$ dotyk 2. Jejich rovnice hledáme ve tvaru

$$(\boldsymbol{r} * \boldsymbol{r}) + 2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}) + a_{00} = 0,$$

kde (*) znamená kvasiskalární součin dvou vektorů, pro který je $(\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_k) = a_{ik} = a_{ki}$ a operátor $(\boldsymbol{N}\boldsymbol{r})$ stejně jako kvasiskalární součin má vlastnost linearity a je zde položeno $(\boldsymbol{N}\mathbf{e}_i) = a_{0i}$ (viz [5]). Z podmínek

$$(\boldsymbol{M} * \boldsymbol{M}) + 2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}) + a_{00} = 0,$$

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{M} * \boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\boldsymbol{M}) = 0,$$

$$(\mathrm{d}^2\boldsymbol{M} * \boldsymbol{M}) + (\mathrm{d}\boldsymbol{M} * \mathrm{d}\boldsymbol{M}) + (\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{M}) = 0$$

dostaneme rovnici

(42) $$-R^{\mu}_{\alpha\beta}a_{0\mu}x^{\alpha}x^{\beta} + a_{\alpha\mu}x^{\alpha}x^{\mu} + a_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} + a_{0\mu}x^{\mu} = 0.$$

Průnik svazku kvadrik (42) s tečným prostorem v uvažovaném bodě $\boldsymbol{M}$ variety Φ_3 je svazek kvadratických kuželů o vrcholu v bodě $\boldsymbol{M}$ daný rovnicí

$$R^{\mu}_{\alpha\beta}\, a_{0\mu} x^{\alpha} x^{\beta} = 0\,. \tag{43}$$

Rovnici (43) lze nazírat v komplexním prostoru (kanonické vnoření).

Tento svazek lze protnout libovolnou rovinou, která neprochází vrcholem. Takto v uvažované rovině dostaneme svazek kuželoseček, jehož typ charakterizuje příslušný svazek kuželů.

Při fixaci (37) se rovnice svazku redukuje na tvar

$$R^{\mu}_{\alpha\alpha}\, a_{0\mu} (x^{\alpha})^2 = 0\,. \tag{44}$$

Uvažovaná rovina nechť je rovina $\varrho = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)$, kde $\boldsymbol{E}_{\alpha} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{e}_{\alpha}$ o rovnici

$$x^1 + x^2 + x^3 = 1\,. \tag{45}$$

Pak adjungované lineární formy k formě v (43) jsou

$$\boldsymbol{F}_{\alpha} = R^{\mu}_{\alpha\alpha}\, a_{0\mu} x^{\alpha}.$$

Z (45) plyne, že v rovině ϱ je $\boldsymbol{E}_{\gamma}$ pólem přímky $\boldsymbol{E}_{\alpha}\boldsymbol{E}_{\beta}$ ($\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$).

Ukázali jsme, že bod $\boldsymbol{E}_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) je hlavním bodem svazku (43), tj. bod, jehož polára vůči všem kuželosečkám svazku (43), (44) je pevná přímka. Tedy směry $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ jsou určeny hlavními body svazku a tudíž uvažujeme pouze takové variety, u kterých existují tři reálné hlavní směry.

Konečně lze provést třetí charakteristiku souřadných směrů. Formy

$$\varphi^4 = \omega^{\alpha}\omega^4_{\alpha}, \qquad \varphi^5 = \omega^{\alpha}\omega^5_{\alpha} \tag{47}$$

jsou invariantní formy plochy, patřící do okolí druhého řádu. Jejich bilineární formy jsou

$$\begin{aligned} \psi^4 &= \omega^{\alpha}\tilde{\omega}^4_{\alpha} = R^4_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}\tilde{\omega}^{\beta} \\ \psi^5 &= \omega^{\alpha}\tilde{\omega}^5_{\alpha} = R^5_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}\tilde{\omega}^{\beta} \end{aligned} \tag{48}$$

Definice 5. *Dvě subvarianty plochy Φ_3 určené formami ω^{α} a $\tilde{\omega}^{\alpha}$ se nazývají sdružené, jestliže současně anulují obě bilineární formy* (48) *plochy* Φ_3 (viz 3).

