Matematický časopis

Imrich Abrhan

О минимальных множествах образующих в унарных алгебрах

Matematický časopis, Vol. 25 (1975), No. 4, 305--317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126674

MATEMATICKÝ ČASOPIS

ROČNÍK 25 1975 ČÍSLO 4

О МИНИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ОБРАЗУЮЩИХ В УНАРНЫХ АЛГЕБРАХ

ИМРИХ АБРГАН (IMRICH ABRHAN)

В работах [8] и [9] изучаются полугруппы, содержающие точно один, напр., максимальный левый идеал, и он обозначается через L^*.

Пусть $\langle S; .\rangle$ — полугруппа, L — левый идеал полугруппы $\langle S; .\rangle$ и $L \neq S$. Тогда: $L = L^*$ тогда и только тогда, когда $S = a \cup S\,.\,a$ для каждого $a \in S \setminus L$ (см. [1]). В работах [4], [10] изучаются свойства таких полугрупп, в которых существует непустое минимальное подмножество A множества S, для которого $S = A \cup S\,.\,A$. Эта проблема связана с изучением свойств таких унарных алгебр, в которых существует минимальное множество образующих.

В настоящей работе изучаются свойства:

а) минимальных множеств образующих в унарных алгебрах,

б) максимальных собственных подалгебр и пересечения максимальных собственных подалгебр в унарной алгебре — при помощи ее минимального множества образующих,

в) таких подалгебр в унарной алгебре, которые содержат по крайней мере один элемент из ее минимального множества образующих.

Наконец мы сделаем примечание, каким образом при помощи утверждений о минимальных множествах образующих и подалгебрах в унарных алгебрах, доказанных в этой работе, мы получаем к этим утверждениям аналогичные утверждения, напр., о минимальных множествах образующих и о инвариантных подмножествах в (S, T)-биоперандах (см. [3]).

В статье мы будем пользоваться следующими обозначениями:

X/σ обозначает множество всех σ-классов, соответствующих отношению эквивалентности σ на множестве X;

$[x]\sigma$ обозначает σ-класс из X/σ, содержающий элемент x из множества X,

$|X|$ обозначает мощность множества X;

$\emptyset$ обозначает пустое множество;

$X \subset Y$ обозначает, что X — собственное подмножество множества Y, в отличие от $X \subseteq Y$;

A обозначает алгебру (под алгеброй **A** мы подразумеваем пару $\langle A; F$, где A — непустое множество и F система коначных операций, определенных на A см. [5], [7]);

$\mathscr{P}(\mathbf{A})$ обозначает множество всех тех непустых подмножеств N множества A, что $\langle N; F\rangle$ (F в $\langle N; F\rangle$ — ограничение F на N)-подалгебра алгебры **A**.

$[H]$ обозначает такой элемент из $\mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $\langle [H]; F\rangle$ — подалгебра в **A** порожденная непустым подмножеством H множества A (см. [4]). Вместо обозначения $[\{x\}]$, где $x \in A$ мы пользуемся обозначением $[x]$. $\langle[\emptyset]; F\rangle$ — обозначает подалгебру, порожденную значениями 0 — арных опораций из F, если такие в F существуют (см. [5]). $[\emptyset] = \emptyset$ тогда и только тогда, когда F не содержит 0-арных операций (очевидно $[\emptyset] \subseteq N$ для всех $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$).

$\mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ ($\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$) обозначает множество всех тех элементов $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $\langle N; F\rangle$ является минимальной (максимальной собственной) подалгеброй алгебры **A** (подалгебру $\langle N; F\rangle$ алгебры **A** назовем минимальной (максимальной собственной), если $N \neq [\emptyset]$ ($N \neq [\emptyset]$, $N \neq A$) и не существует такой элемент $N' \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $[\emptyset] \subset N' \subset N (N \subset N' \neq A)$). Положим $\cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A}) = \cup \{N \mid N \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})\}$ ($\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \cap \{N \quad N \in \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})\}$).

Для простоты формулировки утверждений в настоящей работе мы предположим, что $[\emptyset] = \emptyset$.

Определения понятий, встречающихся и не определенных в этой работе, найдет читатель напр. в [3], [5], [7].

Лемма 1. *Пусть* **A** *— унарная алгебра и пусть* $N_i \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *для всех* $i \in I$ (I *— непустое множество индексов). Тогда* $\cup \{N_i \mid i \in I\} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$.

Доказательство. См., напр. [7].

Теорема 1. *Пусть* **A** *— унарная алгебра и* $H \subseteq A$, $H \neq \emptyset$. *Тогда* $[H] = \cup \{[h] \mid h \in H\}$.

Доказательство. Очевидно, $\cup \{[h] \mid h \in H\} \subseteq [H]$. Так как $H \subseteq \cup \{[h] \mid h \in H\}$ и согласно лемме 1 $\cup \{[h] \mid h \in H\} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, то $[H] \subseteq \cup \{[h] \mid h \in H\}$. Следовательно, $[H] = \cup \{[h] \mid h \in H\}$.

