Matematický časopis

Ladislav Mišík

Über einen Satz von Khintchine. II.

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 2, 145--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126608

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Mat. čas. 24, 1974, No 2, 145—154

ÜBER EINEN SATZ VON KHINTCHINE II

LADISLAV MIŠÍK

Herrn Professor Štefan SCHWARZ zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Einige Resultate über Ableitungen von Funktionen können als Folgerungen von Sätzen über die Haltung am Rande von Funktionen, die in einer offenen Halbebene definiert sind, angesehen werden ([8], [9], [10]). In [9] haben wir ein gewisses Lemma von Khintchine als Spezialfall eines Satzes über grenzwerte der Funktionen, die in einer offenen Halbebene definiert sind, gesehen. In diesem Artikel werden wir einige Resultate über qualitative Ableitungen von Funktionen als Spezialfall dieses Satzes ableiten. Wir werden sehen, daß auch für qualitative Ableitungen ein ähnlicher Satz wie der bekannte Satz von Khintchine ([2], S. 243) gilt.

1. Es sei H eine offene Halbebene, die durch die Gerade P begrenzt ist. Es sei $x \in P$. Dann sei $\mathscr{F}$ eine Filterbasis von Teilmengen von H, die den Punkt x als Häufungspunkt besitzen[(1)]. Für $A \in \mathscr{F}$ bezeichnen wir mit A_h die Menge aller Punkte aus A, die die Entfernung von P kleiner als h haben. Es sei jetzt g eine reelle Funktion, die auf H definiert ist. Dann definieren wir:

$$\limsup_{\mathscr{F}} g = \lim_{h \to 0+} \inf \{\sup\{ g(u, v) : (u, v) \in A_h\} : A \in \mathscr{F}\},$$

$$\liminf_{\mathscr{F}} g = \lim_{h \to 0+} \sup \{\inf\{ g(u, v) : (u, v) \in A_h\} : A \in \mathscr{F}\}.$$

---

(1) In [9] sind leider einige Fehler. Im Satz 1. muß man über die Systeme $\mathscr{F}_x^{(1)}$ und $\mathscr{F}_x^{(2}$ voraussetzen, daß sie Filterbasen sind. Im Falle, daß $\mathscr{F}$ nur ein nichtleeres System ist, kann $\limsup_{\mathscr{F}} g < \liminf_{\mathscr{F}} g$ sein. Bei der Anwendung des Satzes 1. muß das System $\mathscr{F}_x^{(1)}$ auf Seite 244 und im Satz 2. entweder das System aller lebesguemeßbaren Teilmengen von $L_x \cup P_x$, die den Punkt (x, x) als Dichtigkeitspunkt bezüglich L_x wie auch bezüglich P_x haben, oder das System aller Teilmengen A von $L_x \cup P_x$ mit (x, x) als Häufungspunkt, für welche $\limsup_{h \to 0+} \frac{|(L_x \cup P_x - A)_h|}{|(L_x \cup P_x)_h|} = 0$ ist, sein. Für dieses System sind die Behauptungen richtig. Der erste Fall auf Seite 245 wurde nicht richtig behandelt, er sollte ähnlich wie der zweite Fall behandelt werden.

Wenn $l = \limsup_{\mathscr{F}} g = \liminf_{\mathscr{F}} g$ ist, dann werden wir sagen, daß der Grenzwert $g_{\mathscr{F}}(x)$ der Funktion g bezüglich $\mathscr{F}$ im x existiert und dieser Grenzwert gleich l ist.

Es seien jetzt zwei oben beschriebene Filterbasen $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ gegeben. Man kann fragen: Wann kann man aus der Existenz von $g_{\mathscr{F}_1}(x)$ auf die Existenz von $g_{\mathscr{F}_2}(x)$ und auf ihre Gleichheit schließen. In [9] ist dazu folgende einfache notwendige und hinreichende Bedingung gegeben:

Satz 1. *Es seien $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ zwei solche Filterbasen von Teilmengen von H, die den Punkt x aus P als Haufungspunkt haben. Es sei g eine reelle Funktion, die auf H definiert ist. Aus der Existenz von $g_{\mathscr{F}_1}(x)$ folgt die Existenz von $g_{\mathscr{F}_2}(x)$ und ihre Gleichheit dann und nur dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

(1) *es gilt für alle a:* $\limsup_{\mathscr{F}_1} g \geqq a \Rightarrow \limsup_{\mathscr{F}_2} g \geqq a$ *und* $\liminf_{\mathscr{F}_2} g \leqq a \Rightarrow$
$\Rightarrow \liminf_{\mathscr{F}_1} g \leqq a$.

