Imrich Abrhan

О максимальных подалгебрах в унарных алгебрах

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 2, 113--128

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126609

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ В УНАРНЫХ АЛГЕБРАХ

ИМРИХ АБРГАН

Посвящено шестидесятилетию профессора Штефана ШВАРЦА

Толчком к написанию настоящей работы послужили работы [3], [4], [7]. Она обобщает некоторые результаты из [3], [7].

В настоящей работе изучаются свойства максимальных собственных подалгебр и пересечения максимальных собственных подалгебр в унарной алгебре. Далее, изучаются свойства таких подалгебр в унарной алгебре, пересечение которых с довполнением пересечения максимальных собственных подалгебр в унапной алгебре является непустым множеством.

Наконец мы сделаем примечание, каким образом при помощи утверждений, доказанных в этой работе о поалгебрах в унарных алгебрах, мы получаем аналогичные утвержения к этим утверждениям, напр. о инвариантных подмножествах в (S, T) — биоперандах (см. [1]).

В статье мы будем пользоваться следующими обозначениями:

X/σ обозначает множество всех σ-классов, соответствующих отношению эквивалентности σ на множестве X;

$[x]\sigma$ обозначает σ-класс их X/σ, содержащий элемент x из множества X;

$|X|$ обозначтет мощность множества X;

$\emptyset$ обозначает пустое множество;

$X \subset Y$ обозначает, что X собственное подмножеятво множества Y, в отличие от $X \subseteq Y$; $\mathbf{A}$ обозначает алгебру (под алгеброй $\mathbf{A}$ мы понимаем пару $\langle A; F\rangle$, где A — непустое множество и F — множество конечных операций, определенных на A см. [2], [6]);

$\mathscr{P}(\mathbf{A})$ обозначает множество всех тех непустых подмножеств N множества A, что $\langle N; F\rangle$ (F в $\langle N; F\rangle$ — ограничение F на A) подалгабра алгебры $\mathbf{A}$;

$[H]$ обозначает такой элемент из $\mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $\langle [H]; F\rangle$ подалгабра в $\mathbf{A}$, *порожденная* непустым подмножеством H множества A (см. [2]). Вместо обозначения $[\{x\}]$, где $x \in A$, мы пользуемся обозначением $[x]$. $\langle[\emptyset]; F\rangle$ обозначает подалгебру, порожденную значениями 0-арных операций из F, если такие в F существуют (см. [2]). $[\emptyset] = \emptyset$ тогда и только тогда, когда F не содержит 0-арных операций (очевидно, $[\emptyset] \subseteq N$ для всех $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$).

$\mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ ($\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$) обозначает множество всех тех элементов $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $\langle N; F\rangle$ является *минимальной (максимальной) собственной* подалгеброй алгабры A (подалгебру $\langle N; F\rangle$ алгабры $\mathbf{A}$ назовем *минимальной (максимальной) собственной*, если $N \neq [\emptyset]$, $N \neq A$ и не существует такой элемент $N' \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $[\emptyset] \subset N' \subset N$ ($N \subset N' \neq A$)).

Для простоты формулировки утверждений в насоящей работе, мы предположим, что $[\emptyset] = \emptyset$.

Определения встречающихся понятий, не определенных в этой работе, найдет читатель, напр. в [1], [2], [6].

Определение 1. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *алгебра. Скажем, что два элемента* $x, y \in A$ *находятся в отношении* $\mathscr{I}$, *если* $[x] = [y]$. *Очевидно, отношение* $\mathscr{I}$ *на* A *является отношением эквивалентности на* A. *Алгебру* $\mathbf{A}$ *назовем* $\mathscr{I}$*-простой, если не существует такой элемент* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, *что* $N \neq A$.

Лемма 1. *Пусть унапная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$*-простой и пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. *Тогда:* $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$, *где* $x \in A \setminus N$.

Доказательство. I. Пусть $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Пусть x—произвольный элемент из $A \setminus N$. Тогда $N \cup [x] = A$. Это значит, что $A \setminus N \subseteq [x]$ для всех $x \in A \setminus N$. Сделовательно, $x \in [y]$ и $y \in [x]$ для всех $x, y \in A \setminus N$. Отсюда вытекает $[x] = [y]$ для всех $x, y \in A \setminus N$. Для каждого элемента $z \in N$ имеет место $[z] \subseteq N$. Значит, $[z] \neq [x]$ для всех $z \in N$ и $x \in A \setminus N$. Из предыдущего мы получаем $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$, где $x \in A \setminus N$.

II. Пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$, где $x \in A \setminus N$. Предположим, что $N \notin \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Тогда существует по крайней мере один такой элемент $N' \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $N \subset N' \neq A$. Пусть $x \in N' \cap (A \setminus N)$. Тогда $[x]\mathscr{I} = A \setminus N \subseteq [x] \subseteq N'$. Следовательно, $A = N \cup [x] \subseteq N'$. Это противоречит тому, что $A \neq N'$.

Пусть $\mathbf{A}$-алгебра. Элемент $x \in A$ назовем образующим в $\mathbf{A}$, если $A = [x]$. Алгебру $\mathbf{A}$ назовем *моногенной*, если $\mathbf{A}$ содержит по крайнеф мере один образующий элемент.

Обозначим через N^* такой элемент из $\mathscr{P}(\mathbf{A})$ (если он существует), что $N^* \neq A$ и $N \subseteq N^*$ для всех $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $N \neq A$.

Лемма 2. *Пусть унарная алгебра* $\mathfrak{A}$ *является моногенной и не является* $\mathscr{I}$*-простой. Тогда* $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \{N^*\}$ *и* $A \setminus D = N^*$, *где* D — *множество всех образующих алгебры* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть $D = \{x \mid x \in A, A = [x]\}$. Согласно предположению получим $\emptyset \neq D \subset A$. Очевидно, $D = [x]\mathscr{I}$, где $x \in D$. Пусть y—любой элемент из $A \setminus D$, т. е. $A \neq [y]$. Так как $f(y) \in [y]$, то $[f(y)] \subseteq [y] \neq A$, т. е. $f(y) \in A \setminus D$ для всех $f \in F$. Это значит, что $A \setminus D \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$

Согласно лемме 1, мы получаем $A \setminus D \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Предположим, что существует такой элемент $N' = \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $N' \neq A$ и $N' \nsubseteq A \setminus D$. Пусть $x \in N' \cap D$. Тогда $A = [x] \subseteq N'$. Это противоречит тому, что $N' \neq A$. Зиъчит, $A \setminus D = N^*$. Из предыдущих рассуждений вытекает утверждение леммы 2.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— унарчая алгебра и пусть* $x \in A$. *Пусть* $D_x = [x] \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ *и* $\mathbf{A}_x = \langle [x]; F \rangle$. *Тогда* $D_x \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}_x)$, $N_x \subseteq D_x$ *для всех* $N_x \in \mathscr{P}(\mathbf{A}_x)$ и $N_x \neq [x]$.

Теорема 1. *Пусть алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$*-простой. Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *и* $N \neq A$. *Тогда:*

$N = N^*$ *тогда и только тогда, когда* $A \setminus N = \{x \mid x \in A,\ A = [x]\}$.