Определение 1. *Пусть* **A** *— алгебра. Мы скажем, что непустое подмножество* B *множества* A *есть минимальное множество образующих алгебры* **A**, *если* $A = [B]$ *и не существует такое непустое множество* $B' \subset B$, *что* $A = [B']$.

Пример 1. Пусть $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и бинарная операция . на S определена таблицей

.	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	a	b	e	f	e	f
b	b	a	b	a	f	e	f	e
c	c	d	c	d	h	g	g	h
d	d	c	d	c	g	h	h	g
e	a	b	b	a	e	f	e	f
f	b	a	a	b	f	e	f	e
g	d	c	c	d	g	h	g	h
h	c	d	d	c	h	g	h	g

Тогда $\langle S; .\rangle$ — полугруппа и $\langle H = \{a, c\}; .\rangle$, $\langle T = \{e, g\}; .\rangle$ — подполугруппы полугруппы $\langle S; .\rangle$. Если каждому элементу $h \in H (t \in T)$ сопоставлена унарная операция $f_h(f_t)$ на S и определена следующим образом: $f_h(x) = h . x (f_t(x) = x . t)$ для каждого элемента $x \in S$ и если положим $F_1 = \{f_h \mid h \in H\}$, $F_2 = \{f_t \mid t \in T\}$ и $F = F_1 \cup F_2$, то $\langle S; F\rangle$ есть унарная алгебра. Множества $B_1 = \{a, b\}$, $B_2 = \{a, d\}$, $B_3 = \{b, c\}$, $B_4 = \{c, d\}$ — это четыре разных минимальных множеств образующих в $\langle S; F\rangle$, никакого иного минимального множества образующих в $\langle S; F\rangle$ не существует.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *алгебра. На множестве A мы определим отношение $\mathscr{I}$ следующим образом. Скажем, что два элемента $x, y \in A$ находятся в отношении $\mathscr{I}$, если $[x] = [y]$. Очевидно, отношение $\mathscr{I}$ на A является отношением эквивалентности.*

Лемма 2. *Пусть B — минимальное множество образующих алгебры* $\mathbf{A}$. *Тогда $[a]\mathscr{I} \cap [b] = \emptyset$ для всех $a \in B, b \in B$ и $a \neq b$.*

Доказательство. Пусть $c \in [a]\mathscr{I} \cap [b]$. Тогда $[a] = [c] \subseteq [b]$. Значит $b \in B' = B \setminus \{a\}$ и $a \in [b]$. Очевидно $[B'] \subseteq [B]$. Так как $B = B' \cup \{a\}$ и $a \in [b] \subseteq [B']$, то $B \subseteq [B']$. Следовательно, $A = [B']$. Это противоречит тому, что $B' \subset B$ и B — минимальное множество образующих в $\mathbf{A}$.

Теорема 2. *Непустое подмножество B множества A есть минимальное множество образующих унарной алгебры* $\mathbf{A}$ *тогда и только тогда, когда имеют место условия:*

(*а*) *Для каждого элемента $x \in A$ существует такой элемент $b \in B$, что $x \in [b]$.*

(б) *Если $a \in B$, $b \in B$* и *$a \in [b]$*, то *$a = b$.*

Доказательство. I. Пусть B — минимальное множество образующих унарной алгебры $\mathbf{A}$. Согласно теореме 1 $A = \cup \{[b] \mid b \in B\}$. Из этого следует (а). Условие (б) непосредственно следует из леммы 2.

II. Пусть для непустого подмножества В иножества A имеет место (а) и (б). Из (а) вытекает $A \subseteq \cup \{[b] \mid b \in B\}$. Согласно теоремме 1 мы получаем $A = [B]$. Предположим, что существует такое непустое подмножество B' множества B, что $A = [B']$ и $B' \neq B$. Отсюда по теореме 1 мы получаем $A = \cup\{[b] \mid b \in B'\}$. Пусть $a \in B \setminus B'$. Тогда существует такой элемент $d \in B'$, что $a \in [d]$. В силу (б) мы получаем $a = d$. Это противоречит тому, что $a \in B \setminus B'$ и $d \in B'$.

Теорема 3. *Пусть B — минимальное множество образующих алгебры A. Пусть $a \in B$, $c \in [a]\mathscr{I}$ и $c \neq a$. Тогда $B' = (B \setminus \{a\}) \cup \{c\}$ является минимальным множеством образующих алгебры $\mathbf{A}$ и $B' \neq B$.*

Доказательство. Очевидно, $B \subseteq \cup\{[b]\mathscr{I} | b \in B\} = \cup\{[b']\mathscr{I}\ b' \in B'\} \subseteq [B']$. Значит $A = [B']$.

Пусть $\emptyset \neq B_1 \subset B'$ и $A = [B_1]$. Так как B — минимальное множество образующих алгебры $\mathbf{A}$, то $c \in B_1$. Имеется $d \in B \setminus B_1$, $d \neq a$. Тогда $B_1 \subseteq \cup\{[b]\mathscr{I} \mid b \in B_1\} \subseteq [B \setminus \{d\}]$. Отсюда $A = [B \setminus \{d\}]$. Это противоречит тому, что B — минимальное множество образующих алгебры $\mathbf{A}$ и $B \setminus \{d\} \subset B$.

