Matematický časopis

M. M. Lesokhin

Об отделимости подполугрупп характерами

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 2, 129--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126605

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Mat. čas. 24, 1974, No 2, 129—138

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДПОЛУГРУПП ХАРАКТЕРАМИ.

ЛЕСОХИН М. М.

Посвящено шестидесятилетию профессора Штефана ШВАРЦА

Определение. Пусть A — некоторая полугруппа, P — некоторый предикат, определенный на A; Φ — множество гомоморфизмов A. Говорят, что полугруппа A аппроксимируема гомоморфизмами из Φ относительно предиката P, если P истинен на A тогда и только тогда, когда P истинен на всех гомоморфных образах A при гомоморфизмах из Φ.

Гомоморфизм χ полугруппы A в прямое произведение подполугрупп мультипликативной полугруппы поля K называется характером полугруппы A в поле K. Характер χ называется конечным, если $\chi(A)$ — конечная полугруппа. Совокупность всех характеров полугруппы A будем обозначать через $\Phi(A)$. Архимедовы компоненты коммутативной полугруппы A будем обозначать через A_ξ.

Настоящая статья посвящена изучению аппроксимации полугрупп характерами относительно предикатов вхождения элемента в моногенную подполугруппу P_1, в подгруппу P_2, в конечно порожденную подполугруппу P_3, в двухсторонний идеал P_4. Статья состоит из двух параграфов: в первом приводятся некоторые леммы; во втором излагаются основные результаты.

§ 1.

1° Лемма. *Пусть полугруппа A аппроксимируема характерами относительно предиката P_1, тогда A аппроксимируема характерами относительно равенства.*

Доказательство. Пусть $a_1 \neq a_2$ $(a_1, a_2 \in A)$ и или $a_1 \bar{\in} [a_2]$,, или $a_2 \bar{\in} [a_1]$. Тогда по условию найдется характер χ такой, что $\chi(a_1) \neq \chi(a_2)$. Пусть $a_1 \in [a_2]$ и $a_2 \in [a_1]$, тогда $a_1 = a_2^k$, $a_2 = a_1^l$, т. е. $a_1 = a_1^{kl}$ и, значит, $[a_1]$ — конечная группа. Отсюда следует, что $a_1 a_2^{-1} \neq e_{[a_1]}$ и так как $a_1 a_2^{-1} \bar{\in}$ $\bar{\in} [e_{[a_1]}]$, то по условию существует характер χ такой, что $\chi(a_1 a_2^{-1}) \neq \chi(e_{[a_1]})$, т. е. $\chi(a_1) \neq \chi(a_2)$.

2° **Лемма.** *Пусть полугруппа A аппроксимируема относительно предиката P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) с помощью гомоморфизмов в коммутативные полугруппы с сокращением с внешне присоединенным нулем. Тогда A аппроксимируема характерами относительно предиката P_i ($i = 1, 2, 3, 4$).*

Доказательство. Проведем доказательство относительно предиката P_3. Остальные случаи доказываются аналогично. Так как каждая коммутативная полугруппа с сокращением вложима в абелеву группу, то можно считать, что A аппроксимируема относительно предиката P_3 с помощью гомоморфизмов в абелевы группы с внешне присоединенным нулем, и остается показать, что абелевы группы аппроксимируемы характерами относительно вхождения элемента в подполугруппу. Пусть $a \bar{\in} A_0 \subset A$, где A — абелева группа с единицей e, A_0 — подполугруппа A и пусть $a \neq e$. Вложим A в полную группу A'. Тогда из [5] стр. 298 следует, что A вложима в прямое произведение мультипликативных полугрупп алгебраически замкнутого поля, и получаем требуеиое.

3° **Лемма.** *Пусть A — произвольная полугруппа, аппроксимируемая относительно предиката P_4 с помощью гомоморфизмов из $\Phi(A)$. Тогда A аппроксимируема относительно делимости с помощью гомоморфизмов из $\Phi(A)$.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2 \in A$ и a_1 не делится слева на a_2, тогда $a_1 \bar{\in} a_2A$, а значит, по условию существует $\varphi \in \Phi(A)$, такой, что $\varphi(a_1) \bar{\in} \varphi(a_2A)$. Отсюда $\varphi(a_1)$ не делится на $\varphi(a_2)$ в $\varphi(A)$, ибо иначе $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)\varphi(x) = \varphi(a_2x) \in \varphi(a_2A)$.