Доказательство. I. Пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $N = N^*$. Тогда $A = [x]$ для всех $x \in A \setminus N$ и $A \neq [y]$ для всех $y \in N$. Отсюда следует $A \setminus N = \{x \mid x \in A,\ A = [x]\}$.

II. Пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $N \neq A$, и пусть $A \setminus N = \{x \mid x \in A,\ A = [x]\}$. Предположим, что $N \neq N^*$. Это означает, что существеут по крайней мере такой элемент $N' \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $N' \neq A$ и $N' \nsubseteq N$. Пусть $x \in N' \cap (A \setminus N)$. Тогда $A = [x] \subseteq N'$, т. е. $A = N'$. Это противоречит тому, что $A \neq N'$. Значит, $N = N^*$.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— алгебра. На множестве* $A/\mathscr{I}$ *опеделим отношение* $\leq$ *слудующим образом:* $[x]\mathscr{I} \leq [y]\mathscr{I}$ $(x, y \in A)$ *тогда и только тогда, когда* $[x] \subseteq [y]$, *где* $[x]\mathscr{I} \in A/\mathscr{I}$, $[y] \in A/\mathscr{I}$.

Теорема 2. *Пусть алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$*-простой. Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $N \neq A$. Тогда:

$N = N^*$ *тогда и тоько тогда, когда* $[x]\mathscr{I} \leq [y]\mathscr{I}$ *для всех* $x \in A$ *и* $y \in A \setminus N$.

Доказательство. I. Пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $N = N^*$. Тогда, согласно теореме 1, мы получаем, что $[x]\mathscr{I} \leq [y]\mathscr{I}$ для всех $x \in A$ и $y \in A \setminus N$.

II. Пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $N \neq A$ и $[x]\mathscr{I} \leq [y]\mathscr{I}$ для всах $y \in A \setminus N$ и $x \in A$. Пусть y — произвольный элемент из $A \setminus N$. Тогда $[x] \subseteq [y]$ для всех $x \in A$. Отсюда следует $A = \cup \{[x] \mid x \in A\} \subseteq [y]$. Значит, $A = [y]$ для всех $y \in A \setminus N$ и $A \neq [x]$ для всех $x \in N$. Это означает, что $A \setminus N = \{x \mid x \in A,\ A = [x]\}$. Отсюда, согласно теореме 1, мы получаем $N = N^*$.

Лемма 3. *Пусть уравная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ *— простой* и *иусть* $x \in A$. *Тогда:* $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ *и* $[x]\mathscr{I}$ *является максимальным элементом в* $A/\mathscr{I}$.

Доказательство. I. Предположим, что $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ и имеет место $[x]\mathscr{I} \leq [y]\mathscr{I}$, где $x \in A$, $y \in A$. Значит, $[x] \subseteq [y]$. Если $y \in A \setminus [x]\mathscr{I}$, то $[y] \subseteq A \setminus [x]\mathcal{I}$. Следовательно, $[x]\mathcal{I} \subseteq A \setminus [x]\mathcal{I}$. Однако, это противоречит тому, что $[x]\mathcal{I} \cap (A \setminus [x]\mathcal{I}) = \emptyset$. Значит, $y \in [x]\mathcal{I}$, т. е. $[x]\mathcal{I} = [x]\mathcal{I}$.

II. Пусть $A \setminus [x]\mathcal{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathcal{I}$ — максимльный элемент в $A/\mathcal{I}$. Препоположим, что $A \setminus [x]\mathcal{I} \notin \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Это означает, что существует по крайней мере один элемент $f \in F$ и по крайней мере один элемент $y \in A \setminus [x]\mathcal{I}$ такие, что $f(y) \in [x]\mathcal{I}$. Тогда $[x] \subseteq [f(y)] = [y]$, т. е. $[x]\mathcal{I} \leq [y]\mathcal{I}$. Из этого, согласно предположению, получим $[x]\mathcal{I} = [y]\mathcal{I}$, т. е. $y \in [x]\mathcal{I}$. Это противоречит тому, что $y \in A \setminus [x]\mathcal{I}$. Значит, $A \setminus [x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Из предыдущего, согласно лемме 1, мы аолучаем $A \setminus [x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{A})$.

Из лемм 1, 3 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Пусть уранная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathcal{I}$ *— простой и пусть* $x \in A$. *Тогда:*

$N \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $N = A \setminus [x]\mathcal{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathcal{I}$ *— максимальный элемент в* $A/\mathcal{I}$.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— алгебра и пусть* $x \in A$. *Тогда:* $[x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $[x]\mathcal{I}$ *— минимальный элемент в* $A/\mathcal{I}$.

Доказательство. I. Предположим $[x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *и* $[y]\mathcal{I} \leq [x]\mathcal{I}$, где $x, y \in A$. Отсюда вытекает $y \in [x]\mathcal{I}$. Значит, $[x]\mathcal{I} = [y]\mathcal{I}$. Это значит, что $[x]\mathcal{I}$ — минимальный элемент в $A/\mathcal{I}$.

II. Пусть $[x]\mathcal{I}$ — минимальный элемент в $A/\mathcal{I}$. Предположим, что $[x]\mathcal{I} \notin \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Тогда $[x] \setminus [x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$. Пусть $y \in [x] \setminus [x]\mathcal{I}$. Тогда $[y]\mathcal{I} \subseteq$ $\subseteq [y] \subseteq [x] \setminus [x]\mathcal{I}$. Из предывущего слудеет, что $[y]\mathcal{I} \leq [x]\mathcal{I}$ и $[y]\mathcal{I} \neq$ $\neq [x]\mathcal{I}$. Это противоречит тому, что $[x]\mathcal{I}$ является минимальным элементом в $A/\mathcal{I}$.

Лемма 5. *Пусть* $N \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ *и* $N \neq A$. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

(а) $N \in \mathcal{P}_{\min}(\mathbf{A})$.

(б) $N = [x]$ *для всех* $x \in N$.

(в) $N = [x]\mathcal{I}$, *где* $x \in N$.

Доказательство очевидно.

Теорема 4. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathcal{I}$ *— простой. Тогда:* $[x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\min}(\mathbf{A})$ *для всех* $x \in A$ *тогда и только тогда, когда* $A \setminus [x]\mathcal{I} \in$ $\in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *для всех* $x \in A$.

Доказательство. I. Пусть $[x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\min}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A$. Тогда $[x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathbf{A})$ и $[x]\mathcal{I} \neq A$. Из этого, согласно лемме 4, мы получаем, что $[x]\mathcal{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathcal{I}$ и $A \setminus [x]\mathcal{I} \neq \emptyset$ для всех $x \in A$. Согласно теореме 3 мы получаем, что $A \setminus [x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A$.

II. Пусть $A \setminus [x]\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A$. Из этого, согласнш теореме 3, мы получаем $[x]\mathcal{I} \neq A$, и $[x]\mathcal{I}$ является максимальным элементоm в $A/\mathscr{I}$ для всех $x \in A$. Согласно лемме 4 и лемме 5, мы получаем $[x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ лдя всех $x \in A$.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра. Пусть $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Положим $\cap \mathscr{A} = \cap \{N \mid N \in \mathscr{A}\}$, если $\mathscr{A} \neq \emptyset$, и в случае $\mathscr{A} = \emptyset$ положим $\cap \mathscr{A} = A$. Обозначим через $\cup \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ множество $\cup \{N \mid N \in \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})\}$.

