

# Matematicko-fyzikálny časopis

---

Dorota Krajňáková

Poznámka k duálnym pologrupám

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 16 (1966), No. 3, 215--217

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126619>

## Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## POZNÁMKA K DUÁLNYM POLOGRUPÁM

DOROTA KRAJŇÁKOVÁ, Bratislava

V práci [2] Š. Schwarz vyšetruje štruktúru istých pologrup s nulou, tzv. duálnych pologrup. Zaviedol pojem ľavého (pravého) anulátora podmnožiny  $A$  pologrupy  $S$  a pojem duálnej pologrupy nasledujúcim spôsobom.

**Definícia 1.** *Nech  $A$  je neprázdna podmnožina pologrupy  $S$  s nulou. Ľavým (pravým) anulátorom  $\mathcal{L}(A)$  ( $\mathcal{R}(A)$ ) podmnožiny  $A$  nazývame množinu všetkých  $x \in S$ , pre ktoré platí  $xA = 0$  ( $Ax = 0$ ).*

**Definícia 2.** *Pologrupu  $S \neq 0$  nazývame duálnou, ak pre každý ľavý ideál  $L$  pologrupy  $S$  platí*

$$(1) \quad \mathcal{L}[\mathcal{R}(L)] = L$$

*a pre každý pravý ideál  $R$  pologrupy  $S$  platí*

$$(2) \quad \mathcal{R}[\mathcal{L}(R)] = R.$$

Ako vieme, pologrupy zvyškov (mod  $m$ ), kde  $m$  je prirodzené číslo, sú pologrupy s nulou. Vzniká otázka, či pologrupa  $S$  zvyškov (mod  $m$ ) je duálna. Na túto otázku dáva odpoveď veta, ktorá je obsahom tejto poznámky.

Najprv vyšetříme niektoré vlastnosti pologrupy  $S$  zvyškov (mod  $m$ ), ktoré budeme potrebovať k dôkazu vety.

**Lema 1.** *Nech  $S$  je pologrupa zvyškov (mod  $p^\alpha$ ), kde  $p$  je prvočíslo a  $\alpha$  celé kladné číslo. Pre každé  $x \in S$  nesúdeliteľné s  $p$  platí  $Sx = xS = S$ .*

*Dôkaz.* Z práce [1] podľa vety 4 vyplýva, že pologrupa  $S$  zvyškov (mod  $p^\alpha$ ) má práve dva idempotenty. Sú to 0, 1. Teda pologrupa  $S$  sa dá rozložiť ako množinový súčet dvoch disjunktných tried  $K_0, K_1$ . Triedu  $K_0$  tvoria prvky patriace k idempotentu 0 a sú to tie prvky pologrupy  $S$ , ktoré sú súdeliteľné s  $p$ . Triedu  $K_1$  tvoria prvky patriace k idempotentu 1 a sú to prvky pologrupy  $S$  nesúdeliteľné s  $p$ .

Ak  $x$  je nesúdeliteľné s  $p$ , potom  $x \in K_1$ , a teda existuje také prirodzené číslo  $q$ , že  $x^q = 1$ . Keďže pologrupa  $S$  má jednotku, je  $x \in Sx$ . Ale tiež  $x^n \in Sx$  pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n$ . Teda tiež  $x^n = 1 \in Sx$ . Potom platí  $S = S \cdot 1 \subseteq Sx$ . Z toho vyplýva  $Sx = S$ .

Pologrupa  $S$  zvyškov (mod  $p^\alpha$ ) je komutatívna, teda  $xS = Sx = S$ .

**Lema 2.** *Vlastný ideál  $M$  pologrupy  $S$  zvyškov (mod  $p^\alpha$ ) neobsahuje prvky nesúdeliteľné s  $p$ .*

Dôkaz. Podľa predpokladu  $M \subset S$ . Pripustíme, že  $M$  obsahuje prvok  $y$  nesúdeliteľný s  $p$ . Potom  $Sy \subseteq M$ . Ale podľa lemy 1  $Sy = S$ . Teda  $S = Sy \subseteq M$ . To je spor s predpokladom  $M \subset S$ .