Wir nehmen für H die Halbebene $\{(u, v): v > u\}$. Für das System $\mathscr{F}_2^*$ nehmen wir das System $\{L_x \cup P_x\}$, welches nur von einer Menge gebildet ist, wobei $L_x = \{(y, x): y < x\}$ und $P_x = \{(x, y): y > x\}$ ist. Für $\mathscr{F}_1^*$ nehmen wir das System aller Teilmengen A von H die den Punkt (x, x) als Häufungspunkt haben und für die $\limsup_{h\to 0+} \dfrac{|(L_x \cup P_x - A)_h|}{|(L_x \cup P_x)_h|} = 0$ gilt[(2)].

Eine Funktion g: $H \to (-\infty, \infty)$ ist aus der Klasse $\overline{K}_1(x)$, *wenn für alle Zahlen a und b, $a > b$, zwei positive Zahlen η und C so existieren, daß für jedes $(y, x) \in H$, bzw. $(x, y) \in H$, für das $g(y, x) > a$, bzw. $g(x, y) > a$ gilt, ein $(u, x) \in H$, bzw. $(x, u) \in H$ so existiert, daß $|x - u| \leqq C|x - y|$ und $|\{v : u \leqq b < x, g(v, x) > b\}| > \eta(x - u)$, bzw. $|\{v : x < v \leqq u, g(x, v) > b\}| > \eta(u - x)$ gilt.* Symmetrisch definieren wir die Klasse $\underline{K}_1(x)$, d. h. $\underline{K}_1(x) = \{g : -g \in \overline{K}_1(x)\}$. Die Klasse $K_1(x)$ definieren wir als die Klasse aller Funktionen g: $H \to$
$\to (-\infty, \infty)$, die zugleich aus $\overline{K}_1(x)$ und $\underline{K}_1(x)$ sind.

Satz 2. *Jede Funktion aus der Klasse $K_1(x)$ erfüllt für die Systeme $\mathscr{F}_1^*$ und $\mathscr{F}_2^*$ die Bedingung* (1) *aus dem Satz 1.*

Beweis. Es sei $\limsup_{\mathscr{F}^*_2} g \geqq a' \Rightarrow \limsup_{\mathscr{F}^*_1} g \geqq a'$ mindestens für ein a' nicht erfüllt. Dann existieren solche zwei Zahlen a und b, für welche $a > b$ und $\limsup_{\mathscr{F}^*_2} g > a > b > \limsup_{\mathscr{F}^*_1} g$ ist. Es muß ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften existieren:

1) Für jedes h, $0 < h \leqq \delta$, existiert ein $(y, x) \in (L_x \cup P_x)_h$, bzw. $(x, y) \in$
$\in (L_x \cup P_x)_h$, für das $g(y, x) > a$, bzw. $g(x, y) > a$ ist, und

(2) $|A|$ bedeutet das lineare äußere Lebesguemaß von A.

2) Für jedes h, $0 < h \leqq \delta$ existiert ein $A \in \mathscr{F}_1^*$ so, daß $g(y, x) < b$ und $g(x, z) < < b$ für jedes $(y, x) \in A_h$ und $(x, z) \in A_h$ gilt.

Wir wählen jetzt ein h. $0 < h \leqq \delta$. Mit A werden wir die zu h nach 2) gehörige Teilmenge aus $\mathscr{F}_1^*$ bezeichnen. Es sei l, $0 < l < h$, so gewählt, daß $\dfrac{|(L_x - A)_r|}{|(L_x)_r|} < \eta$ und $\dfrac{|(P_x - A)_r|}{|(P_x)_r|} < \eta$ für $0 < r \leqq l$ gilt. Aus der Fußnote [1] geht hervor, daß ein solches l existiert. Für $\varrho = \min\left(\dfrac{l}{C}, \delta\right)$ existiert ein $(y, x) \in (L_x \cup P_x)_\varrho$, bzw. $(x, y) \in (L_x \cup P_x)_\varrho$ so, daß $g(y, x) > a$, bzw. $g(x, y) > a$ ist. Dann existiert ein $(u, x) \in H$, bzw. $(x, u) \in H$ so, daß $|x - u| \leqq \leqq C|x - y| \leqq l\sqrt{2}$ und $|\{v : u \leqq v < x, \; g(v, x) > b\}| > \eta \; (x - u)$, bzw. $|\{v: x < v \leqq u, g(x, v) > b\}| > \eta \; (u - x)$ gilt. Dann gilt $A_r \cap \{(v, x): g(v, x) > > b\} \neq \emptyset$, bzw. $A_r \cap \{(x, v): g(x, v) > b\} \neq \emptyset$ für $r = \dfrac{|x - u|}{\sqrt{2}} \leqq l$. Das ist aber wegen 2) unmöglich.