Теорема 5. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой. Тогда:* $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$ *тогда и только тогда,* $A = \cup \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ *и* $|\mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})| \geq 2$

Доказательство. В случае $|\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})| = 1$ очевидно, что $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$.

I. Пусть $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$. Это значит, что $|\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})| \geq 2$. Тогда $A \setminus \emptyset = A \setminus \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \cup \{A \setminus N \mid N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})\}$. Согласно лемме 1, для каждого элемента $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ и $x \in A \setminus N$ имеет место $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$. Это значит, что $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A$. Поэтому, согласно теореме 4, имеет место $[x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$для всех $x \in A$. Значит, $A = \cup \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ и $|\mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})| \geq 2$.

II. Пусть $A = \cup \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ и $|\mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})| \geq 2$. Согласно лемме 5, имеет место $[x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ для каждого $x \in A$. Это, согласно теореме 4, означает, что $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A$. Отсюда вытекает, что $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A\} = \emptyset$, т. е. $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$.

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра. Пусть* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ $|\mathscr{A}| \geq 2$, $N_1 \in \mathscr{A}$, $N_2 \in \mathscr{A}$, $N_1 \neq N_2$, $D_1 = A \setminus N_1$ и $D_2 = A \setminus N_2$. Тогда:

(а) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,

(б) $A \setminus \cap \mathscr{A} = \cup \{[x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus \cap \mathscr{A}\}$,

(в) $D_1 \subseteq N_2$,

(г) *если* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $N \cap D_1 \neq \emptyset$, *то* $D_1 \subseteq N$,

(д) *если* $x \in D_1$ *и* $y \in D_2$, *то* $[x] \cap [y] \subseteq \cap \mathscr{A}$.

Доказательство. В случае $|\mathscr{A}| = 1$, очевидно, имеет место (б) и (г) (см. лемму 1). Предположим, что $|\mathscr{A}| \geq 2$.

а) Так как $A = N_1 \cup N_2$ для всех $N_1 \in \mathscr{A}$, $N_2 \in \mathscr{A}$ и $N_1 \neq N_2$, то $D_1 \cap D_2 = (A \setminus N_1) \cap (A \setminus N_2) = A \setminus (N_1 \cup N_2) = \emptyset$.

б) Очевидно, имеет место $A \setminus \cap \mathscr{A} = \cup \{A \setminus N \mid N \in \mathscr{A}\}$. Согласно лемме 1, для всех $N \in \mathscr{A}$ имеет место $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$, где $x \in A \setminus N$. Из этого вытекает утверждение (б).

в) Так как $A = N_2 \cup D_2$ и, согласно (а), имеет место $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то $D_1 \subseteq N_2$.

г) Если $N \cap D_1 \neq \emptyset$, то $N_1 \subset N_1 \cup N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Так как $N_1 \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, то $A = N_1 \cup N$. Отсюда $D_1 \subseteq N$.

д) Пусть $N_1 \in \mathscr{A}$, $N_2 \in A$, $N_1 \neq N_2$, $x \in D_1 = A \setminus N_1$ и $y \in D_2 = A \setminus N_2$. Предположим, что $[x] \cap [y] \nsubseteq \cap \mathscr{A}$. Тогда существует такой элемент $N_3 \in \mathscr{A}$, что $[x] \cap [y] \nsubseteq N_3$. Из этого, согласно (г), мы получаем $D_3 = A \setminus N_3 \subseteq [x] \cap [y]$, т. е. $D_3 \subseteq [x]$ и $D_3 \subseteq [y]$. Согласно предположению $D_1 \neq D_2$ или $D_2 \neq D_3$. Тогда, согласно (в), $D_1 \subseteq N_3$ или $D_2 \subseteq N_3$. Отсюда $[x] \subseteq N_3$ или $[y] \subseteq N_3$. Это противоречит тому, что $D_3 \subseteq [x]$ и $D_3 \subseteq [y]$.

Теорема 6. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ *— простой и пусть* $x \in A$. *Тогда:*

$x \notin \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда* $A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ *— максимальный элемент в* $A/\mathscr{I}$.

Доказательство. I. Пусть $x \in A$ и $x \notin \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Тогда существует по крайней мере один такой элемент $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, что $x \notin N$. Значит, $x \in A \setminus N$. Согласно лемме 1, имеет место $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$. Поэтому $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Из этого согласно теореме 3, мы получаем $A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ является максимельным элементом в $A \setminus \mathscr{I}$.

II. Пусть $A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$. Согласно теореме 3, $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Из этого следует, что $x \notin \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$

Пусть $\mathbf{A}$ — апгебра. Если H — любое непустое множество $H \subseteq A$, то через $\mathscr{P}_{\max}(H)$ мы будем обозначать множество всех таких элементов $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, для которых $H \subseteq N$. Обозначим черех $\mathbf{P}(H)$ множество $\cap \mathscr{P}_{\max}(H)$, т. е. $\mathbf{P}(H) = \cap \mathscr{P}_{\max}(H)$, если $H \neq \emptyset$, и положим $\mathbf{P}(\emptyset) = \emptyset$.

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— унарная алгебра. Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *и* $N \neq \mathbf{A}$. *Тогда:* $N = \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\}$ *и* $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *для всех* $x \in A \setminus N$ *тогда и только тогда, когда* $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq N$.

Доказательство. Пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $N \neq A$.

I. Если $N = \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\}$ и $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$для всех $x \in A \setminus N$, то $N = \mathbf{P}(N)$. Тогда, очевидно, $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq N$.

II. Пусть $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq N$. Тогда $x \notin \cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A \setminus N$ Согласно теореме 6, $A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$. Из этого, согласно лемме 3, мы заключаем, что $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A \setminus N$. Предположим, что существует по карйней мере один элемент $y \in A \setminus N$ такой, что $N \nsubseteq A \setminus [y]\mathscr{I}$. Тогда, согласно лемме 6, мы получаем $[y]\mathscr{I} \subseteq N$. Это противоречит тому, что $y \in A \setminus N$. Значит $N \subseteq \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\}$. Пусть y — произвольный элемент из $\cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\}$. Предрположим, что $y \notin N$. Тогда $y \notin A \setminus [y]\mathscr{I}$ и $y \in A \setminus N$. Это противоречит тому, что $y \in \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\}$. Значит, $y \in N$. Из предыдущего мы заклбчаем, что $N = \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \ x \in \in A \setminus N\}$ и $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A \setminus N$.

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— унарная алгебра и пусть* H *— непустиео подмножество в* A. *Тогда:* $H = \mathbf{P}(H)$ *тогда и только тогда, когда* $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq H$ *и* $H \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— унарная альгебра. Пусть* $H_\alpha \subseteq A$ *и* $H_\alpha = \mathbf{P}(H_\alpha)$ *для каждого* $\alpha \in \Lambda$ *(*Λ *— непустое множество индексов). Тогда:*

(а) $\mathbf{P}(\cup \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}) = \cup \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$.

(б) $\mathbf{P}(\cap \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}) = \cap \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$.