4° **Лемма.** *Пусть A коммутативна и аппроксимируема относительно вхождения элемента в конечно порожденную подполугруппу с помощью гомоморфизмов в группы с внешне присоединенным нулем; A_β, A_α — архимедовы компоненты A ($\alpha\beta = \alpha$, $\alpha \neq \beta$), и для некоторого $x \in A_\alpha$ существует $y \in A_\beta$ и $z \in A_\alpha$ такие, что $xz = yz$. Тогда A_α — группа.*

Доказательство. Допустим, что при некотором $k: x \bar{\in} [x^k, y] = A'$. Тогда существует гомоморфизм φ полугруппы A в группу с внешне присоединенным нулем z' такой, что $\varphi(x) \bar{\in} \varphi([x^k, y]) = \varphi(A')$. Так как $\alpha\beta = \alpha$, то $\varphi(A_\beta) \neq z'$, ибо иначе $\varphi(A_\alpha) = z'$ и $\varphi(x) \in \varphi(A')$. Допустим, что $\varphi(A_\alpha) = z'$, тогда $\varphi(x) = z'$ и так как $\varphi(x^k) = z'$, то $\varphi(x) \in \varphi(A')$. Таким образом, $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ и $\varphi(z)$ содержаться в полугруппе с сокращением и, значит, из $\varphi(xz) = \varphi(yz)$ следует $\varphi(x) = \varphi(y)$, что невозможно. Итак, $x \in [x^k, y]$ для всякого k и $x = x^2y^r$. Пусть $e = xy^r$, тогда $xy^r . xy^r = x^2y^ry^r = xy^r = e$, т. е. e — идемпотент. Так как архимедова полугруппа с сокращением, содержащая идемпотент, является группой, то из леммы 1 и [3], получим, что A_α — группа.

5° Лемма. *Пусть A — коммутативная полугруппа, представимая в виде связки ϱ архимедовых полугрупп A_α ($\alpha \in A/\varrho$), аппроксимируема относительно вхождения элемента в конечно порожденую подполугруппу с помощью гомоморфизмов в группы с внешне присоединенным нулем, и пусть A_α содержит идемпотент e. Тогда выполняется одно из следующих условий:*

1) *Элемент α является нулем в A/ϱ.*

2) *Для всякого $\beta \in A/\varrho$ имеет место $\beta\alpha \neq \alpha$ ($\alpha \neq \beta$).*

Доказательство. Допустим, что α не является нулем A/ϱ, тогда существует γ такое, что $\delta = \alpha\gamma \neq \alpha$. Пусть существует $\beta \in A/\varrho$, для которого имеет место $\alpha\beta = \alpha$ ($\alpha \neq \beta$). Так как A_α содержит идемпотент, то по предыдущей лемме A_α — группа. Пусть $y \in A_\delta$. Рассмотрим подполугруппу $A' = [y, x_0] \subset A_\beta$, где x_0 — некоторый элемент из A_β. Имеем: $\gamma\beta \neq \alpha$, ибо если бы $\delta\beta = \alpha$, то получили бы, что $\gamma\beta\alpha = \alpha$ и, значит, $\gamma\alpha = \alpha$, что невозможно. Таким образом, $A_\alpha \cap A' = \emptyset$ и, значит, $\varphi(A_\alpha) = z$. По условию, существует такой гомоморфизм φ полугруппы A в группу с внешне присоединеным нулем z, что $\varphi(e) \bar{\in} \varphi(A')$. Пусть $\varphi(x_0) = z$, тогда $\varphi(A_\alpha) = z$ и, значит, $\varphi(A_\alpha) = z$, т. е. $\varphi(e) = z$ и $\varphi(e) \in \varphi(A')$ что невозможно. Пусть $\varphi(e) = z$, тогда $\varphi(A_\alpha) = z$, а значит, $\varphi(A_\delta) = z$, и $\varphi(e) \in \varphi(A')$. Так как по выбору x_0 имеет место $x_0 e \in A_\alpha$, то $\varphi(x_0)\varphi(e) = \varphi(x_0)$ и, следовательно, $\varphi(x_0 e) = \varphi(x_0)$, т. е. $\varphi(e) \in \varphi(A')$, что невозможно.