Теорема 4. *Пусть B и B' — произвольные минимальные множества образующих унарной алгебры A. Тогда*

(а) $B' \cap [b]\mathscr{I}$ *содержит точно один элемент для каждого* $b \in B$.

(б) $B' \subseteq \cup\{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.

(в) $|B'| = |B|$.

Доказательство. а) Пусть b — произвольный элемент из B. Так как B и B' — минимальные множества образующих в $\mathbf{A}$, то по теореме 2 существует такой элемент $a \in B'$ и такой элемент $c \in B$, что $b \in [a]$ и $a \in [c]$, т. е. $b \in [c]$. Согласно теореме 2 мы получаем $b = c$. Следовательно $[a] = [b]$. Это значит, что $a \in [b]\mathscr{I}$. Предположим, что $a' \in B' \cap [b]\mathscr{I}$. Тогда $[a] = [b] = [a']$. Отсюда следует $a \in [a']$. Следовательно, согласно теореме 2 мы имеем $a = a'$.

б) Пусть $x \in B'$. Тогда по теореме 2 существует такое $b \in B$ и такое $b' \in B'$, что $x \in [b]$ и $b \in [b']$. Значит $x \in [b']$. Отсюда по теореме 2 следует, что $x = b$, т. е. $x \in [b]\mathscr{I}$.

в) Ввиду (а) $B' \cap [b]\mathscr{I} = \{a\}$, $a \in B'$ для всех $b \in B$.

Отсюда по (а), (б) и лемме 2 мы получаем, что существует взаимно однозначное отображение φ множества B на B', которое определено следующим образом: $b\varphi = a \in B'$ тогда и только тогда, когда $a \in [b]\mathscr{I}$. Следовательно, $|B| = |B'|$.

Обозначим через $\mathscr{B}(\mathbf{A})$ множество всех минимальных множеств образующих алгебры $\mathbf{A}$ и положим $\cup\mathscr{B}(\mathbf{A}) = \cup\{B \mid B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})\}$.

Теорема 5. *Пусть $\mathbf{A}$ — унарная алгебра и пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Тогда $\cup\mathscr{B}(\mathbf{A}) = \cup\{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.*

Доказательство. I. Согласно теореме 4 мы получаем $\cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \subseteq \subseteq \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.

II. Пусть c-произвольный элемент из $\cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$. Тогда существует такой элемент $a \in B$, что $c \in [a]\mathscr{I}$. Если $c = a$, то $c \in B \subseteq \cup \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Если $c \neq a$, то согласно теореме 3, мы имеем, что $B' = (B \setminus \{a\}) \cup \{c\}$ является минимальным множеством образующих алгебры $\mathbf{A}$. Из этого вытекает $c \in B' \subseteq \cup \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Следовательно, $\cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\} \subseteq \cup \mathscr{B}(\mathbf{A})$.

Определение 3. *Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра. На множестве $A/\mathscr{I}$ определим отношение $\leq$ следующим образом: $[x]\mathscr{I} \leq [y]\mathscr{I} (x, y \in A)$ тогда и только тогда, когда $[x] \subseteq [y]$. Алгебру $\mathbf{A}$ назовем $\mathscr{I}$ — простой, если не существует такой элемент $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $N \neq A$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{A}$ — унарная алгебра. Пусть $a \in A$ и $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Тогда $[a]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$ тогда и только тогда, когда существует такое $b \in B$, что $[a]\mathscr{I} = [b]\mathscr{I}$.*

Доказательство. I. Пусть $[a]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$. Тогда по теореме 2 существует такой элемент $b \in B$, что $a \in [b]$, т. е. $[a] \subseteq [b]$. Следовательно, $[a]\mathscr{I} \leq [b]\mathscr{I}$. Из этого, согласно предположению, мы получаем $[a]\mathscr{I} = [b]\mathscr{I}$ и $b \in B$.

II. Пусть $[a]\mathscr{I} = [b]\mathscr{I}$, где $b \in B$. Пусть $[a]\mathscr{I} \leq [x]\mathscr{I}$, где $x \in A$. По теореме 2 существует такой элемент $c \in B$, что $x \in [c]$. Отсюда следует $b \in [c]$. Согласно теореме 2 мы получаем $b = c$. Из этого вытекает, что $[x]\mathscr{I} \leq [b]\mathscr{I}$. Значит $[x]\mathscr{I} \leq [a]\mathscr{I}$. Из предыдущего мы получаем, что $[a]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$.

Лемма 4. *Алгебра $\mathbf{A}$ является $\mathscr{I}$ — простой тогда и только тогда, когда $\{b\} \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$ для каждого $b \in A$.*

Доказательство очевидно.

Следствие 1. *Алгебра $\mathbf{A}$ является $\mathscr{I}$ — простой тогда и только тогда, когда $A = [x]\mathscr{I}$, где $x \in A$.*

Теорема 6. *Алгебра $\mathbf{A}$ есть $\mathscr{I}$ — простой тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$, $|B| = 1$ для каждого $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$ и $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$.*

Доказательство очевидно.