Доказательство. а) Предположим, что существеут по крайней мере одно такое $\alpha \in \Lambda$, что $H_\alpha \neq \emptyset$. Тогда $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq \cup \{ H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Из этого, согласно следствию 2, мы получаем утветждение (а). Если $H_\alpha = \emptyset$ для всех $\alpha \in \Lambda$, тоб очевидно, истинно утвержение (а).

б) Если $\cap \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} = \emptyset$, то, очевидно, утверждение (б) истинно. Если $\cap \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \neq \emptyset$, то $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq \cap \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Из этогоб согласно следвтсию 2, мы получаем утвержение (б).

Примечание 1. Пусть $\mathbf{A}$ — унарная альгебра. Из следствия 2 и тоеремы 8 вытекает: Множество всех тех элементов $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq N$ (присоединением нуля, если $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$), является полной дистрибутивной подстрцутурой структуры всех подмножеств множества A (по теоретико-множественному включению, причем пересечение и объединение имеют теоретико-меожественный смысл).

Примечание 2. На примере аддитивной группы целых чисел по mod 6, можно легко доказать, что не для каждой алгебры $\mathbf{A}$ имеют места слкдующие утверждения:

(a_1) Если $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, то $A \setminus N = [x]\mathscr{I}$, где $x \in A \setminus N$.

(a_2) Пусть алгебра $\mathbf{A}$ — моногенна и $\mathbf{A}$ не является $\mathscr{I}$ — простой. Тогда: $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \{N^*\}$ и $A \setminus D = N^*$, где D — множество всех обрезующих алгебры $\mathbf{A}$.

(a_3) Если $A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$, то $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$.

(a_4) Пусть $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, $|\mathscr{A}| \geq 2, N_1 \in \mathscr{A}$, $N_2 \in \mathscr{A}$, $N_1 \neq N_2$, $D_1 = A \setminus N_1$ и $D_2 = A \setminus N_2$.

Тогда:

(a_{41}) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

(a_{42}) $D_1 \subseteq N_2$.

(a_{43}) Если $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ и $N \cap D_1 \neq \emptyset$, то $D_1 \subseteq N$.

(a_{44}) Если $x \in D_1$ и $y \in D_2$, то $[x] \cap [y] \subseteq \cap \mathscr{A}$.

(a_5) Если $x \in A$ и $x \notin \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, то $A \setminus [x]\mathscr{I} \neq \emptyset$ и $[x]\mathscr{I}$ — максимальный элемент в $A/\mathscr{I}$.

(a_6) Если $\cap \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \subseteq N$ и $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, то $N = \cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\}$ и $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A \setminus N$.

(a_7) Если $H_\alpha \subseteq A$ и $H_\alpha = \mathbf{P}(H_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Lambda$, то $\mathbf{P}(\cup \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}) = \cup \{H_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$.

Далее на примерах можно легко показать, что не для каждой алгебры $\mathbf{A}$ имеют место следующие утверждения:

(б$_1$) Если $[x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A$, то $A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ для всех $x \in A$.

(б$_2$) Если $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$, то $A = \cup\, \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ и $|\mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})| \geq 2$.

(б$_3$) Если $A = \cup\, \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$ и $|\mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})\ | \geq 2$, то $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$.

Лемма 7. *Пусть $\mathbf{A}$ — унарная алгебра. Пусть $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}), \mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Тогда:*

(а) $\cap\, \mathscr{A} \subseteq \cap\, \mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$.

(б) $\cap\, \mathscr{A} = \cap\, \mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Доказательство. а) Предположим, что $\cap\, \mathscr{A} \subseteq \cap\, \mathscr{B}$, и что существует такой элемент $N' \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, что $N' \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{A}$. Пусть x—любой элемент из A. Если $x \in \cap\, \mathscr{A}$, то $x \in N'$. Если $x \notin \cap\, \mathscr{A}$, то существует по крайней мере один такой элемент $N \in \mathscr{A}$, что $x \notin N$. Так как $N \neq N'$, то $A = N \cup N'$. Из этого мы получаем $x \in N'$. Следовательно, $N' = A$. Это противоречит тому, что $N' \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$.

б) Утверждение (б) вытекает из (а).

Теорема 9. *Пусть $\mathbf{A}$ — унарная альгебра. Пусть $M \subseteq A$, $N \subseteq A$, $M = \mathbf{P}(M)$ и $N = \mathbf{P}(N)$. Тогда:*

(а) $\mathscr{P}_{\max}(M \cap N) = \mathscr{P}_{\max}(M) \cup \mathscr{P}_{\max}(N)$,

(б) $\mathscr{P}_{\max}(M \cup N) = \mathscr{P}_{\max}(M) \cap \mathscr{P}_{\max}(N)$

Доказательство. а) Пусть $M = \mathbf{P}(M)$ и $N = \mathbf{P}(N)$. Согласно теореме 7, имеет место $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(M \cap N) = M \cap N$. Следовательно, $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(M \cap N) = M \cap N = (\cap\, \mathscr{P}_{\max}(M)) \cap (\cap\, \mathscr{P}_{\max}(N)) = \cap\, (\mathscr{P}_{\max}(M) \cup \mathscr{P}_{\max}(N))$. Из этого, согласно лемме 7, мы получаем утверждение (а).

б) Утверждение (б) очевидно.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра и H — любое подмножество множества A. Знаком $\operatorname{codim} H$ мы будем обозначать $|\mathscr{P}_{\max}(H)|$ т. е. $\operatorname{codim} H = |\mathscr{P}_{\max}(H)|$, и положим $\dim H = |\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \setminus \mathscr{P}_{\max}(H)|$.

Теорема 10. *Пусть $\mathbf{A}$ — унарная алгебра. Пусть $M \subseteq A$, $N \subseteq A$. Тогда:*

(а) $\dim \emptyset = \operatorname{codim} A = 0$,

(б) $\dim A = \operatorname{codim} \emptyset = |\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})|$,

(в) $\dim M = \dim \mathbf{P}(M)$,

(г) *если* $M = \mathbf{P}(M)$, $N = \mathbf{P}(N)$, то

$\operatorname{codim}(M \cup N) + \operatorname{codim}(M \cap N) = \operatorname{codim} M + \operatorname{codim} N$,

(д) $\operatorname{codim} M + \dim M = |\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})|$.

Доказательство. Очевидно миеют место утверждения (а), (б), (в) и (д). Согласно теореме 9 мы получаем:

$\operatorname{codim}(M \cap N) = |\mathscr{P}_{\max}(M \cap N)| = |\mathscr{P}_{\max}(M) \cup \mathscr{P}_{\max}(N)|,$

$\operatorname{codim}(M \cup N) = |\mathscr{P}_{\max}(M \cup N)| = |\mathscr{P}_{\max}(M) \cup \mathscr{P}_{\max}(N)|.$

Далее имеет место

$|\mathscr{P}_{\max}(M) \cup \mathscr{P}_{\max}(N)| + |\mathscr{P}_{\max}(M) \cap \mathscr{P}_{\max}(N)| =$

$= |\mathscr{P}_{\max}(M)| + |\mathscr{P}_{\max}(N)| = \operatorname{codim} M + \operatorname{codim} N.$

Из этого вытекает утверждение (г).