6° Лемма. *Пусть A — идемпотентная коммутативная полугруппа с нулем z и A' — подполугруппа A, не содрежащая нуля. Тогда существует такой простой идеал J, что $A' \cap J = \emptyset$, $z \in J$.*

Доказательство. Пусть $J = \bigcap\limits_{a \in A} J_a$ ($J_a = \{x/xa \neq a\}$) и пусть $a_1 \bar{\in} J$ и $a_2 \bar{\in} J$, тогда существуют такие $a', a'' \in A'$, что $a_1 \bar{\in} J_{a'}$, $a_2 \bar{\in} J_{a''}$ и, значит, $a_1 a' = a'$, $a_2 a'' = a''$. Отсюда $a_1 a_2 a' a'' = a' a''$ и, следовательно, $a_1 a_2 \bar{\in} J_{a'a''}$ Так как A' — подполугруппа, то $a'a'' \in A'$ и, значит ,$a_1 a_2 \bar{\in} J$. J — идеал. Очевидно, что $z \in J$. Допустим, что $x_0 \in J \cap A'$, тогда $x_0 \in J_{x_0}$ что противоречит определению J_{x_0}.

7° Лемма. *Пусть A — полугруппа, аппроксимируемая характерами относительно делимости. Тогда A удовлетворяет коммутаторному условию и раскладывается в коммутативную связку ϱ архимедовых полугрупп A_α ($\alpha \in A/\varrho$) таких, что если A_α содержит идемпотент, то A_α является группой.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2 \in A$ и a_1 не делится на a_2 справа, но делится на a_2 слева. По условию, существует характер χ такой, что $\chi(a_1)$ не делится на $\chi(a_2)$ справа. С другой стороны, $a_1 = a_2 x$, т. е. $\chi(a_1) = \chi(a_2 x) = \chi(a_2)$. $\chi(x) = \chi(x)\chi(a_2)$, что невозможно. Такми образом, A

удовлетворяет коммутаторному условию и, следовательно, раскладывается в связку ϱ архимедовых полугрупп A_α ([1] стр. 378).

Пусть A_α содержит идемпотент e_α. Поскольку A_α — архимедова полугруппа, то e_α делится на любой элемент A_α. Пусть $a \in A_\alpha$ и a не делится на e_α, тогда существует такой характер χ полугруппы A, что $\chi(a)$ не делится на $\chi(e)$. Так как A_α — архимедова, то $\chi(a)$ и $\chi(e_\alpha)$ лежит в одной полугруппе с сокращением и, значит, $\chi(e_\alpha)$ является единицей для $\chi(a)$, что невозможно. Таким образом, $a = xe_\alpha$ и, следовательно, $ae_\alpha = xe_\alpha e_\alpha = xe_\alpha = a = e_\alpha y = e_\alpha(e_\alpha y) = e_\alpha a$, т. е. A_α является группой.

§ 2.

1°. Теорема *Для произвольной полугруппы A следующие утверждения эквивалентны:*

1) A — *коммутативная отделимая полугруппа.*

2) A — *аппроксимируема характерами относительно равенства.*

3) A — *аппроксимируема характерами относительно предиката P_1.*

Доказательство. I. Из 1) следует 2) по теореме из [3].

II. Докажем, что из 2) следует 3). Пусть $xy \neq yx$ $(x, y \in A)$, тогда существует характер χ такой, что $\chi(xy) \neq \chi(yx)$, но так как $\chi(A)$ — мультипликативная полугруппа поля, $\chi(xy) = \chi(x) \cdot \chi(y) = \chi(y)\chi(x) = \chi(yx)$, что невозможно. Пусть $x^2 = xy = y^2$ и $x \neq y$, тогда существует характер χ такой, что $\chi(x) \neq \chi(y)$. С другой стороны, $\chi(x^2) = \chi(x)\chi(y) = \chi(y^2)$ и, значит, $(\chi(x))^2 = \chi(x)\chi(y) = \chi(y^2)$, откуда получаем $\chi(x) = \chi(y)$.