Ähnlich behandelt man die zweite Implikation.

Auf Grund der Betrachtungen auf den Seiten 245 und 246 in [9] kann man sehen, daß für jede monotone Funktion f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ die Funktion $g(u, v) = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ aus der Klasse $K_1(x)$ ist. Zum Beispiel: Für den Fall einer nichtfallender Funktion f und $g(y, x) > a > b > 0$ soll $C = \dfrac{a}{b}$,

$(u, x) = \left((x + \dfrac{a}{b}(y - x), x\right)$ und $0 < \eta < \dfrac{a - b}{b}$ sein.

2. Es ist bekannt, daß das System aller rellen Mengen, die in $(-\infty, \infty)$ von der ersten Kategorie von Baire sind, ein kein Intervall enthaltendes σ-Ideal ist. Es sei $\mathscr{A}$ ein σ-Ideal von Teilmengen von $(-\infty, \infty)$, d.h. $\mathscr{A}$ ist ein nichtleeres System von Teilmengen von $(-\infty, \infty)$, für das folgendes gilt: 1.° $A \in \mathscr{A}$, $B \subset A \Rightarrow B \in \mathscr{A}$ und 2.° wenn $A_n \in \mathscr{A}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, dann $\cup \{A_n : n = 1, 2, 3, \ldots\} \in \mathscr{A}$, das kein Intervall enthält. Wir werden jetzt das Limes, die Stetigkeit und die Ableitung einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen bezüglich $\mathscr{A}$ definieren. Wenn $\mathscr{A}$ das System aller reellen Mengen von der ersten Kategorie von Baire bedeutet, dann gehen diese Begriffe in qualitatives Limes, qualitative Stetigkeit und qualitative Ableitung über ([4], [5], [6] und [7]).

Es sei f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ und $x \in (-\infty, \infty)$. Dann definieren wir $\mathscr{A}-\limsup\limits_{u \to x+} f(u)$ *als das Infimum der Menge aller Zahlen y, für welche ein $\delta > 0$ so existiert, daß* $\{u: f(u) > y\} \cap (x, x + \delta) \in \mathscr{A}$ *ist.* Ähnlich definieren wir

$\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x-}\sup f(u)$, $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x+}\inf f(u)$ und $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x-}\inf f(u)$. Die Begriffe $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x}\sup f(u)$, $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x}\inf f(u)$, $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x+} f(u)$, $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x-} f(u)$ und $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x} f(u)$ und die $\mathscr{A}$-Stetigkeit definiert man in üblicher Weise. Wenn das Limes $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f(u)-f(x)}{u-x}$ existiert, dann werden wir sagen, daß f im x die $\mathscr{A}$-Ableitung $f'_{\mathscr{A}}(x)$ besitzt und $f'_{\mathscr{A}}(x)=\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f(u)-f(x)}{u-x}$ ist.

Es sei $\mathscr{F}_1^{**}$ das System aller Teilmengen A von $H=\{(u,v)\colon v>u\}$, für welches ein $h>0$ so existiert, daß die Menge $((x-h,x)-\{v\colon (v,x)\in A\})\cup \cup((x,x+h)-\{v\colon (x,v)\in A\})$ aus $\mathscr{A}$ ist.

Wir werden sagen, daß eine Funktion $g\colon H\to(-\infty,\infty)$ aus der Klasse $\overline{K}_{\mathscr{A}}(x)$ *ist, wenn es für alle Zahlen a und b, $a>b$, eine positive Zahl C so gibt, daß für jedes $(y,x)\in H$, bzw. $(x,y)\in H$, für das $g(y,x)>a$, bzw. $g(x,y)>a$ ist, ein $(u,x)\in H$, bzw. $(x,u)\in H$ so existiert, daß $|x-u|\leqq C|x-y|$ und die Menge $\{v\colon u<v<x,\ g(v,x)>b\}$, bzw. die Menge $\{v\colon x<v<u,\ g(x,v)>b\}$ nicht aus $\mathscr{A}$ ist.* Symmetrisch definiert man die Klasse $\underline{K}_{\mathscr{A}}(x)$, d.h. $\underline{K}_{\mathscr{A}}(x)= =\{g\colon -g\in\overline{K}_{\mathscr{A}}(x)\}$. Eine Funktion $g\colon H\to(-\infty,\infty)$ ist aus der Klasse $K_{\mathscr{A}}(x)$, wenn zugleich aus $\overline{K}_{\mathscr{A}}(x)$ und $\underline{K}_{\mathscr{A}}(x)$ ist.