Пусть $\mathbf{A}$ — унарная алгебра и пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Скажем, что два элемента $x, y \in A$ находятся в *отношении* ν_N, если $x = y$ или $x \in N$ и $y \in N$. Очевидно отношение ν_N является конгруенцией на $\mathbf{A}$. Знаком $\mathbf{A}/\nu_N$ мы будем обозначать фактоор алгебру $\langle A/\nu_N; F\rangle$, соответствующую конгруенции ν_N на $\mathbf{A}$. Отображением φ множества A на A/ν_N определенного следующим образом: $x\varphi = [x]\nu_N$ для всех $x \in A$, оно является гомоморфизмом алгебры $\mathbf{A}$ на фактор-алгебру $\mathbf{A}/\nu_N$ и называется каноническим гомоморфизмом.

Если Φ — отображение множества X в множество Y и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, то $A\Phi$ обозначает образ множества A, а $B\Phi^{-1}$ обозначает прообраз множества B при отображении Φ множества X в Y.

Лемма 8. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой. Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *и* $N \neq A$. *Пусть* φ — *канонический гомоморфизм алгебры* $\mathbf{A}$ *на* $\mathbf{A}/\nu_N$, *и положим* $\bar{O} = N\varphi$. *Тогда имеет место:*

(а) *Если* $L \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, *то* $L\varphi \in \mathscr{P}(\mathbf{A}/\nu_N)$.

(б) *Если* $\bar{L} \in \mathscr{P}(\mathbf{A}/\nu_N)$, *то* $\bar{L}\varphi^{-1} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$.

(в) *Если* $L \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, *то* $L\varphi \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}/\nu_N)$ *тогда и только тогда, когда либо* $N \subseteq L$, *либо* $N \subseteq A \setminus L$.

(г) *Если* $\bar{L} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}/\nu_N)$ *и* $\bar{O} \in \bar{L}$, *то* $\bar{L}\varphi^{-1} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$.

Доказательство очевидно.

Теорема 11. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой. Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $N = \mathbf{P}(N)$ *и* $N \neq A$. *Пусть* φ — *канони:еский гомоморфизм алгебры* $\mathbf{A}$ *на фактор-алгебру* $\mathbf{A}/\nu_N$ *и* $\bar{O} = N\varphi$. *Пусть* $\bar{O} \in \bar{L}$ *для всех* $\bar{L} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}/\nu_N)$. *Тогда:*

$\dim N + \dim A/\nu_N = \dim A.$

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}_1 = \{L \mid L \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}),\ N \subseteq L\}$. Пусть $L_1 \in \mathscr{A}_1$, $L_2 = \mathscr{A}_1$ и $L_1 \neq L_2$. Тогда $A \setminus L_1 \subseteq A \setminus N$ и, согласно лемме 6, имеет место $A \setminus L_1 \subseteq L_2$. Пусть $x \in A \setminus L_1$, то $x\varphi \in L_2\varphi$. Предположим, что $x\varphi \in L_1\varphi$. Тогда $(x\varphi)\varphi^{-1} = x \in L_1$. Это противоречит тому, что $x \in A \setminus L_1$. Следовательно, $L_1\varphi \neq L_2\varphi$. Это, согласно лемме 8, обозначает, что существует взаимно однозначное отображение множества $\mathscr{A}_1$ на $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}/$

$/\nu_N)$. Значит, $\operatorname{codim} N = \dim A/\nu_N$. Из этого, согласно теореме 10, мы получает утверждение теоремы 11.

Пусть $\mathbf{A}$ — унарная алгебра и пусть $\emptyset \neq H \subseteq A$.
Пусть $H' = \{y \in A \,/\, y = f(x)$, ьде $x \in H, f \in F\}$ и положим $F(H) = [H']$. Вместо обозначения $F(\{x\})$, где $x \in A$, мы пользуемся обозначением $F(x)$.

Лемма 9. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— унарная алгебра. Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $N \neq A$ *и положим* $D = A \setminus N$. *Тогда:*

$N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда имеет место точно одно из следующих утверждений:*

(а) $D = \{x\}$ *и* $F(A) \subseteq N$,

(б) $D = [x]$ *для всех* $x \in D$,

(в) $D \subset [x]$ *для всех* $x \in D$ *и* $F(A) \nsubseteq N$.

Доказательство. I. Пусть $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ и $N \neq A$. Тогда имеет место точно из следующих утверждений:

(α) $F(D) \cap D = \emptyset$,

(β) $F(D) \cap D \neq \emptyset$.

α) Предположим, что имеет место утверждение (α). Очевидно $F(A) \subseteq N$. Пусть x — произвольный элемент из D. Тогда $N \subset N \cup \{x\} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Так как $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, то $A = N \cup \{x\}$. Значит, $D = \{x\}$ Из предыдущего вытекает, что имеет мусто утверждение (а) и не имеет место ни одно и утверждений (б), (в).

β) Допустим, что имеет место утверждение (β). Тогда имеет место точно одно из утверждений

(β_1) $F(D) \subseteq D$,

(β_2) $F(D) \nsubseteq D$ и $F(D) \cap D \neq \emptyset$.

β_1) В случае (β_1), согласно лемме 1, мы получаем $[x] \subseteq D = [x]\mathscr{I} \subseteq [x]$ для всех $x \in D$. Это означает, что имеет место утверждение (б) и не имеет местб ни одно из утверждений (а), (в).

β_2) Предположим, что имеет место (β_2). Тогда $F(A) \nsubseteq N$, и существует по крайней мере один элемент $x \in D$ и по крайней мере один элемент $f \in F$ такие, что $f(y) \in D$. Отсюда, согласно лемме 1, мы получаем $D = [y]\mathscr{I} \subset$ $\subset [y] = [x]$ для всех $x \in D$ и $F(A) \nsubseteq N$. Это означает, что имеет место утверждение (в) и не имеет место ни одно из утверждений (а), (б).

II. Пусть $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $N \neq A$ и $D = A \setminus N$. Если имеет место (а), то, очевидно, $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Предположим, что имеет место произвольное из утверждений (б) и (в) и $N \notin \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Это означает, что существует такой элемент $N' \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, что $N \subset N' \neq A$. Пусть $y \in N' \cap D$. Тогда $A =$ $= N \cup D \subseteq N \cup [y] \subseteq N'$. Это противоречит тому, что $N' \neq A$. Отсюда вытекает $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$.

Пусть $\mathbf{A}$ — унарная алгебра. Элемент $z \in A$ назовем *инвариантным* в $\mathbf{A}$, если $f(z) = z$ для всех $f \in F$. Унарную алгебру $\mathbf{A}$ назовем *унарной алгеброй с инвариантным элементом порядка 2*, если A содержит точно два элемента $f(x) = 0_A$ для всех $x \in A$, где 0_A — инвариантный элемент в $\mathbf{A}$. Уранную алгебру $\mathbf{A}$ с инвариантным элементом $0_A \in A$ назовем $0\mathscr{I}$ — *транзитивной*, если $A \neq \{0_A\}$ и $y \in F(x)$ для всех $x \in A$, $y \in A$ и $x \neq 0_A$. Очевидно, имеет место: *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарняа алгебра с инвариантным элементом* 0_A *и пусть* $A \neq \{0_A\}$. *Тогда:* $\mathbf{A}$ *является* $0\mathscr{I}$ — *транзитивной тогда и только тогда, когда* $A = F(x)$ *для всех* $x \in A$ *и* $X \neq \{0_A\}$.