а) Пусть $a \,\bar{\in}\, [b]$, тогда если a и b лежат в разных архимедовых компонентах, то при естественном гомоморфизме φ полургруппы A на максимальную идемпотентную полугруппу получаем $\varphi(a) \,\bar{\in}\, \varphi([b]) = \varphi(b)$. Воспользовавшись леммой 4° из [4] для полугруппы $\varphi(A)$ получим, что существует характер χ, разделяющий элементы $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$. Для произведения ψ гоморфизмов φ и χ имеем:

$$\psi(a) \,\bar{\in}\, \psi([b]) = \chi(\varphi(b)).$$

б) Пусть $a \,\bar{\in}\, [b]$ и a и b лежит в одной архимедовой компоненте A_ξ полугруппы A. Тогда рассмотрим конгруэнтность σ_ξ полугруппы A такую, что $a_1 \sim a_2$ (σ_3) тогда и только тогда, когда или $a_1x = a_2x$ для всех $x \in A_\xi$, или $A_\xi \cap aA_\xi = a_2A_\xi \cap A_\xi = \emptyset$ ([2], стр. 286). Пусть φ_ξ — гомоморфизм, соответствующий конгруэнтности σ_ξ; тогда, как показано в [2], стр. 286, $\varphi(A)$ или полугруппа с сокращением, или полугруппа с сокращением в внешне присоединенным нулем. Допустим, что $\varphi_\xi(a) \in \varphi_\xi([b])$, тогда $\varphi_\xi(a) = \varphi_\xi(b^k)$. Так как $b^k \in A_\xi$, то $ay = b^k y$ при всех $y \in A_\xi$ и, учитывая, что A_ξ с сокращением, получаем: $a = b^k$, т. е. $a \in [b]$, что невозможно. Воспользовавшись леммой 2°, § 1, получаем требуемое.

III. Пусть имеет место 3), тогда по лемме 1, § 1 имеет место 2) и как было показано в II, A является коммутативной отделимой полугруппой.

2°. Следствие. *Для того, чтобы полугруппа A была аппроксимируема конечными характерами относительно предиката P_1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *A является коммутативной, отделимой полугруппой.*

2) *Не существует пар (a_1, a_2) $a_1 \neq a_2$; $a_1, a_2 \in A_\xi$ таких, что уравнение $a_1 x^n = a_2 y^n$ разрешимо в $A\xi$ при любом натуральном n.*

3) *Всякая максимальная подргуппа полугруппы A является периодической.*

Доказательство. Необходимость. Из предыдущей теоремы получаем, что A коммутативна и отделима. Допустим, что $(a_1, a_2), a_1 \neq a_2$ такая пара, что уравнение $a_1 x^n = a_2 y^n$ разрешимо при всяком натуральном n. По условию и лемме 1, § 1 существует конечный характер χ такой, что $\chi(a_1) \neq \neq \chi(a_2)$. Так как A_ξ — архимедова полугруппа, то $\chi(a_1)$ и $\chi(a_2)$ лежат в конечной абелевой подгруппе $\chi(A)$. С другой стороны, для всякого n разрешимо уравнение $\chi(a_1)x^n = \chi(a_2)y^n$, т. е. $\chi(a_1)\chi(a_2)^{-1}$ — неединичный полный элемент, что невозможно.

Пусть $a \in G$, где G — подгруппа A. Если $[a]$ бесконечна, то $a^{-1} \overline{\in} [a]$, но при всех гомоморфизмах φ полугруппы A на конечную полугруппу $\varphi(a^{-1}) \in \in [\varphi(a)]$, т. е. A не аппроксимируема конечными характерами относительно предиката P_1.

Достаточность. Пусть $a \overline{\in} [b]$ и a, b лежат в разных архимедовых компонентах, тогда, отобразив A на A/σ, где σ — макимальная конгруэнтность при гомоморфизмах на идемпотентные полугруппы, по лемме 4° [4] получаем требуемое. Пусть $a, b \in A_\xi$ и $a \neq b^{-1}$, тогда рассмотрим A' — регулярную коммутативную полугруппу, являющуюся полугруппой дробей для полугруппы A. Так как имеет место условие 2), то A' не имеет полных неидемпотентных элементов. Кроме того, $a \overline{\in} [b, b^{-1}]$, ибо $[b, b^{-1}]$ лежит в подгруппе A, а подгруппа по условию периодическая. Рассмотрим в группе дробей A'_ξ полугруппы A_ξ максимальную подгруппу A_0, содержащую b, но не содержащую a. Так как A'_ξ не имеет полных элементов, то A/A_0 — конечная циклическая группа порядка p^k ([5], стр. 85). Пусть φ — гомоморфизм A на A/A_0, тогда $\varphi(a) \neq e$, $\varphi(b) = e$, $\varphi([b, b^{-1}]) = e$ и $\varphi(a) \overline{\in} [\varphi(b)]$. Продолжив гомоморфизм φ до гомоморфизма A в группу $\varphi(A)$ с внешне присоединенным нулем (4 [4]) и учитывая, что циклическая подгруппа порядка p^k содержится в группе корней любой степени из 1, получаем требуемое. Если $a = b^{-1}$, то $[b]$ — конечная группа и $a \in [b]$, что невозможно,

3°. Следствие. *Для того, чтобы регулярная коммутативная полугруппа была финитно аппроксимируема относительно предиката P_1, необхо-*

димо и достаточно, чтобы A была периодической полугруппой, не содержащей полных неидемпотентных элементов.