В работе [2] мы доказали теорему 3, точная формулировка которой должна быть следующая:

Пусть унарная алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathscr{I}$ — простой и пусть $N \subseteq A$. Тогда:

$N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда существует такое $x \in A$, что $N = A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$.

Теорема 7. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой и пусть* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. *Тогда:*

(а) *если* $N \subseteq A$ *и* $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, *то существует такое* $b \in B$ *что* $N = A \setminus [b]\mathscr{I}$,

(б) $A \setminus [b]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *для всех* $b \in B$.

Доказательство. Утверждение теоремы 7 мы получаем непосредственно из теоремы 3 в [2], леммы 3 и следствия 1.

Теорема 8. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой и пусть* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. *Тогда существует взаимно однозначное отображение множества* B *на* $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$.

Доказательство. Согласно теореме 7 существует отображение φ множества B на $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, которое определено следующим образом: $b\varphi = A \setminus [b]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Покажем, что φ является взаимно однозначным. Предположим, что $a \in B$, $b \in B$ и $a\varphi = b\varphi$, то есть $A \setminus [a]\mathscr{I} = A \setminus [b]\mathscr{I}$. Отсюда следует $[a]\mathscr{I} = [b]\mathscr{I}$. Следовательно, $a \in [b]\mathscr{I}$. Из этого по теореме 2 мы получаем $a = b$.

Определение 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *алгебра. Элемент* $a \in A$ *называем необразующим в* A, *если для любого подмножества* X *множества* A *равенство* $[X \cup \{a\}] = A$ *влечет за собой равенство* $[X] = A$ (см. 7). *Множество всех необразующих элементов в* A *обозначим через* $\Phi(\mathbf{A})$.

Теорема 9. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой и пусть* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. *Положим* $C = \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.

Тогда: (а) $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$,

(б) $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = A \setminus C$,

(в) $\Phi(\mathbf{A}) = A \setminus C$.

Доказательство. Согласно теореме 7, мы получаем, что $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ и $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \cap \{A \setminus [b]\mathscr{I} \mid b \in B\} = A \setminus \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$. Отсюда вытекает утверждение (а) и (б).

Теперь мы докажем утверждение (в).

I. Пусть a — произвольный элемент из $\Phi(\mathbf{A})$. Предположим, что $a \notin A \setminus C$. Тогда по теореме 5 существует такой элемент $B' \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$, что $a \in B'$. Положим $X = B' \setminus \{a\}$. Тогда $A = [X']$, где $X' = X \cup \{a\} = B'$. Так как $B' \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$ и $X \subset B'$, то $A \neq [X]$. Значит, $a \notin \Phi(\mathbf{A})$. Это противоречит тому, что $a \in \Phi(\mathbf{A})$. Отсюда $\Phi(\mathbf{A}) \subseteq A \setminus C$.

II. Пусть $A \setminus C \neq \emptyset$ и пусть a - любой элемент из $A \setminus C$. Пусть X такое подмножество множества A, что $A = [X']$, где $X' = X \cup \{a\}$. Предположим, что существует такой элемент $b \in B$, что $X \cap \{b\}\mathscr{I} = \emptyset$. Согласно теореме 7 мы имеем, что $A \setminus [b]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ и ввиду (б) имеет место $A \setminus C \subseteq A \setminus [b]\mathscr{I}$. Тогда $A = [X'] \subseteq A \setminus [b]\mathscr{I}$. Значит, $A = A \setminus [b]\mathscr{I}$. Это противоречит тому, что $[b]\mathscr{I} \neq \emptyset$. Отсюда вытекает $X \cap [b]\mathscr{I} \neq \emptyset$

для каждого $b \in B$. На основании аксиомы выбора существует такое подмножество B' множества X, что $B' \cap [b]\mathscr{I} = \{b'\}$, т. е. $B' \cap [b]\mathscr{I}$ содержит точно один элемент b' для каждого $b \in B$. Так как $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$, то согласно теореме 1 мы получаем $A = [B] = [B'] \subseteq [X]$. Значит, $A = [X]$. Это означает что $a \in \Phi(\mathbf{A})$. Из предыдущего вытекает, что $A \setminus C \subseteq \Phi(\mathbf{A})$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра и пусть* $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$. *Пусть такое подмножество множества* A, *что* $B \cap N$ *содержит точно один элемент для каждого* $N \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$. *Тогда* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$.

Доказательство. На основании аксиомы выбора существует такое подмножество B множества A, что для каждого $N \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ содержит $B \cap N$ точно один элемент. Пусть x — произвольный элемент из A. Тогда согласно предположению существует такой элемент $N_1 \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$, что $x \in N_1$. Из этого по лемме 5 из [2] мы получаем $x \in [b]$, где $b \in B \cap N_1$. Пусть $b_1, b_2 \in B$ и пусть $b_1 \in [b_2]$. Тогда существует такой элемент $N_2 \in \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$, что $b_2 \in N_2$. Значит, $b_1, b_2 \in N_2$. Отсюда по предположению имеет место $b_1 = b_2$. Из предыдущего по теореме 2 следует $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$.

Теорема 10. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой. Тогда:*
$A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ *и* $|\mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})| \geq 2$.