Унарную алгебру $\mathbf{A}$ с инвариантным элементом 0_A назовем $\mathscr{I}$ — *транзитивной*, если $A \neq \{0_A\}$ и $y \in [x]$ для всех $x \in A$, $y \in A$, $x \neq 0_A, y \neq 0_A$ и $A \setminus \{0_A\} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$. Очевидноб имеет место: *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра с инвариантным элементом* 0_A *и пусть* $A \neq \{0_A\}$. *Тогда:* $\mathbf{A}$ *является* $\mathscr{I}$ — *транзитивной тогда и только тогда, когда* $A \setminus \{0_A\} \in \mathscr{P}_{\min}(\mathbf{A})$.

Теорема 12. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра. Пусть* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *и* $N \neq A$. *Тогда:* $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ *тогда и только тогда, когда имеет место точно одно из следующих утверждений:*

(а) $\mathbf{A}/\nu_N$ — *унарная алгебра с инвариантным элементом порядка 2*,

(б) $\mathbf{A}/\nu_N$ — $\mathscr{I}$ — *транзитивна*,

(в) $\mathbf{A}/\nu_N$ — $0\mathscr{I}$ — *транитивна.*

Доказательство. Утверждение теоремы 12 мы получаем непосредственно из леммы 9.

Обозначим через $\mathscr{B}_1$ сласс всех унарных $\mathscr{I}$ — *простых* алгебр. Пусть $\mathscr{B}_2$ класс, который содержит точно все *унарные алгебры с инвариантнвм элементом порядка 2* и все $0\mathscr{I}$ — *транзитивные унарные алгебры.*

Определение 3. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра; мы будем говорить что:*

а) *унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *является алгеброй типа* $\mathbf{B}_1$, *если* $A = \cup \{N_i \mid i \in I\}$, *где* $N_i \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *и* $\langle N_i; F\rangle \in \mathscr{B}_1$ *для всех* $i \in I$ (I — *непустое множество индексов*).

б) *Унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *с инвариантным элементом* $0_A(0_A \in A)$ *является алгеброй типа* $\mathbf{B}_2$, *если*

б$_1$) $\mathbf{A} \in \mathscr{B}_2$, б$_2$) $A = \cup \{N_i \mid i \in I\}$, где $|I| \geq 2$, $N_i \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $\langle N_i; F\rangle \in \mathscr{B}_2$ *для всех* $i \in I$ *и* $N_i \cap N = \{0_A\}$ *для всех* $i \in I, j \in I$ *и* $i \neq j$.

в) *Унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *с инвариантным элементом* $0_A \in A$ *является алгеброй типа* $\mathbf{B}_3$, *если* $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, *где* $A_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $\langle A_1; F$ — типа $\mathbf{B}_1$ и $A_2 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $\langle A_2; F\rangle$-типа $\mathbf{B}_2$.

Из теоремы 4 вытекает

Теорема 13. *Пусть унарная алгебра* $\mathbf{A}$ *не является* $\mathscr{I}$ — *простой. Тогда:* $\mathbf{A}$ — *типа* $\mathbf{B}_1$ *тогда и только тогда, когда* $\cap\, \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) = \emptyset$.

Теорема 14. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *унарная алгебра. Пусть* $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$, $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$ *и* $N \neq A$ *Тогда:*

$N = \mathbf{P}(N)$ *тогда и только тогда, когда имеет место точно одно из следующих утверждений:*

(а) $\mathbf{A}/\nu_N$ — типа $\mathbf{B}_1$,

(б) $\mathbf{A}/\nu_N$ — типа $\mathbf{B}_2$,

(в) $\mathbf{A}/\nu_N$ — *типа* $\mathbf{B}_3$.

Доказательство. Пусть φ — канонический гомоморфизм алгебры $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}/\nu_N$ и $\bar{0} = N\varphi$. Очевидно, $\bar{0}$ — инвариантный элемент в $\mathbf{A}/\nu_N$.

I. Пусть $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$, $N \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, $N \neq A$ и $N = \mathbf{P}(N)$ Положим $D(L) = A \setminus L$ для всех $L \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Тогда:

(1) $A \setminus N = \cup \{D(L) \mid L \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}),\ N \subseteq L\}$.

Если $|\mathscr{P}_{\max}(N)| = 1$, то $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Из этого, согласно теореме 12, мы получаем, что имеет место точно одно из утверждений (а), (б) и не имеет место утверждение (в). Предположим, что $|\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})| \geq 2$. Пусть Z — такое непустое подмножество множества $A \setminus N$, что $Z \cap D(L)$ содержит точно один элемент для каждого $L \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$. Пусть L — любой элемент из $\mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$ и $x \in D(L)$. Тогда, согласно лемме 1, мы получаем $D(L) = [x]\mathscr{I}$. Далее, из (1), ввиду лемм 1 и 6, мы получаем:

(α_1) $N_z = N \cup [z]\mathscr{I} \in \mathscr{P}(\mathbf{A})$, т. е., $A_z = \langle N_z; F\rangle$ — подалгебра алгебры $\mathbf{A}$ для всех $z \in Z$,

(α_2) $N \cap [z]\mathscr{I} = \emptyset$ для всех $z \in Z$,

(α_3) $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}_z)$ для всех $z \in Z$,

(α_3) $N_u \cap N_v = N$ для всех $u, v \in Z$ и $u \neq v$,

(α_4) $A = \cup \{N_z \mid z \in Z\}$.

Так как в силу (α_3) $N \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, то, согласно теореме 12, имеет место точно одно из следующих утверждений:

i) $\mathbf{A}_z/\nu_N$ — $\mathscr{I}$ — транзттивна для всех $z \in Z$,

ii) $\mathbf{A}_z/\nu_N \in \mathscr{B}_2$ для всех $z \in Z$,

iii) существует по крайней мере такой элемент $z \in Z$, что $\mathbf{A}_z/\nu_N$ — $\mathscr{I}$ транзитивная и существует по крайней мере один акой элемент $u \in Z$, что $\mathbf{A}_u/\nu_N \in \mathscr{B}_2$.

В случае i), очевидно, имеет место утверждение (а) и не имеет место ни одноиз утверждений (б), (в). В случае ii), очевидно, имеет место утверждение (б) и не имеет место ни одно из утверждений (а), (в). Наконец, в случае iii) обозначим через Z_1 множество всех $z \in Z$ для которых $\mathbf{A}_z/\nu_N$ — $\mathscr{I}$ — транзитиваня, и через Z_2 множество всех $u \in Z$, для которых $\mathbf{A}_u \in \mathscr{B}_2$. Тогда можно легко доказать, что для $A_1 = \cup \{[\bar{z}]\mathscr{I} \mid \bar{z} = z\varphi,\ z \in Z_1\}$ и $A_2 = \cup \{N_z \mid \nu_N \mid z \in Z_2\}$ и имеет место: $A_1 \in \mathscr{P}(\mathbf{A}/\nu_N)$,
$\langle A_1; F\rangle$ — типа $\mathbf{B}_1$, $A_2 \in \mathscr{P}(\mathbf{A})/\nu_N)$,
$\langle A_2; F\rangle$ — типа $\mathbf{B}_2$, $A/\nu_N = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Это онааед, что

имеет место утверждению (в) и не имеет место ни одно из утверждений (а), (б).