Satz 3. *Jede Funktion aus der Klasse $K_{\mathscr{A}}(x)$ erfüllt die Bedingung* (1) *aus dem Satz 1. für die Systeme $\mathscr{F}_1^{**}$ und $\mathscr{F}_2^{*}$.*

Beweis. Wenn $\limsup_{\mathscr{F}^*_2} g\geqq a'\Rightarrow\limsup_{\mathscr{F}^{**}_1} g\geqq a'$ nicht für jedes a' gilt, dann existieren zwei Zahlen a und b so, daß $\limsup_{\mathscr{F}^*_2} g>a>b> >\limsup_{\mathscr{F}^{**}_1} g$ gilt. Dann existiert ein $\delta>0$ mit den Eigenschaften:

1) Für jedes h, $0<h\leqq\delta$, existiert ein $(y,x)\in(L_x\cup P_x)_h$, bzw. $(x,y)\in \in(L_x\cup P_x)_h$ so, daß $g(y,x)>a$, bzw. $g(x,y)>a$ ist;

2) Zu jedem h, $0<h\leqq\delta$, existiert ein $B\in\mathscr{F}_1^{**}$ so, daß $g(y,x)<b$ und $g(x,z)<b$ für jedes (y,x) und (x,z) aus B_h gilt.

Es sei B die Menge aus $\mathscr{F}_1^{**}$, die nach 2) zu $h=\delta$ gehört. Es sei $0<\eta<\delta$ so gewählt, daß die Menge $((x-\eta,x)-\{v\colon (v,x)\in B\})\cup((x,x+\eta)- -\{v\colon (x,v)\in B\})$ aus $\mathscr{A}$ ist. Es sei $\varrho=\dfrac{\eta}{C\sqrt{2}}$. Dann existiert ein $(y,x)\in \in(L_x\cup P_x)_\varrho$, bzw. $(x,y)\in(L_x\cup P_x)_\varrho$ so, daß $g(y,x)>a$, bzw. $g(x,y)>a$ ist. Es muß also ein $(u,x)\in H$, bzw. $(x,u)\in H$ so existieren, daß $|x-u|\leqq \leqq C|x-y|\leqq C\varrho\sqrt{2}=\eta$ und die Menge $\{v\colon u<v<x,\ g(v,x)>b\}$, bzw. die Menge $\{v\colon x<v<u,\ g(x,v)>b\}$ nicht aus $\mathscr{A}$ ist. Dann ist $x-\eta\leqq u$, bzw. $u\leqq x+\eta$ und $\{v\colon u<v<x,\ g(v,x)>b\}\subset((x-\eta,x)-\{v\colon (v,x)\in \in B\})$, bzw. $\{v\colon x<v<u,\ g(x,v)>b\}\subset((x,x+\eta)-\{v\colon (x,v)\in B\})$ kann nicht gelten. Also muß mindestens ein $(v, x) \in B_h$, bzw. $(x, v) \in B_h$ so existieren, daß $g(v, x) > b$, bzw. $g(x, v) > b$ ist. Das ist aber unmöglich wegen 2).

So haben wir bewiesen, daß $\limsup_{\mathcal{F}^*_2} g \geqq a \Rightarrow \limsup_{\mathcal{F}^{**}_1} g \geqq a$ für jedes a und für jede Funktion g aus $\bar{K}_{\mathcal{A}}(x)$ gilt. Da die Funktion $-g$ aus $\bar{K}_{\mathcal{A}}(x)$ ist, muß $\limsup_{\mathcal{F}^*_2} -g \geqq -a \Rightarrow \limsup_{\mathcal{F}^{**}_1} -g \geqq -a$ für jedes a gelten. Also es muß $-\liminf_{\mathcal{F}^*_2} g \geqq -a \Rightarrow -\liminf_{\mathcal{F}^{**}_1} g \geqq -a$ oder $\liminf_{\mathcal{F}^*_2} g \leqq a \Rightarrow \liminf_{\mathcal{F}^{**}_1} g \leqq a$ für jedes a gelten.

Satz 4. *Wenn $f: (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ eine monotone Funktion ist, dann ist $g(u, v) = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ eine Funktion aus der Klasse $K_{\mathcal{A}}(x)$.*

Beweis. Es sei f eine nichtfallende Funktion. Es sei $a > b$ und $g(y, x) > a$. Dann ist $y < x$ und $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > a$.

Es sei zuerst $b > 0$. Dann gilt $g(v, x) = \dfrac{f(v) - f(x)}{v - x} = \dfrac{f(v) - f(x)}{y - x} \dfrac{y - x}{v - x} \geqq$ $\geqq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \dfrac{y - x}{v - x} > a \dfrac{b}{a} = b$ für jedes v, für welches $x + \dfrac{a}{b}(y - x) =$ $= u < v \leqq y$ ist. Es ist also $|x - u| = \dfrac{a}{b}|x - y|$ und $(u, y\rangle \subset \{v: u < v <$ $< x, g(v, x) > b\}$. Weil $(u, y\rangle \notin \mathcal{A}$ gilt, ist auch $\{v: u < v < x, g(v, x) > b\} \notin$ $\notin \mathcal{A}$.

