Matematicko-fyzikálny časopis

Anton Kotzig

О разложениях полного графа на $4k$-угольники

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 15 (1965), No. 3, 229--233

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126738`

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 3, 1965

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПОЛНОГО ГРАФА НА $4k$-УГОЛЬНИКИ

АНТОН КОЦИГ (ANTON KOTZIG), Братислава

Пусть n — произвольное натуральное число. Через K_n мы будем обозначать полный граф с n вершинами. Под разложением некоторого графа G на r-угольники мы будем понимать такое множество r-угольников $\bar{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, что каждый r-угольник из $\bar{Q}$ содержит только ребра из G и каждое ребро из G принадлежит одному и только одному r-угольнику из $\bar{Q}$. Мы ответим на вопрос о том, для каких n существует разложение графа K_n на $4k$-угольники в случае, когда числа n, $4k$ — взаимно простые. Но раньше мы опишем способ построения разложения графа K_n на $4k$-угольники для более общего случая, когда $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$. Мы докажем справедливость следующей теоремы:

Теорема 1. *Если для натуральных чисел n, k имеет место $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$, то существует хотя бы одно разложение графа K_n на $4k$-угольники.*

Доказательство. Пусть $n = 8kp + 1$, где p — произвольное натуральное число. Отдельные вершины графа K_n обозначим через $1, 2, \ldots, n$ и условимся, что символы x, y (где x, y — два произвольных целых числа) будут обозначать одну и ту же вершину графа K_n, если имеет место $x \equiv y \pmod{n}$. Пусть $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Будем говорить, что ребро $h_{i,j}$, соединяющее вершины i, j, имеет длину δ, если кратчайший из путей, соединяющих вершины i, j в гамильтоновой окружности $H = (1, h_{12}, 2, h_{23}, \ldots, n, h_{n,1}, 1)$, содержит δ ребер. Очевидно, для произвольного $\delta = 1, 2, \ldots, 4kp$ справедливо: граф K_n содержит ровно n ребер длины δ. Очевидно также, что K_n не содержит никакого ребра с длиной большей чем $4kp$.

Пусть i — произвольное число из $\{1, 2, \ldots, p\}$ и пусть последовательность $Y_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,4k})$ определена следующим образом (см. рис. 1 и 2):

(1) если $j = 2q - 1$, где $q = 1, 2, \ldots, 2k$, то $y_{i,j} = q - 1$;
(2) если $j = 2r$, где $r = 1, 2, \ldots, k$, то $y_{i,j} = 4ik - r + 1$;
(3) если $j = 2s$, где $s = k + 1, k + 2, \ldots, 2k$, то $y_{i,j} = 4ik - s$.

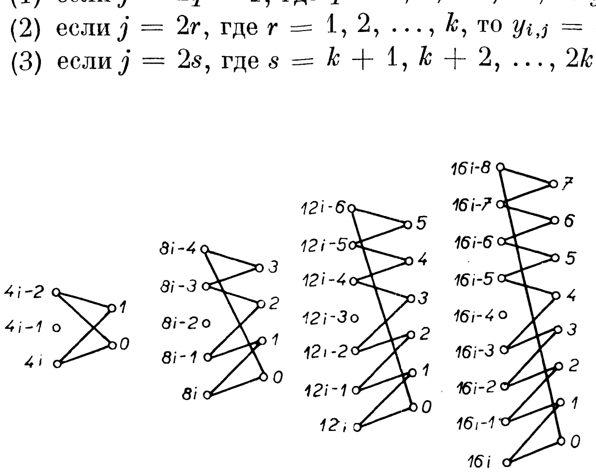

Рис. 1.

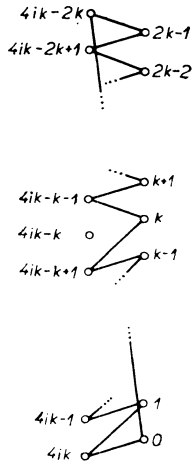

Рис. 2.

Пусть x — произвольное число из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Через $Q_{i,x}$ обозначим тот $4k$-угольник графа K_n, через вершины которого мы проходим в том порядке, в каком они находятся в последовательности $V = (x + y_{i,1}, x + y_{i,2}, \ldots, x + y_{i,4k})$. При указанном прохождении после прохождения вершины $x + y_{i,4k}$ мы, очевидно, вернемся в вершину $x + y_{i,1}$. Заметим, что при указанном построении последовательности Y_i произвольная вершина из K_n в последовательности V фигурирует не более одного раза. Из построения последовательности Y_i следует также, что длины ребер из K_n, соединяющих соседние члены (= вершины) последовательности V, образуют последовательность:

$$4ik, 4ik - 1, \ldots, 4ik - 2k + 1, 4ik - 2k - 1, 4ik - 2k - 2, \ldots, 4ik - 4k - 1$$

и ребро длиной $4ik - 2k$ соединяет последнюю вершину последовательности V с ее первой вершиной. Но это означает, что всякие два отличные друг от друга ребра из $Q_{i,x}$ имеют неравную длину и что длины ребер из $Q_{i,x}$ образуют множество $\{4(i - 1)k + 1, 4(i - 1)k + 2, \ldots, 4(i - 1) + 4k\}$. Поэтому справедливо: окружность $Q_{1,x}$ содержит ребра длины $1, 2, \ldots, 4k$, окружность $Q_{2,x}$ — ребра длины $4k + 1, 4k + 2, \ldots, 8k$, и т. д., наконец, окружность $Q_{p,x}$ содержит ребра длины $4k(p - 1) + 1, 4k(p - 1) + 2, \ldots, 4kp$. Но из построения окружностей $Q_{i,x}$ очевидно также следующее: если x, y — две разные числа из $\{1, 2, \ldots, n\}$, то окружности $Q_{i,x}$, $Q_{i,y}$ не имеют общего ребра. Так как при $i \neq j$ окружности $Q_{i,x}$, $Q_{j,y}$, очевидно, также не могут иметь никакого общего ребра, то справедливо: множество $Q = \{Q_{1,1}, \ldots, Q_{1,n}, Q_{2,1}, \ldots, Q_{2,n}, \ldots, Q_{p,1}, \ldots, Q_{p,n}\}$ является разложением графа K_n на $4k$-угольники. Это доказывает теорему 1.