Доказательство. I. Пусть $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$. Тогда $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. Из этого по теореме 5, теореме 9 и теореме 5 из [2], мы получаем $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ и $|\mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})| \geq 2$.

II. Пусть $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ и $|\mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})| \geq 2$. Тогда согласно лемме 5 мы получаем $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. Из этого по теореме 5 из [2], теореме 9 и теореме 5, мы получаем, что $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$.

Из теорем 6, 10 непосредственно следует:

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра. Тогда* $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$, *тогда и только тогда, когда* $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$.

Теорема 11. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра и пусть* $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. *Тогда* $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ *и* $|B| = 1$ *для всех* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$.

Доказательство. I. Пусть $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ и пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Отсюда следует, что алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathscr{I}$ — простой. Тогда, согласно теореме 7, мы получаем $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = A \setminus [c]\mathscr{I}$, где $c \in B$, т. е. $\cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = [c]\mathscr{I}$. Отсюда вытекает $B \subseteq [c]\mathscr{I}$. Это значит, что $[b] = [c]$ для каждого $b \in B$. Согласно теореме 1, мы получаем $A = [B] = [c]$, т. е. $|B| = 1$. Из предыдущего вытекает $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$ и $|B| = 1$ для всех $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$.

II. Пусть $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ и $|B| = 1$ для $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Тогда $A = [a]$ для всех $a \in \cup \mathscr{B}(\mathbf{A})$ и $A \neq [x]$ для всех $x \in A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Следовательно, алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathscr{I}$ — простой. Согласно теореме 9 и теореме 5, мы получаем $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Тогда $[b] \subseteq A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq A$ для всех $b \in A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Это значит, что $\cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = [c]\mathscr{I}$, т. е. $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = A \setminus [c]\mathscr{I}$, где $c \in \cup \mathscr{B}(\mathbf{A})$. Из этого, согласно теореме 7, мы получаем что $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$.

Из теорем 5, 9, 11 вытекает

Теорема 12. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой и пусть* $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. *Тогда:* $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ *и* $|B| = 1$ *для* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$.

Теорема 13. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра. Тогда имеет место:*

(а) *если* $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$, *то* $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$, $|\mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})| \geq 2$ *и* $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$,

(б) *если* $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ *и* $|\mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})| \geq 2$, *то* $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$ *и* $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$.

Доказательство. Утверждения (а), (б) теоремы 13 непосредственно вытекают из теоремы 5 из [2] и леммы 5.

Теорема 14. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой и* $\mathscr{B}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. *Пусть* $\emptyset \neq \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \notin \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *и* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. *Положим* $N_b = \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \cup [b]\mathscr{I}$ *для каждого элемента* $b \in B$. *Тогда:*

(а) $|B| \geq 2$,

(б) $A = \cup \{N_b \mid b \in B\}$,

(в) $N_b = \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \cup [b]$ *для каждого* $b \in B$,

(г) $N_b \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *для всех* $b \in B$,

(д) $\langle \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}); F\rangle$ *является максимальной подалгеброй алгебры* $\langle N_b; F$ *для каждого* $b \in B$,

(е) $N_b \cap N_a = \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *для всех* $a, b \in B$ *и* $a \neq b$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 14.

а) Предположим, что $|B| = 1$. Из этого по теореме 12, следует, что $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Это противоречит тому, что $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \notin \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Отсюда вытекает утверждение (а).

б) Согласно теореме 9, мы получаем, что справедливо утверждение (б).

в) Очевидно $N_b \subseteq \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \cup [b]$. Так как по лемме 2 имеет место $[b]\mathscr{I} \cap [c]\mathscr{I} = \emptyset$ для каждого $c \in B \setminus \{b\}$, то согласно теореме 9, мы получаем $[b] \subseteq \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \cup [b]\mathscr{I}$, т. е. $N_b \supseteq \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \cup [b]$.

г) Утверждение (г) очевидно.

д) Так как $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и по теореме 9 имеет место $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \cap \cap [b]\mathscr{I} = \emptyset$ для каждого $b \in B$, то $[b]\mathscr{I} = N_b \setminus \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для каждого $b \in B$. Из этого по (г) и лемме 1 из [2] мы получаем утверждение (д).

е) Пусть a, b — произвольные элементы из B и $a \neq b$. Тогда по лемме 2 имеет место $[a]\mathscr{I} \cap [b]\mathscr{I} = \emptyset$. Отсюда следует утверждение (е).

Лемма 6. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой. Пусть* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$ *и* $\emptyset \neq \cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \notin \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. *Тогда существует такой элемент* $b \in B$, *что* $[b]\mathscr{I} \notin \mathscr{P}(\mathbf{A})$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда по теореме 14 мы получаем $|B| \geq 2$. Предположим, что для каждого $b \in B$ имеет место $[a]\mathscr{I} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Отсюда следует $[b]\mathscr{I} = [b]$ для всех $b \in B$. Это значит, что $A = [B] = \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$, откуда по теореме 9, мы получаем $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$. Это противоречит тому, что $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы 6 и пусть* $b \in B$. *Тогда* $[b]\mathscr{I} \notin \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $(\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})) \cap [b] \neq \emptyset$.