Wenn $b = 0$ ist, ist $a > 0$ und wir können ein b_1 so wählen, daß $0 = b <$ $< b_1 < a$ ist. Weil ein $(u, x) \in H$ so existiert, daß $|x - u| = \dfrac{a}{b_1}|x - y|$ und $\{v: u < v < x, g(v, x) > b_1\} \notin \mathcal{A}$ ist, kann auch die Menge $\{v: u < v < x,$ $g(v, x) > b\}$ nicht zu $\mathcal{A}$ gehören.

Wenn $b < 0$ ist, dann gilt $\{v: u = y < v < x, g(v, x) > b\} = (y, x) \notin \mathcal{A}$.

Es sei jetzt $a > b$ und $g(x, y) > a$. Wenn $b > 0$ ist, dann gilt $g(x, v) =$ $= \dfrac{f(v) - f(x)}{v - x} = \dfrac{f(v) - f(x)}{y - x} \dfrac{y - x}{v - x} \geqq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \dfrac{y - x}{v - x} > a \dfrac{b}{a} = b$ für jedes v, für welches $y \leqq v < u = x + \dfrac{a}{b}(y - x)$ ist. Es ist also $|x - u| \leqq$ $\leqq C|x - y|$ und $\langle y, u) \subset \{v: x < v < u,\ g(x, v) > b\}$. Darum muß $\{v: x <$ $< v < u,\ g(x, v) > b\}$ nicht aus $\mathcal{A}$ sein. Die Fälle $b = 0$ und $b < 0$ behandelt man ähnlich wie im vorherigem Fall.

Es sei $b < a$ und $g(y, x) < b$. Dann muß $b > 0$ sein. Dann gilt $g(v, x) =$

$= \frac{f(v) - f(x)}{v - x} = \frac{f(v) - f(x)}{y - x} \frac{y - x}{v - x} \leqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \frac{y - x}{v - x} < b \frac{a}{b} = a$ für jedes v, für welches $y \leqq v < u = x + \frac{b}{a}(y - x)$ gilt. Es ist also $\langle y, u) \subset \{v: y \leqq v < x, g(v, x) < a\}$ und darum $\{v: y < v < x,\ g(v, x) < a\} \notin \mathscr{A}$.

Ähnlich behandelt man den Fall, wenn $b < a$ und $g(x, y) < b$ gilt. Wir haben bewiesen, daß die Funktion $g(u, v) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ aus der Klasse $K_{\mathscr{A}}(x)$ für jede nichtfallende Funktion f ist. Es sei f eine nichtsteigende Funktion. Dann ist $-f$ eine nichtfallende Funktion und darum ist $-g$ aus $K_{\mathscr{A}}(x)$. Aus der Definition der Klasse $K_{\mathscr{A}}(x)$ ist evident, daß auch die Funktion g aus $K_{\mathscr{A}}(x)$ ist.

Folgerung 1. *Wenn f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ eine monotone Funktion ist, die die $\mathscr{A}$-Ableitung (speziell die qualitative Ableitung) im Punkte x besitzt, dann existiert in x die Ableitung von f und es gilt $f'(x) = f'_{\mathscr{A}}(x)$ (speziell $f'(x) = f'_{\text{qual.}}(x)$).*

Jetzt definieren wir die Klasse K als die Klasse aller solcher Funktionen f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$, *die die folgende Bedingung erfüllen: Wenn $f(y) > a$, bzw. $f(y) < a$, ist, dann ist die Menge $\{u: y - \varepsilon < u < y + \varepsilon,\ f(u) > a\}$, bzw. die Menge $\{u: y - \varepsilon < u < y + \varepsilon, f(u) < a\}$ nicht aus $\mathscr{A}$ für jedes $\varepsilon > 0$.* Es ist evident, daß $-f \in K$ für $f \in K$ ist.