Теорема 2. *Пусть числа n, $4k$ — взаимно простые, тогда граф K_n можно разложить на $4k$-угольники тогда и только тогда, когда выполняется: $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что если выполнены условия $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$, то граф K_n можно разложить на $4k$-угольники. Значит, остается доказать, что разложение графа K_n на $4k$-угольники при взаимно простых n, $4k$ существует только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod{8k}$. Известно (см., например, Кениг [1], стр. 23, теорема 6), что граф можно разложить на окружности тогда и только тогда, когда всякая его вершина имеет четную степень. Но это означает, что граф K_n можно разложить на окружности тогда и только тогда, когда n — нечетное число. Но, кроме того, справедливо еще и следующее: граф K_n можно разложить на $4k$-угольники только тогда, когда число его ребер делится на число $4k$. Значит, для того, чтобы граф K_n разлагался указанным образом, должно выполняться:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) \equiv 0 \pmod{4k} \Rightarrow n(n-1) \equiv 0 \pmod{8k}$$

и так как, согласно условию, числа n, $4k$ — взаимно простые, то должно быть $n \equiv 1 \pmod{8k}$. Это доказывает теорему 2.

Следствием теоремы 2 является следующая теорема:

Теорема 3. Пусть p — произвольное натуральное число > 1. Граф K_n можно разложить на $2p$-угольники тогда и только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod{2^{p+1}}$, $n > 1$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 ясно, что n должно быть нечетным числом. Но тогда числа n, 2^p (где p — натуральное число) взаимно просты, и согласно теореме 2 граф K_n можно разложить на $4k = 2^p$-угольники тогда и только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$. Это доказывает теорему 3.

Примечание 1. Значительно сложнее те случаи, когда числа $4k$, n из теоремы 2 — не взаимно простые. Дело в том, что тогда условие $n \equiv 1 \pmod{8k}$, хотя и является достаточным (см. теорему 1), но не является необходимым условием. Так, например, граф K_{33} можно разложить на 44 двенадцатиугольников, хотя $33 \equiv 9 \pmod{24}$. Опишем одно из таких разложений. Обозначим через $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{44}$ отдельные двенадцатиугольники этого разложения. Пусть последовательность $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\ldots$,

$q_{12}(x)$ описывает порядок, в каком мы пробегаем через отдельные вершины двенадцатиугольника Q_x при прохождении через него. Описание этих последовательностей для $x = 1, 2, \ldots, 44$ содержит таблица 1.

Таблица 1

$x = 1, 2, \ldots, 11.$	$x = 12, 13, \ldots, 44.$
$q_1(x) = x$	$q_1(x) = x$
$q_2(x) = x + 16$	$q_2(x) = x + 2$
$q_3(x) = x + 3$	$q_3(x) = x + 5$
$q_4(x) = x + 10$	$q_4(x) = x + 9$
$q\ (x) = x + 11$	$q_5(x) = x + 14$
$q_6(x) = x + 27$	$q_6(x) = x + 20$
$q_7(x) = x + 14$	$q_7(x) = x + 28$
$q_8(x) = x + 21$	$q_8(x) = x + 4$
$q\ (x) = x + 22$	$q_9(x) = x + 15$
$q_1\ (x) = x + 5$	$q_{10}(x) = x + 25$
$q_{11}(x) = x + 25$	$q_{11}(x) = x + 6$
$q_{12}(x) = x + 32$	$q_{12}(x) = x + 21$

Примечание 2. Автору не известно, существует ли разложение графа K_{25} на пятнадцать 20-угольников.

ЛИТЕРАТУРА

[1] König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

Поступило 10. 7. 1964.

Katedra numerickej matematiky
a matematickej štatistiky
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava

ON THE DECOMPOSITION OF A COMPLETE GRAPH INTO $4k$-GONS

Anton Kotzig

Summary

Let r be a natural number > 2. By the decomposition of the given graph G into r-gons we mean such a set D of r-gons, where each r-gon from D contains only edges from G and each edge from G belongs to exactly one r-gon from D. The paper proves the following theorems about the decomposition of a complete graph K_n with n vertices into $4k$-gons:

Theorem 1. If for the natural numbers n, k we have $n \equiv 1 \pmod{8k}$ and $n > 1$, then there exists at least one decomposition of the graph K_n into $4k$-gons.

Theorem 2. Let the numbers n, $4k$ be relatively prime, then the graph K_n can be decomposed into $4k$-gons if and only if $n \equiv 1 \pmod{8k}$.

Theorem 3. Let p be any natural number > 1. The graph K_n can be decomposed into 2^p-gons if and only if $n \equiv 1 \pmod{2^{p+1}}$, $n > 1$.

The author demonstrates on concrete example (the decomposition of the graph K_{33} into 12-gons) that the condition $n \equiv 1 \pmod{8k}$, $n > 1$, is not a necessary condition when n, $4k$ are not coprime numbers.