Доказательство. I. Пусть $[b]\mathscr{I} \notin \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Тогда $[b] \neq [b]\mathscr{I}$. Из этого по теореме 14 мы получаем $(\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})) \cap [b] \neq \emptyset$.

II. Пусть $(\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})) \cap [b] \neq \emptyset$. Предположим, что $[b]\mathscr{I} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Тогда $[b] = [b]\mathscr{I}$. Отсюда следует $(\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})) \cap [b]\mathscr{I} \neq \emptyset$. Это противоречит утверждению теоремы 9.

Теорема 15. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой. Пусть* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$ *и* $\emptyset \neq \cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \notin \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. *Пусть* B_1 *есть множество всех таких элементов* $b \in B$, *что* $(\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})) \cap [b] = \emptyset$. *Пусть* $B_1 \neq \emptyset$ *и* $B_1 \neq B$. *Положим* $A_1 = \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B_1\}$ *и* $A_2 = \cup \{N_c \mid c \in B \setminus B_1\}$, *где* $N_c = \cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \cup [c]\mathscr{I}$ *для каждого* $c \in B \setminus B_1$. *Тогда:*

(а) $[b]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ *для всех* $b \in B_1$ *и* $[b]\mathscr{I} \notin \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *для всех* $b \in B \setminus B_1$,

(б) $A_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $A_2 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $A = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,

(в) $B_1(B \setminus B_1)$ является минимальным множеством образующих алгебры $\mathbf{A}_1 = \langle A_1; F\rangle$ (алгебры $\mathbf{A}_2 = \langle A_2; F\rangle$),

(г) $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}_2)$.

Доказательство. а) Утверждение (а) вытекает из леммы 7 и леммы 5 из 2.

б) Ввиду (а) мы имеем $[b]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ для всех $b \in B_1$ и согласно теореме 14 справедливо $N_c \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ для всех $c \in B \setminus B_1$. Отсюда $A_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $A_2 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$.

Пусть x — произвольный элемент из A. Тогда существует такой элемент $b \in B$, что $x \in [b]$. Если $b \in B_1$, то $[b]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$. Отсюда $x \in [b] \subseteq [b]\mathscr{I} \subseteq A_1$. Если $b \in B \setminus B_1$, то по теореме имеет место: $[b] \subseteq N_b$. Так как $x \in [b]$ и $b \in B \setminus B_1$, то $x \in N_b \subseteq A_2$. Следовательно, $A = A_1 \cup A_2$.

Пусть $b \in B_1$. Согласно лемме 2 для каждого элемента $c \in B \setminus B_1$ справедливо $[b]\mathscr{I} \cap [c]\mathscr{I} = \emptyset$ и по теореме 9 мы получаем $(\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})) \cap [b]\mathscr{I} = \emptyset$. Отсюда вытекает $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

в) Для каждого $x \in A_1$ очевидно существует такой элемент $b \in B_1$, что $x \in [b]$. Пусть y — любой элемент из A_2. Тогда существует такой элемент $c \in B$, что $y \in [c]$. Предположим, что $c \in B_1$. Так как $A_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $B_1 \subseteq A_1$, то $y \in A_1$. Это противоречит тому, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Следовательно, $c \in B \setminus B_1$. Это значит, что к каждому элементу $y \in A_2$ существует такой элемент $c \in B \setminus B_1$, что $y \in [c]$.

Пусть b_1, b_2 — произвольные элементы из $B_1(B \setminus B_1)$ и $b_1 \in [b_2]$. Так как $B_1 \subset B(B \setminus B_1 \subset B)$ и $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$, то $b_1 = b_2$. Из предшествующего по теореме 2 мы получаем утверждение (в).

г) В силу теоремы 9 $(\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A})) \cap [b]\mathscr{I} = \emptyset$ для каждого $b \in B$. Отсюда вытекает $\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}) = A_2 \setminus \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B \setminus B_1\}$. Так как $B \setminus B_1$ является минимальным множеством образующих алгебры $\mathbf{A}_2 = \langle A_2; F\rangle$, то по теореме 9 мы получаем $\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}_2) = A_2 \setminus \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B \setminus B_1\}$. Следовательно, $\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}) = \cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}_2)$.

Теорема 16. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— унарная алгебра и пусть* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$. *Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *и* $N \neq \mathbf{A}$. *Тогда:*

$N = \cap \{A \setminus [b]\mathscr{I} \mid b \in B \setminus N\}$ *тогда и только тогда, когда* $\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}) \subseteq \subseteq N$.

Доказательство. I. Пусть $N = \cap \{A \setminus [b]\mathscr{I} \mid b \in B \setminus N\}$. Из этого по теореме 7 следует $\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}) \subseteq N$.

II. Пусть $\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}) \subseteq N$. Согласно теореме 7 из [2], мы получаем $N = \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\}$ и $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A \setminus N$. Тогда по теореме 7 имеет место: $x \in A \setminus N$ и $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A})$ тогда и только тогда, когда $A \setminus [x]\mathscr{I} = A \setminus [b]\mathscr{I}$ для некоторого $b \in B \setminus N$. Из предыдущего вытекает $N = \cap \{A \setminus [b]\mathscr{I} \mid b \in B \setminus N\}$.