Satz 5. *Die Funktionen $g(u, v) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ und $h(u, v) = f(u) - f(v)$ sind aus der Klasse $K_{\mathscr{A}}(x)$ für jede Funktion f: $(-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ aus der Klasse K.*

Beweis. Es sei $a > b$ und $g(y, x) > a$. Dann ist $y < x$ und $f(y) < f(x) + a(y - x) < f(x) + b(y - x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß $|x - y + \varepsilon| \leqq 2\,|x - y|$, $y + \varepsilon < x$ und $f(x) + a(y - x) < f(x) + b(v - x)$ für jedes v, für welches $y - \varepsilon < v < y + \varepsilon$ ist, gilt. Weil die Menge $\{v: y - \varepsilon < v < y + \varepsilon, f(v) < f(x) + a(y - x)\}$ nicht aus $\mathscr{A}$ ist (es ist nämlich $f(y) < f(x) + a(y - x)$) und $\{v: y - \varepsilon < v < y + \varepsilon, f(v) < f(x) + a(y - x)\} \subset \{v: y - \varepsilon = u < v < x, \frac{f(v) - f(x)}{v - x} > b\}$ ist, gilt auch $\{v: y - \varepsilon = u < v < x, \frac{f(v) - f(x)}{v - x} > b\} \notin \mathscr{A}$.

Es sei $a > b$ und $g(x, y) > a$. Dann ist $x < y$ und $f(y) > f(x) + a(y - x) > f(x) + b(y - x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß $|y + \varepsilon - x| \leqq 2\,|x - y|$, $x < y - \varepsilon$ und $f(x) + a(y - x) > f(x) + b(v - x)$ für jedes v, für welches $y - \varepsilon < v < y + \varepsilon$ ist, gilt. Weil die Menge $\{v: y - \varepsilon < v < y + \varepsilon, f(v) > f(x) + a(y - x)\}$ nicht aus $\mathscr{A}$ ist und $\{v: y - \varepsilon < v < y + \varepsilon, f(v) > f(x) +$

$+ a(y - x)\} \subset \{v: x < v < u = y + \varepsilon, \dfrac{f(v) - f(x)}{v - x} > b\}$ ist, gilt auch $\{v: x < v < u = y + \varepsilon, \dfrac{f(v) - f(x)}{v - x} > b\} \notin \mathscr{A}$.

So haben wir bewiesen, daß $g \in \overline{K}_{\mathscr{A}}(x)$ ist, wenn $f \in K$ ist. Aus $-f \in K$ kann man leicht ableiten, daß auch $-g \in \overline{K}_{\mathscr{A}}(x)$ ist. Daraus folgt, daß $g \in K_{\mathscr{A}}(x)$ ist.

Es sei $a > b$ und $h(y, x) > a$. Dann ist $y < x$ und $f(y) > f(x) + a > f(x) + b$. Dann ist die Menge $\{u: y - \varepsilon < u < y + \varepsilon, f(u) > f(x) + b\}$ nicht aus $\mathscr{A}$ für beliebige $\varepsilon > 0$. Es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $|x - y + \varepsilon| \leqq 2\,|x - y|$, $y + \varepsilon < x$ ist, dann ist $\{v: y - \varepsilon = u < v < x, h(v, x) > b\} \notin \mathscr{A}$, weil $\{v: y - \varepsilon < v < y + \varepsilon, f(v) > f(x) + b\} \subset \{v: y - \varepsilon = u < v < x, h(v, x) > b\}$ ist.

Es sei $a > b$ und $h(x, y) > a$. Dann ist $x < y$ und $f(x) - f(y) > a$, also auch $-f(y) > a - f(x) > b - f(x)$. Es ist $\{u: y - \varepsilon < u < y + \varepsilon, -f(u) > b - f(x)\} \notin \mathscr{A}$ für jedes $\varepsilon > 0$. Wählen wir $\varepsilon > 0$ so, daß $x < y - \varepsilon$, $|x - y - \varepsilon| \leqq 2\,|x - y|$ gilt. Dann ist $\{v: x < v < u = y + \varepsilon, h(x, v) > b\} \notin \mathscr{A}$, weil $\{v: y - \varepsilon < v < y + \varepsilon, -f(v) > b - f(x)\} \subset \{v: x < v < u = y + \varepsilon, h(x, v) > b\}$ ist.

So haben wir bewiesen, daß $h \in \overline{K}_{\mathscr{A}}(x)$ für jedes $f \in K$ ist. Aus $-f \in K$ folgt nun, daß $-h \in \overline{K}_{\mathscr{A}}(x)$ ist. Daraus bekommen wir, daß $h \in K_{\mathscr{A}}(x)$ ist.

Aus den Sätzen 1. und 5. bekommen wir die

Folgerung 2. *Wenn $f: (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ eine Funktion aus der Klasse K ist und wenn sie in x die $\mathscr{A}$-Ableitung besitzt, dann besitzt sie auch die Ableitung und es gilt $f'(x) = f'_{\mathscr{A}}(x)$.*

Speziell, wenn f aus der Klasse K für das σ-Ideal aller reellen Mengen der ersten Kategorie von Baire ist und wenn sie im x die qualitative Ableitung besitzt, besitzt sie auch die Ableitung in x und es gilt $f'(x) = f'_{\text{qual.}}(x)$.