**Lema 3.** *Každý ideál  $M$  pologrupy  $S$  zvyškov (mod  $p^\alpha$ ) dá sa písať vo tvare  $M = Sp^r$ , kde  $r$  je celé kladné číslo  $0 \leq r \leq \alpha$ .*

Dôkaz. Je zrejmé, ak  $M = S$ , potom  $r = 0$ ; ak  $M = (0)$ , potom  $r = \alpha$ . Ostáva nám dokázať: ak  $(0) \neq M \neq S$ , existuje také  $r$ , že  $M = Sp^r$ .

Nech  $(0) \neq M \neq S$ . Podľa lemy 2  $M$  obsahuje prvok  $a \neq 0$  súdeliteľný s  $p$ . Môžeme ho písať vo tvare  $a = t \cdot p^n$ , pričom  $(t, p) = 1$ . Potom  $S(tp^n) \subseteq M$ . Ale  $S(tp^n) = (St)p^n = Sp^n \subseteq M$ . Z toho vyplýva, že  $p^n \in M$  a všetky vyššie mocniny  $p^{n+1}, p^{n+2}, \dots$  sú z  $M$ . Nech najnižšia mocnina  $p$ , ktorú  $M$  obsahuje, je  $p^r$ . Tvrdíme, že  $M = Sp^r$ .

Pripustíme, že  $Sp^r \subset M$ . Potom existuje ďalší prvok  $y \in M$ , ktorý sa dá písať vo tvare  $y = t \cdot p^{r-k}$ , pričom  $k$  je celé kladné číslo  $1 \leq k \leq r - 1$ , a  $(t, p) = 1$ . Ale  $S(tp^{r-k}) = Sp^{r-k} \subset M$ . Z toho vyplýva, že  $p^{r-k} \in M$  a to je spor s tým, že  $p^r$  je najnižšia mocnina, ktorú  $M$  obsahuje.

**Veta.** *Pologrupa  $S$  zvyškov (mod  $m$ ) je duálna vtedy a len vtedy, keď  $m = p^\alpha$ , pričom  $p$  je ľubovoľné prvočíslo a  $\alpha$  celé kladné číslo.*

Dôkaz. a) Nech  $m = p^\alpha$ . Podľa lemy 3 každý jej ideál môžeme písať vo tvare  $Sp^r$ ,  $0 \leq r \leq \alpha$ . Keďže  $S$  je komutatívna pologrupa, stačí ukázať, že každý ideál  $Sp^r$  spĺňa podmienku (1).

$$\mathcal{L}[\mathcal{R}(Sp^r)] = \mathcal{L}[p^{\alpha-r}S] = Sp^r.$$

b) Ak  $m = p_1^\alpha \cdot p_2^\beta \dots p_n^\nu$  ( $p_1, p_2, \dots, p_n$  sú rôzne prvočísla,  $\alpha, \beta, \dots, \nu$  sú celé kladné čísla), ukážeme, že pologrupa  $S$  nie je duálna. Stačí, ak dokážeme, že aspoň jeden ideál pologrupy  $S$  nespĺňa podmienku (1). Uvažujme o ideále  $Sp_1 \cup Sp_2$ , ( $p_1 \neq p_2$ ). Na základe [2] (lema 1, 2) môžeme písať:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{R}(Sp_1 \cup Sp_2)] &= \mathcal{L}[\mathcal{R}(Sp_1) \cap \mathcal{R}(Sp_2)] = \mathcal{L}[Sp_1^{\alpha-1}p_2^\beta \dots p_n^\nu \cap Sp_1^\alpha p_2^{\beta-1} \dots p_n^\nu] = \\ &= \mathcal{L}[Sp_1^\alpha \cdot p_2^\beta \dots p_n^\nu] = \mathcal{L}(0) = S \neq Sp_1 \cup Sp_2. \end{aligned}$$

Tým je veta dokázaná.

## LITERATÚRA

- [1] Parížek B., Schwarz Š., *O komutatívnej pologrupe zvyškových tried (mod  $m$ )*,  
Mat.-fyz. časop. 8 (1958), 136—150.  
[2] Schwarz Š., *On dual semigroups*, Czechosl. Math. J. 10 (85) (1960), 201—230.

Došlo dňa 1. 4. 1965.

*Katedra matematiky  
Chemickotechnologickej fakulty  
Slovenskej vysokej školy technickej,  
Bratislava*

## A NOTE ON DUAL SEMIGROUPS

Dorota Krajňáková

### Summary

A semigroup of residue classes (mod  $m$ ) is dual if and only if  $m = p^\alpha$  ( $p$  is prime and  $\alpha$  a positive integer).