Примечание 1. На примере аддитивной группы целых чисел по mod 6 можно легко доказать, что не для каждой алгебры $\mathbf{A}$ справедливы следующие утверждения.

(a_1) Если H — любое непустое подмножество множества A, то $[H] = = \cup \{[h] \mid h \in H\}$.

(a_2) Если B — любой элемент из $\mathscr{B}(\mathbf{A})$, то для каждого элемента $x \in A$ существует такой элемент $b \in B$, что $x \in [b]$.

(a_3) Пусть B и B' произвольные элементы из $\mathscr{B}(\mathbf{A})$. Тогда:

(a_{31}) $B' \cap [b]\mathscr{I}$ содержит точно один элемент из B' для каждого $b \in B$.

(a_{32}) $B' \subseteq \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.

(a_{33}) $\cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.

(a_{34}) Если $a \in A, b \in B$ и $[a]\mathscr{I} = [b]\mathscr{I}$, то $[a]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$.

(a_4) Пусть алгебра $\mathbf{A}$ не является $\mathscr{I}$ — простой и пусть B произвольный элемент из $\mathscr{B}(\mathbf{A})$. Тогда:

(a_{41}) Если $N \in \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A})$, то $N = A \setminus [b]\mathscr{I}$ и $b \in B$.

(a_{42}) Если $N = A \setminus [b]\mathscr{I}$ и $b \in B$, то $N \in \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A})$.

(a_{43}) $\cap \mathscr{P}_{max}(\mathbf{A}) = A \setminus \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.

(a_{44}) $\Phi(\mathbf{A}) = A \setminus \cup \{[b]\mathscr{I} \mid b \in B\}$.

Далее на примерах мы покажем, что не для каждой алгебры $\mathbf{A}$ имеют места следующие утверждения.

(в$_1$) Если $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$ и B такое подмножество множества A, что $B \cap N$ содержит точно один элемент для каждого $N \in \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$, то $B \in \mathscr{B}(\mathbf{A})$.

(в$_2$) Если $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$, то $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$.

(в$_3$) Если $A = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A})$, то $A \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}) = \emptyset$.

Пример 1. Пусть $\mathbf{A}_2 = \langle A_2\,; .\rangle$, где $\mathbf{A}_2 = \{a, b, c\}$ и бинарная операция . на A_2 определена таблицей:

.	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

Тогда $\mathbf{A}_2 = \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A}_2)$, $\cup \mathscr{B}(\mathbf{A}_2) = \{a, b\}$ и $B = \{a, b, c\} \notin \mathscr{B}(\mathbf{A}_2)$. Это означает, что не имеют места утверждения (b_1), (b_3).

Пример 2. Пусть $\mathbf{A}_1 = \langle A_1\,; .\rangle$, где $A_1 = \{a, b, c\}$ и бинарная операция . на A_1 определена таблицей:

.	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

Тогда $A_1 \setminus \cup \mathscr{B}(\mathbf{A}_1) = \emptyset$ и $A_1 \neq \cup \mathscr{P}_{min}(\mathbf{A}_1)$. Отсюда видно, что не имеет место утверждение (b_2).

Примечание 2. На примере мы покажем, что существует унарная алгебра, которая не содержит ни одно минимальное множество образующих и содержит по крайней мере одну максимальную подалгебру.

Пример 3. Пусть $A_1 = R^+ \cup \{b, c\}$, где R^+ — множество всех положительных рациональных чисел, $R^+ \cap \{b, c\} = \emptyset$ и $b \neq c$. Если каждому элементу $a \in A_1$ сопоставлена унарная операция f_a определенная на A_1 следующим образом:

$$f_a(x) = \begin{cases} a + x \text{ если } a \in R^+ \text{ и } x \in R^+, \\ c \text{ если не имеет место } a \in R^+ \text{ и } x \in R^+, \end{cases}$$

и если $F_1 = \{f_a \mid a \in A_1\}$, то $A_1 = \langle A_1\,; F_1\rangle$ является унарной алгеброй. Тогда $R^+ \cup \{c\} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}_1)$ и при помощи теоремы 2, можно легко показать, что A_1 не содержит минимальное множество образующих.

Примечание 3. В этом примечании мы применим полученные результаты к изучению свойств:

а) минимальных множеств образующих в (S, T) — биоперандах.

б) максимальных собственных инвариантных подмножеств и пересечения максимальных собственных инвариантных подмножеств в (S, T) — биоперандах при помощи минимального множества образующих.

в) таких инвариантных подмножеств в (S, T) — биоперандах, которые содержат по крайней мере один элемент из ее минимального множества образующих.

Пусть ${}_SM_T$ — (S, T) — биоперанд [3]. Множество всех инвариантных подмножеств в ${}_SM_T$ обозначим через $\mathscr{P}(M)$. Обозначим через $[H]_M$ инвариантное подмножество вида $H \cup SH \cup HT \cup SHT$ в ${}_SM_T$.