II. Предположим, что имеет место любое из утверждений (а), (б), (в). Пусть $\bar{x}$ — любой элемент из $A/\nu_N \setminus \{\bar{0}\}$. Тогда $[\bar{x}]\mathscr{I} \cap \{\bar{0}\} = \emptyset$ и $[\bar{x}]\mathscr{I}$ максимальный элемент из A/ν_N. Из этого, согласно лемме 3, мы получаем, что $0 \in A/\nu_N \setminus [\bar{x}]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A}/\nu_N)$ для всех $\bar{x} \in A/\nu_N \setminus \{\bar{0}\}$. Согласно лемме 8, это означает, что $(A/\nu_N \setminus [\bar{x}]\mathscr{I})\varphi^{-1} = A \setminus [x]\mathscr{I} \in \mathscr{P}_{\max}(\mathbf{A})$, где $x = \bar{x}\varphi^{-1} \in A \setminus N$. Тогда $\cap \{A \setminus [x]\mathscr{I} \mid x \in A \setminus N\} = \cap\{(A/\nu_N \setminus [\bar{x}]\mathscr{I})\varphi^{-1} \mid \bar{x} \in A/\nu_N \setminus \{\bar{0}\}\} = (\cap \{A/\nu_N \setminus [\bar{x}]\mathscr{I} \mid x \in A/\nu_N \setminus \{\bar{0}\}\})\varphi^{-1} = \bar{0}\varphi^{-1} = N$. Значит, $N = \mathbf{P}(N)$.

Примечание 4. В этом примечании мы применим полученные результаты к изучению свойств маскимальных собственных инвариантных подмножеств, к изучению свойств пересечения максимальных собственных инвариатнных подмножеств в (S, T) — биоперандах. Далее, изучим свойства инвариантных подмножеств в (S, T) — биоперандах, пересечение которых с дополнением пересечения максимальных собственнх подмножеств в (S, T) — биоперандах является не пустым множеством.

Пусть ${}_SM_T$ — (S, T) — биоперанд (см. [1]). Множество всех инвариантных подмножеств в ${}_SM_T$ обозначим через $\mathscr{P}(M)$. Элемент $N \in \mathscr{P}(M)$ назовем *минимальным (максимальным) собственным* инвариантным подмножеством в ${}_SM_T$, если $N \neq M$ и не существует такой элемент $N' \in \mathscr{P}(M)$, что $N' \subset N(N \subset N' \neq M)$. Обозначим через $\mathscr{P}_{\min}(M)$ $(\mathscr{P}_{\max}(M))$ множ всех тех $N \in \mathscr{P}(M)$, что N — минимальное (максимальное) собственное инвариантное подмножество в ${}_SM_T$. *Главным* инвариантным множеством в ${}_SM_T$, порожденным элементот $x \in M$, назовем инвариантное множество вида $x \cup Hx \cup xT \cup HxT$ и обозначим его через $[x]_M$. На множестве M мы определим отношение $\mathscr{I}_M$ следующим образом: скажем, что два элемента $x, y \in M$ находятся в отношении $\mathscr{I}_M$, если $[x]_M = [y]_M$. Очевидно, отношение $\mathscr{I}_M$ на M является отношением эквивалентности. ${}_SM_T$ назовем $\mathscr{I}_M$ — простым, если не существует такой элемент $N \in \mathscr{P}(M)$, что $N \neq M$. Элемент $x \in M$ назовем *образующим* в ${}_SM_T$, если $M = [x]_M$. ${}_SM_T$ назовем *моногенным*, если ${}_SM_T$ содержит по крайней мере один образующий элемент. Обозначим через N^* такой элемент из $\mathscr{P}(M)$ (если он существует), что $N^* \neq M$ и $N \subseteq N^*$ для всех $N \in \mathscr{P}(M)$ и $N \neq M$. Скажем, что два элемента $[x]\mathscr{I}_M \in M/\mathscr{I}_M$, $[y]_M \in M/\mathscr{I}_M(x, y \in M)$ находятся в отношении $\leqslant_M$ на $M/\mathscr{I}_M$ тогда и только тогад, если $[x]_M \subseteq [y]_M$. Пусть $N \in \mathscr{P}(M)$. Скажем, что два элемента $x, y \in M$ находятся в отношении ν_N на M тогда и только тогда, когда $x = y$ или $x \in N$ и $y \in N$. Очевидно, ото ν_N на M является конгруенцией иа ${}_SM_T$. Отображение φ множества M на M/ν_N определено следующим образом: $x\varphi = [x]\nu_N$ для всех $x \in M$, оно является каноническим гомоморфихмом (S, T) — биоперанда ${}_SM_T$ на фактор (S, T) — биоперанд ${}_SM/\nu_{NT}$. Элемен $z \in M$ называется *инвариантным* элементом ${}_SM_T$, если $sz = zt = z$ для всех $s \in S$, $t \in T$. ${}_SM_T$ назовем (S, T)-биоперандом с *инвариантным элементом* $0_M \in M$ *порядка 2*, если M содержит точно два элемента и $sx = xt = 0_M$ для всех $s \in S$, $x \in M$, $t \in T$. ${}_SM_T$ с инвариантным элементом $0_M \in M$ и $M \neq \{0_M\}$ назовем $(S, 0)$ — *транзитным* ($(0, T)$ — *транзитиыным*), если $Sx = M \setminus \{0_M\}(xT = M \setminus \{0_M\})$ для всех $x \neq 0_A$ и $MT = \{0_M\}$ $(SM = \{0_M\})$. ${}_SM_T$ с инвариантным элементом $0_M \in M, M \neq \{0_M\}$ назовем *слева (справа)* 0 — *транзитивным*, если для всех $x \in M$, $y \in M$ и $x \neq 0_M$ существует такой элемент $s \in S(t \in T)$ что $sx = y(xt = y)$ и $MT = \{0_M\}(SM = \{0_M\})$. ${}_SM_T$ с инвариантным элементом $0_M \in M$ и $M \neq \{0_M\}$ назовем (S, T) — *транзитивным*, если $SxT = M \setminus \{0_M\}$ для всех $x \neq 0_M$. ${}_SM_T$ с инвариантным элементом $0_M \in M$, и $M \neq \{0_M\}$ назовем 0 — *транзитивным* если для всех $x \in M$, $y \in M$, $x \neq 0_M$ существует такие $s \in S$ и $t \in T$, что $y = sxt$.

