

Matematicko-fyzikálny časopis

Josef Kaucký

Une nouvelle demonstration élémentaire de la formule combinatoire de Li Jen-Shu

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 14 (1964), No. 1, 50--53

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126638>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE COMBINATOIRE DE LI JEN-SHU

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

1.

Il s'agit de l'identité combinatoire

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2, \quad (1)$$

qui se trouve sans démonstration dans le livre du mathématicien chinois du dernier siècle Li Jen-shu, publié en 1867 à Nanking sous le titre „Tso-ku-hsi-chai hsüan-hsüeh“.

En ce qui concerne l'histoire de cette formule remarquable, je renvoie le lecteur à mon article récent [1] où l'on trouve aussi les références littéraires plus détaillées.

Dans ce qui suit, je veux montrer comment on peut démontrer l'égalité (1) par une voie élémentaire nouvelle.

2.

Nous sortons de la relation ($k \leq l$)

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{l}{j} \alpha^{k-j} \beta^j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{l+j}{j} (\alpha - \beta)^{k-j} \beta^j, \quad (2)$$

dont la démonstration se trouve dans le travail de W. Ljunggren [2].

En écrivant l'identité évidente

$$(\alpha x + \beta)^k (1+x)^l = [x(\alpha - \beta) + \beta(1+x)]^k (1+x)^l \quad (3)$$

et en identifiant les coefficients de x^k dans les développements des deux membres, on obtient la formule (2).

Si nous posons dans la relation (2)

$$l = k, \quad \alpha = x, \quad \beta = 1,$$

nous obtenons l'équation plus simple

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 x^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{k+j}{k} (x-1)^{k-j}. \quad (4)$$

Cette relation a été démontrée à l'aide de quelques propriétés des polynômes de Legendre par P. Turán dans son article [3] et d'une manière élémentaire par moi-même dans la note [4].

3.

Posons maintenant dans la dernière équation

$$x = E,$$

où E désigne l'opérateur défini par l'équation

$$Ef(n) = f(n + 1). \quad (5)$$

Ensuite nous avons la relation

$$\Delta = E - 1,$$

Δ signifiant l'opérateur de la différence qui jouit de la propriété

$$\Delta f(n) = f(n + 1) - f(n) = (E - 1)f(n). \quad (6)$$

Nous avons ainsi l'égalité suivante

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 E^{k-j} f(n) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{k+j}{k} \Delta^{k-j} f(n). \quad (7)$$

4.

Pour obtenir la formule demandée (1), nous devons choisir convenablement la fonction f .

Soit

$$f(n) = \binom{n+k}{2k}. \quad (8)$$

Ensuite il est

$$E^{k-j} f(n) = \binom{n+2k-j}{2k}. \quad (9)$$

D'autre part, nous avons

$$\Delta f(n) = \binom{n+k+1}{2k} - \binom{n+k}{2k} = \binom{n+k}{2k-1}$$

et, en général,

$$\Delta^{k-j} f(n) = \binom{n+k}{2k-(k-j)} = \binom{n+k}{k+j}. \quad (10)$$

En substituant ces résultats dans l'équation (7), on obtient

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{k+j}{k} \binom{n+k}{k+j}. \quad (11)$$

5.

Il nous reste à calculer la deuxième somme. Mais à l'aide de l'égalité connue

$$\binom{m+v}{m} \binom{n}{m+v} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{v} \quad (12)$$

nous avons

$$\binom{k+j}{k} \binom{n+k}{k+j} = \binom{n+k}{k} \binom{n}{j}$$

et la somme mentionnée se réduit à

$$\binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{k}{k-j}. \quad (13)$$

Pour terminer notre démonstration il suffit maintenant de tenir compte de la formule de Vandermonde

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}. \quad (14)$$

d'après laquelle

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{k}{k-j} = \binom{n+k}{k}.$$

Il en résulte que l'expression (13) se réduit à

$$\binom{n+k}{k}^2 \quad (15)$$

et l'identité (1) est ainsi démontrée.

LITTÉRATURE

- [1] Kaucký J., *O jednom problému z dějin čínské matematiky* (Über ein Problem aus der Geschichte der chinesischen Mathematik), *Matematicko-fyzikálny časopis SAV* 13 (1963), 32–40.
- [2] Ljunggren W., *Et elemetaert bevis för en formel av A. C. Dixon*, *Norsk Matematisk Tidsskrift* 29 (1947), 35–38.

- [3] Turán P.: *A kínai matematika történetének egy problémájáról*. Matematikai Lapok V (1954), 1–6.
- [4] Kaucký J.: *Poznámka k jednomu článku P. Turána (Remarques à un travail de P. Turán)*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 12 (1962), 212–216.

Reçu le 11. mai 1963.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

НОВОЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОМБИНАТОРНОЙ ФОРМУЛЫ ЛИ ЖЕН-ШУ

Иосеф Кауцки

Резюме

Здесь доказывается комбинаторное тождество (1), о истории и доказательствах которого я говорил в статье [1].

Мы выходим из уравнения (2), доказательство которого находится в работе Льюнггрена [2]. Оно состоит в том, что в тождестве (3) сравниваем коэффициенты при x^k в разложениях выражений, которые стоят в обеих частях.

Особым случаем уравнения (2) является уравнение (4), которое доказал П. Туран в статье [3], а я в примечании [4].

Если теперь положим в этом уравнении $x = E$, где E — оператор, определенный соотношением (5), то $x - 1 = E - 1 = \Delta$, где Δ — разностный оператор, определенный уравнением (6). Так из уравнения (4) мы получим уравнение (7).

Чтобы получить тождество (1), достаточно взять за $f(n)$ функцию (8). Тогда, собственно говоря, имеют место соотношения (9) и (10), при помощи которых мы получаем уравнение (11).

Чтобы закончить доказательство, остается вычислить значение суммы, стоящей в его правой части. Однако, с помощью известной формулы (12) мы получим сначала выражение (13), которое с помощью формулы Вандермонда (14) дает (15).

Так доказано комбинаторное тождество (1).