Folgerung 3. *Wenn f aus der Klasse K ist und wenn sie in x das $\mathscr{A}$-Limes besitzt, d.h. $\mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x} f(u)$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{u\to x} f(u)$ und es gilt $\lim\limits_{u\to x} f(u) = \mathscr{A}-\lim\limits_{u\to x} f(u)$.*

Speziell, wenn f aus der Klasse K für das σ-Ideal aller reellen Mengen der ersten Kategorie von Baire ist und wenn sie das qualitative Limes in x besitzt, dann hat sie in x das Limes und $\lim\limits_{u\to x} f(u) = \lim\limits_{u\to x} \text{qual.}\, f(u)$.

Man kann leicht beweisen, daß a) *jede quasistetige Funktion im Sinne von Kempisty* ([1]) *aus der Klasse K ist*, und b) *jede $\mathscr{A}$-stetige Funktion aus der Klasse K.* Daraus und aus den Folgerungen 2. und 3. bekommen wir folgende Resultate von J. L. Leonard:

Folgerung 4. *Jede stetige Funktion, die im Punkte x die qualitative Ableitung (die $\mathscr{A}$-Ableitung) besitzt, besitzt auch die Ableitung und beide sind gleich* ([3], S. 767).

Folgerung 5. *Jede qualitativ stetige ($\mathscr{A}$-stetige) Funktion ist eine stetige Funktion* ([3], S. 767).

3. Es sei $\mathscr{A}$ auch hier ein σ-Ideal, das kein Intervall enthält.

Satz 6. *Es sei $f'_{\mathscr{A}}(x) \geqq 0$ für jedes $x \in \langle a, b\rangle$. Dann ist $f(a) \leqq f(b)$.*

Beweis. Es sei $f(a) > f(b)$. Dann setzen wir $\alpha = \frac{1}{2}\frac{f(a) - f(b)}{a - b} < 0$. Es sei $A = \{x: x \in \langle a, b\rangle,\ f(x) \leqq f(a) - \frac{1}{4}(f(a) - f(b)) + \alpha(x - a)\}$. Es ist evident, daß $a \notin A$ und $b \in A$ ist. Es sei $\xi = \inf A$. Dann ist entweder $\xi \in A$ oder $\xi \notin A$.

Es sei $\xi \in A$. Dann muß $a < \xi$ sein und es muß ein u so existieren, daß $a < u < \xi$ und $\frac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} > \alpha$ ist. Es ist nämlich $\{v: \xi - \varepsilon < v < \xi,\ \frac{f(v) - f(\xi)}{v - \xi} \leqq \alpha\} \in \mathscr{A}$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ und $(\xi - \varepsilon,\ \xi) \notin \mathscr{A}$. Daraus bekommen wir, daß $f(u) < f(\xi) + \alpha(u - \xi) \leqq f(a) - \frac{1}{4}(f(a) - f(b)) + \alpha(\xi - a) + \alpha(u - \xi) = f(a) - \frac{1}{4}(f(a) - f(b)) + \alpha(u - a)$ ist. Das bedeutet aber, daß $u \in A$ ist. Das ist aber unmöglich, weil $u < \xi = \inf A$ ist.

Es sei $\xi \notin A$. Da $f'_{\mathscr{A}}(\xi) \geqq 0$ ist, muß ein $\varepsilon > 0$ so existieren, daß $\{u: \xi < u < \xi + \varepsilon,\ \frac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} \leqq \alpha\} \in \mathscr{A}$ ist. Weil $\xi = \inf A$ und $\xi \notin A$ ist, ist $(\xi, \xi + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Es sei $v \in (\xi, \xi + \varepsilon) \cap A$. Da $f'_{\mathscr{A}}(v) \geqq 0$ ist, gilt $\{t: v - \delta < t < v,\ \frac{f(t) - f(v)}{t - v} \leqq \alpha\} \in \mathscr{A}$ für geeignetes δ, für welches $0 < \delta < v - \xi$ gilt. Weil $\{u: v - \delta < u < v,\ \frac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} \leqq \alpha\} \subset \{u: \xi < u < \xi + \varepsilon,\ \frac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} \leqq \alpha\}$ ist, ist $\{u: v - \delta < u < v,\ \frac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} \leqq \alpha\} \in \mathscr{A}$. Also ist auch $\{t: v - \delta < t < v,\ \frac{f(t) - f(v)}{t - v} \leqq \alpha\}\ \cup$