Geometrický význam fixace (37), která anulovala všechny zbývající formy π^{α}_{β} pro $\alpha \neq \beta$ je pak ten, že jednorozměrné subvarietě

$$\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} = 0, \quad \text{pro} \quad \alpha \neq \beta$$

je sdružená jediná subvarieta dvojrozměrná

$$\omega^{\gamma} = 0,$$

kde $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$, za předpokladu, že $R^4_{\gamma\gamma} \,.\, R^5_{\gamma\gamma} \neq 0$.

Poznámka 1. Analogický reper byl konstruován pro varietu Φ_3 v projektivním prostoru S^5 v práci [3]. Geometrický význam fixací (11), (12), (6) našeho článku je v podstatě týž jako v [3]. Odlišná je fixace (30). Její geometrický význam je v článku uveden.

Poznámka 2. Stejně lze postupovat v konstrukci reperu v obecném afinním prostoru až do posledního kroku specializace, kde k fixaci (33) by bylo ještě nutno připojit další, pro kterou by nastalo $\pi_3^3 = 0$ (nebo π_3^3 je lineární kombinací forem π_β^α, $\alpha \neq \beta$). Ekviafinní charakter našeho reperu by zřejmě vynikl až při hledání geometrického významu invariantů variety.

LITERATURA

[1] ФИНИКОВ, С. М.: Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.

[2] ИВЛЕВ, Е. Т.: О репераже систем неголономных подмногообразий трехм рной поверхности в пятимерном проективном пространстве. Геом. сборник, 191, 1967, № 6.

[3] ЩЕРБАКОВ, Р. Н.: Курс аффинной и проективной дифференсиальной геометрии. Томск, 1960.

[4] HEJNÝ, M.: Všeobecný komplex priamok v Kleinovom obraze. [Habilitační spis. Bratislava 1967. — Komenského univerzita.

[5] KOLÁŘ, I.: Užití Cartanových metod ke studiu obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném projektivním prostoru. Rozpravy ČSAV, *77*, 1967.

Došlo 3. 11. 1969

Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecké fakulty University Palackého
Olomouc

SPECIALIZATION OF THE SYSTEM OF ANHOLOMICAL SUBVARIETES OF THE THREEDIMENSIONAL VARIETY IN THE UNIMODULAR FIVEDIMENSIONAL SPACE

Libuše Marková

Summary

The set which consists of one point M of the variety Φ_3 and five linear independent vectors for which the equation $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5) = 1$ is valid, we call the general moving frame $\mathscr{R}$ of the variety Φ_3 in unimodular fivedimensional space. It depends on the principal parametres, on the prominent parametres of the system S of the variety Φ_3 and on the other parametres that we call the secondary parámetres of the moving frame. The moving frame $\mathscr{R}$ of the variety Φ_3, which depends only on principal and prominent parametres of the system S is called a semicanonical moving frame of the variety Φ_3 in accordance with the system S.

The aim of this article is to give the geometrical characterization of every step of the specialization of the moving frame, which means the geometrical interpretation of performed specialization of secondary parametres.

Geometrically this semicanonical moving frame is characterized as follows: Its vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ lie in the tangent space of the point $\mathbf{M}$ of the variety, coordinate hyperplanes $\Gamma_\mu = (\mathbf{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\mu)$, $\mu = 4,5$ are chosen in such a way that double the ratio w_1, or w_2 respectively of the hyperplane Γ_4, Γ_5, resp., with a triple of focal hyperplanes satisfies the equations $w_1 + w_2 = 1$, $w_1^{-1} + w_2^{-1} = 1$. The vectors $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, resp. belong to the direction, which is determined by the characteristic line of the envelope of the focal hyperplane Γ_4, Γ_5, resp. in arbitrary motion along the variety.

Finally there is constructed the moving frame $\mathcal{R}$ of the variety Φ_3, which depends only on the principal parametres and is attached to the system S of subvarieties.