Вместо обозначения $[\{x\}]_M$, где $x \in M$, мы пользуемся обозначением $[x]_M$. Мы будем говорить, что непустое подмножество B множества M есть минимальное множество образующих ${}_SM_T$, если $M = [B]_M$ и не существует такое непустое множество $B' \subset B$, что $M = [B']_M$. На множестве M мы определим отношение $\mathscr{I}_M$ следующим образом: будем говорить, что два элемента $x, y \in M$ находятся в отношении $\mathscr{I}_M$, если $[x]_M = [y]_M$. Очевидно отношение $\mathscr{I}_M$ на M является отношением эквивалентности. ${}_SM_T$ мы назовем $\mathscr{I}$ — простым (S, T) — биоперандом, если не существует такой элемент $N \in \mathscr{P}(M)$, что $N \neq M$. Элемент $N \in \mathscr{P}(M)$ мы назовем минимальным (максимальным собственным) инвариантным подмножеством в ${}_SM_T$, если $(N \neq M)$ и не существует такой элемент $N' \in \mathscr{P}(M)$, что $N' \subset N (N \subset N' \neq M)$. Обозначим через $\mathscr{P}_{min}(M)$ $(\mathscr{P}_{max}(M))$ множество всех минимальных (максимальных собственных) инвариантных подмножеств в ${}_SM_T$.

Пусть ${}_SM_T$ — (S, T) — биоперанд. Если каждому элементу $s \in S$ $(t \in T)$ сопоставлена унарная операция на M, определенная посредством $f_s(x) = sx (f_t(x) = xt)$, где $sx (x^t)$ имеют то же значение, что в (S, T) — биоперанде ${}_SM_T$, и если положим $F_1 = \{f_s \mid s \in S\}$, $F_2 = \{f_t \mid t \in T\}$ и $F = F_1 \cup F_2$, то $\mathrm{M} = \langle M; F\rangle$ является унарной алгеброй. Назовем ее унарной алгеброй, присоединенной к (S, T) — биоперанду ${}_SM_T$.

Теорема A. *Пусть* M — *унарная алгебра, присоединенная к* (S, T) — *биоперанду* ${}_SM_T$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*

(а) *для каждого подмножества N множества M имеет место:*

(a_1) $N \in \mathscr{P}(\mathrm{M})$ *тогда и только тогда, когда* $N \in \mathscr{P}(M)$,

(a_2) $N \in \mathscr{P}(\mathrm{M})$ *и* $N = [a]$ $(a \in M)$ *тогда и только тогда, когда* $N = [a]_M$ $(a \in M)$.

(б) Непустое подмножество B множества M является минимальным множеством образующих в M тогда и только тогда, когда B является минимальным множеством образующих в (S, T) — биоперанде ${}_SM_T$.

Очевидно, как посредством теоремы A и при помощи утверждений (доказанных в этой статье) о минимальных множествах образующих и подалгебрах в унарных алгебрах мы получим аналогичные утверждения о минимальных множествах образующих и о инвариантных подмножествах в (S, T) — биоперандах.

Далее мы заметим: Пусть $\langle S; .\rangle$ — полугруппа и $\langle H; .\rangle$, $\langle T; .\rangle$ ее подполугруппы. Пусть A есть (H, T) — идеал в $\langle S; .\rangle$ (непустое подмножество A подмножества S называется (H, T) — идеалом в $\langle S; .\rangle$ если $H . A \subseteq A$ и $A . T \subseteq A$, см. [5]). Непустое подмножество N множества S назовем (H, T) — идеалом в A, если N является (H, T) — идеалом в $\langle S; .\rangle$ и $N \subseteq A$. Тогда тем же способом, как мы это сделали выше, мы можем получить утверждения о минимальных множествах образующих и о (H, T) — идеалах в A.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ABRHAN, I.: Poznámka k maximálnym (H_1, H_2)—ideálom v pologrupách. Mat. Čas., *21*, 1971, 214—218.

[2] АБРГАН, И.: О максимальных подалгебрах в унарных алгебрах. Mat. Čas. *24*, 1974, 113—128.

[3] CLIFFORD, A. H.—PRESTON, G. B.: The algebraic theory of semigroups. Vol. 2., Math. Surveys No. 7, Amer. Math. Soc. Providence R., I., 1967.

[4] FABRICI, I.: One-sided bases of semigroups. Mat. Čas., *22*, 1972, 286—290.

[5] GRÄTZER, G.: Universal algebra, van Nostrand. Princeton, N. I. 1968.

[6] HRMOVÁ, R.: Relative ideals in semigroups. Mat. Čas., *17*, 1967, 206—223.

[7] КОН, П.: Универсальная алгебра. Москва 1968.

[8] ШВАРЦ, Ш.: О максимальных идеалах в теории полугрупп. I. Чехослов. мат. Ж. 3, 1953, 139—153.

[9] ШВАРЦ, Ш.: О максимальных идеалах в теории полугрупп. II. Чехослов. мат. Ж. 3, 1953, 365—383.

[10] TAMURA, T.: One-sided bases and translations of a semigroup. Math. Japan 3, 1955, 137—141.

Поступило 9. 11. 1970
Переработано 28. 2. 1973

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
Gottwaldovo nám. 50
880 31 Bratislava