$\cup \{u: v - \delta < u < v, \dfrac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} \leqq \alpha\} \in \mathscr{A}$. Weil $(v - \delta, v)$ nicht aus $\mathscr{A}$ sein kann, kann $(v - \delta, v) \subset \{t: v - \delta < t < v, \dfrac{f(t) - f(v)}{t - v} \leqq \alpha\} \cup$ $\cup \{u: v - \delta < u < v, \dfrac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} \leqq \alpha\}$ nicht sein. Es existiert also ein solches $u \in (v - \delta, v)$, für das $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} > \alpha$ und $\dfrac{f(u) - f(\xi)}{u - \xi} > \alpha$ gilt. Daraus bekommen wir, daß $f(\xi) + \alpha(u - \xi) < f(v) + \alpha(u - v) \leqq f(a) - \dfrac{1}{4}(f(a) - f(b)) + \alpha(v - a) + \alpha(u - v) = f(a) - \dfrac{1}{4}(f(a) - f(b)) + \alpha(u - a) =$ $= f(a) - \dfrac{1}{4}(f(a) - f(b)) + \alpha(u - \xi) + \alpha(\xi - a) < f(\xi) + \alpha(u - \xi)$ gilt. Das ist aber unmöglich.

Es muß also $f(a) \leqq f(b)$ sein.

Satz 7. *Es sei f eine solche Funktion, für welche $f'_{\mathscr{A}}(x)$ für jedes $x \in \langle a, b\rangle$ existiert und nicht negativ ist. Dann hat die Funktion f in jedem Punkt $x \in \langle a, b\rangle$ die Ableitung und es gilt $f'(x) = f'_{\mathscr{A}}(x)$ für jedes $x \in \langle a, b\rangle$.*

Speziell, wenn für f die qualitative Ableitung in jedem Punkt aus $\langle a, b\rangle$ existiert und nicht negativ ist, dann hat f in jedem $x \in \langle a, b\rangle$ die Ableitung und es ist $f'(x) = f'_{\text{qual.}}(x)$ für jedes $x \in \langle a, b\rangle$.

Beweis. Aus dem Satz 6. geht hervor, daß f auf $\langle a, b\rangle$ eine nichtfallende Funktion ist. Aus der Folgerung 1. bekommen wir die Behauptung.

Aus dem Satz 7. folgt

Satz 8. *Wenn die Funktion f in jedem Punkt aus $\langle a, b\rangle$ die $\mathscr{A}$-Ableitung (die qualitative Ableitung) besitzt und wenn eine solche auf $\langle a, b\rangle$ differenzierbare Funktion g existiert, für welche $f'_{\mathscr{A}}(x) \geqq g'(x)$ $(f'_{\text{qual.}}(x) \geqq g'(x))$ für jedes $x \in \langle a, b\rangle$ gilt und wenn $f'_{\mathscr{A}}$ und g' ($f'_{\text{qual.}}$ und g') in keinem Punkt aus $\langle a, b\rangle$ denselben unendlichen Wert annehmen, dann hat f in jedem Punkt aus $\langle a, b\rangle$ die Ableitung und es gilt $f'(x) = f'_{\mathscr{A}}(x)$ $(f'(x) = f'_{\text{qual.}}(x))$ für jedes $x \in \langle a, b\rangle$.*

Satz 8. bedeutet übrigens, daß ein analoger Satz wie der Satz von A. Khintchine auch für die $\mathscr{A}$-Ableitung (die qualitative Ableitung) gilt.

LITERATUR

[1] KEMPISTY S.: Sur les fonctions quasicontinues, Fundam. Math., *19* 1932, 184—198.
[2] KHINTCHINE A.: Recherches sur la structure des fonctions mesurables, Fundam. Math., *9*, 1927, 212—279.

[3] LEONARD J. L.: Some conditions implying the monotonicity of a real function, Rev. roum. math. pures et appl. *17*, 1972, 757–780.
[4] MARCUS S.: Limita aproximativă calitativă, Comun. Acad. R.P.R., *3*, 1953, 9.
[5] MARCUS S.: Continuitatea aproximativă calitativă, Comun. Acad. R.P.R., *3* 1953, 117.
[6] MARCUS S.: Derivata aproximativă calitativă, Comun. Acad. R.P.R., *3*, 1953, 361.
[7] MARCUS S.: Contributii la o analiză a functilor reale bazată pe notiunea de categorie in sensul kui Baire, Stud. şi cerc. mat., *7*, 1956, 251–272.
[8] MIŠÍK L.: Notes on approximate derivative, Mat. Čas., *22*, 1972, 108–114.
[9] MIŠÍK L.: Über einen Satz von Khintchine, Mat. Čas., *22*, 1972, 243–252.
[10] SNYDER L. E.: Approximate Stolz angle limits, Proc. Amer. Math. Soc., *17*, 1966, 416–422.

Eingegangen am 20. 12. 1972

Matematický ústav SAV
Obrancov mieru 41
886 25 Bratislava