Обозначим через $\mathscr{B}_1$ класс всех $\mathscr{I}_M$-*простых* (S, T)-биорандов. Пусть $\mathscr{B}_2$ класс, который содержит точно все с *инвариантным элементом порядка* 2 $(S, 0)$ — *транзитивные*, *слева* 0 — *транзитивыне*, $(0, T)$ — *транхитив*, *ные*, *справа* 0 — *транзитивные*, 0 — *транзитивные* (S, T)-биоперанды. Мы будем говорить, что:

(а) ${}_SM_T$ является (S, T)-биоперандом типа $\mathbf{B}_1$, если $M = \cup \{N_i \mid i \in I\}$, где $N_i \in \mathscr{P}(M)$ и ${}_SN_{iT} \in \mathscr{B}_1$ для всех $i \in I$ (I — непустое множество индекслв).

(б) ${}_SM_T$ с инвариантным элементом $0_M \in M$ является (S, T)-биоперандом типа $\mathbf{B}_2$ если

б$_1$) ${}_SM_T \in \mathscr{B}_2$

б$_2$) $M = \cup \{N_i \mid i \in I\}$ где $|I| \geq 2$, $N_i \in \mathscr{P}(M)$, ${}_SN_{iT} \in \mathscr{B}_2$ для всех $i \in I$ и $N_i \neq N_j$, $N_i \cap N_j = \{0_M\}$ для всех $i \in I$, $j \in I$ и $i \neq j$.

(в) ${}_SM_T$ с инвариантным элементом $0_M \in M$ является (S, T)-биоперандом типа $\mathbf{B}_3$, если $M = M_1 \cup M_2$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, где $M_1 \in \mathscr{P}(M)$, ${}_SM_{1T}$ типа $\mathbf{B}_1$ и $M_2 \in \mathscr{P}(M)$, ${}_SM_{2T}$ — типа $\mathbf{B}_2$.

Пусть ${}_SM_T$ — (S, T)-биоперанд. Если каждому $s \in S$ $(t \in T)$ сопоставлена унарная операция $f_s(f_t)$ на M, определенная постедством $f_s(x) = sx$ $(f_t(x) = xt)$, где sx (xt) имеет то же значение что и в (S, T) — биореранде ${}_SM_T$, и если положим $F_1 = \{f_s \mid s \in S\}$, $F_2 = \{f_t \mid \in T\}$ и $F = F_1 \cup F_2$, то $\mathbf{M} = \langle M; F\rangle$ является унарной алгеброй. Назовем ее унарной алгеброй, присоединенной к (S, T)-биоперанду ${}_SM_T$. Очевидно, имеют место:

Теорема А. *Пусть* ${}_SM_T$ — (S, T)-*биоперанд и пусть* $\mathbf{M} = \langle M; F\rangle$ — *унарная алгебра, присоединенная к* (S, T)-*биоперанду* ${}_SM_T$. *Тогда для каждого непустого подмножества* N *множества* M *имееи место:*

(а) $N \in \mathscr{P}(M)$ *тогда и только тогда, когда* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{M})$.

(б) $N = [a]_M$ $(a \in N)$ *тогда и только тогда, когда* $N \in \mathscr{P}(\mathbf{M})$ *и* $N = [a]$.

Теорема Б. *Пусть* $\mathsf{M} = \langle M; F \rangle$ *— унарная алгебра, присоединенная к* (S, T)*-биоперанду* ${}_SM_T$*. Тогда:*

(*a*) M *является унарной алгеброй с инвариантным элементом порядка 2 тогда и только тогда, когда* ${}_SM_T$ *является* (S, T)*-биоперандом с инвариантным элементом порядка 2.*

(б) M *является* $0\mathscr{I}$ *— транзитивной тогда и только тогда, когда имеет место точно одно из следующих утверждений:*

(б$_1$) ${}_SM_T$ *—* $(S, 0)$ *— транзитивный-,*

(б$_2$) ${}_SM_T$ *—* $(0, T)$ *— транзитиынвй,*

(б$_3$) ${}_SM_T$ *— слева* 0 *— транзитивный,*

(б$_4$) ${}_SM_T$ *— справа* 0 *— транизитивный,*

(б$_5$) ${}_SM_T$ *—* 0 *— транзитивный.*

в) M *—* $\mathscr{J}$ *— простая тогда и только тогда, когда* ${}_SM_T$ *—* $\mathscr{I}_M$ *— простой.*

г) M *являетмя типа* $\mathsf{B}_1(\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3)$ *тогда и только тогда, когда* ${}_SM_T$ *— типа* $\mathsf{B}_1(\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3)$.

Теперь ясно, как посредством теорем А, Б и теорем (доказаных в этой работе) о подалгебрах в унарных алгебрах мы получаем теоремы об инвариантных подмножествах в (S, T)-биоперандах, аналогичные к этим утверждениям.

Далее, мы заметим: Пусть $\langle S;.\rangle$ полугруппа и $\langle H; .\rangle$, $\langle T; .\rangle$ ее подполугркппы. Пусть A есть (H, T) — идеал поллугруппы $\langle S; .\rangle$ (непустое подмножество A множества S называется (H, T) — идеалом в $\langle S; .\rangle$, если $HA \subseteq A$ и $AT \subseteq A$ см. [5]). Если каждому элементу $h \in H (t \in T)$ сопоставлена унарная операция $f_h (f_t)$ на A и определена посредством $f_h(x) = h \,.\, x (f_t(x) = x \,.\, t)$ для каждого $x \in A$, где $h \,.\, x (x \,.\, t)$ есть произве дение элементов $h, x (x, t)$ в определенном порядке полугркппы $\langle S; .\rangle$, и если положим $F_1 = \{f_h \mid h \in H\}$, $F_2 = \{f_t \mid t \in T\}$ и $F = F_1 \cup F_2$, то $\mathsf{A}(A) = \langle A; F \rangle$ является унарной алгеброй. Назовем ее унапной алгеброй, присоединенной к (H, T) — идеалу A полугруппы $\langle S; .\rangle$. Очевидно, что таким же образом, как мы это сделали выше, мы можем получить теоремы о (H, T) — идеалах в A (непустое подмножество N множества S назовем (H, T) — идеалом в A, если N является (H, T) — идеалом в $\langle S; .\rangle$ и $N \subseteq A$).

ЛИТЕРАТУРА

[1] CLIFFORD, A. H., PRESTON, G. B.: The algebraic theory of semigroups. Vol. II. Math. Surveys No. 7, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967.

[2] GRATZER, G.: Universal algebra. van Nostrand, Priceton, N. I. 1968.

[3] GRILET, P. A.: Intersections of maximal ideals in semigroups. Amer. Math. Monthly, *76*, 503—509.

[4] ГЕДРЛИН, З.: Коммутативные системы как обобщенные полугруппы. ДАН, Том. *164*, Но. 3. 1965, 483—486.
[5] HRMOVÁ, R.: Relative ideals in semigroups. Mat. Čas., *17*, 1967, 206—223.
[6] КОН, Р.: Универсальная алгебра. Москва 1968.
[7] PONDELÍČEK, B.: Right prime ideals and maximal right ideals in semigroups. Mat. Čas. *21*, 1971, 87—90.
[8] SCHWARZ, Š.: Prime ideals and maximal ideals in semigroups. Czechosl. Math. J. *12*, 94 1969, 72—79.

Поступило 9. 12. 1970

Преработано 28. 6. 1973

Katedra matematiky
a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
880 31 Bratislava
Gottwaldovo nám. 50