4°. Будем говорить, что полугруппа A удовлетворяет условию (*), если A — коммутативная отделимая полугруппа, и в разложении A в связку ϱ архимедовых компонент A_α для каждого $\alpha \in A\,\varrho$ выполняется одно из следующих условий:

1) A_α — группа с единицей z_0; z_0 — нуль A/ϱ и для всяких $a' \in A_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$, $a_0 \in A_\alpha$ из $a \in [a_0, a', z_0]$ следует $a \in [a_0, a']$.

2) A_α — группа, и для всякого $\beta \in A/\varrho$; $\alpha \neq \beta$ имеет место $\beta\alpha \neq \alpha$.

3) A_α — не содержит идемпотента и из $xz' = yz'$ $(x, z' \in A_\alpha,\ y \in A_\beta,\ \alpha\beta = \alpha)$ слудеет $x = y$.

5°. Теорема. *Для произвольной полугруппы A следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Полугруппа A удовлетворяет условию* (*).

2) *Полугруппа A аппроскимируема характерами относительно вхождения элемента в подполугруппу.*

3) *Полугруппа A аппроксимируема характерами относительно вхождения элемента в конечно порожденную подполугруппу.*

Доказательство. 1. Пусть имеет место 1 и пусть A' — подполугруппа A, $a \in A$, $a \,\bar{\in}\, A'$. Допустим, что $a \in A_\alpha$; $A_\alpha \cap A' = C$; A_α — группа и α — нуль A/ϱ. Тогда $a \,\bar{\in}\, [A', z_0]$, ибо иначе $a = a'z_0$ $(a' \in A')$ и, рассмотрев подполугруппу $[a_0, a']$, где $a_0 \in A_\alpha \cap A'$ такой, что $a \,\bar{\in}\, [a_0,\ a']$, получили бы $a \in [a_0, a', z_0]$, что противоречит условию. Так как $[A', z_0] \cap \cap A_\alpha$ содержит z_0, то по лемме 5° [4] получаем, что существует характер χ, отделяющий a от $[A', z_0]$ и, значит, и подавно a от A'.

Если α не является нулем A/ϱ, то $A \setminus J_\alpha (J_\alpha = \{\cup A_\xi : \alpha\xi \neq \alpha\})$ совпадает с A_α и, продолжив тождественный изоморфизм A_α на A_α до гомоморфизма χ такого, что

$$\chi(a) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \in J_\alpha; \\ a, \text{ если } a \,\bar{\in}\, J_\alpha, \end{cases}$$

получим, что $\chi(a) \,\bar{\in}\, \chi(A')$.

Пусть $A_\alpha \cap A' = \emptyset$ и A_α — группа с единицей e. Обозначим через ψ естественный гомоморфизм A на A/ϱ. Очевидно, что $\psi(a) \,\bar{\in}\, \psi(A')$. Если α — нуль полугруппы $\psi(A)$, то по лемме 6° § 1 существует иросмой идеал $J \subset \psi(A)$ такой, что $J \cap \psi(A') = \emptyset$ и $\psi(a) \in J$. При естественном гомоморфизме φ_J полугруппы $\psi(A)$ на мультипликативную полугруппу $\{0, 1\}$ получаем, что $\varphi_J(a) \,\bar{\in}\, \varphi_J(A')$. Рассмотрев произведение гомоморфизмов ψ и φ_J, получим требуемое.

Если α не является нулем A/ϱ, то рассмотрим гомоморфизм φ на $\{0,\ 1\}$:

$$\varphi(a) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \in J_\alpha \\ 1, \text{ если } a \bar{\in} J_\alpha \qquad (J_\alpha = \cup A_\xi(\xi\alpha \neq \alpha)). \end{cases}$$

Так как по условию не существует $\beta \neq \alpha$ таких, что $\beta\alpha = \alpha$, то $\varphi(A') = 0$, $\varphi(a) = 1$ и, рассмотрев произведение ψ и φ, получим требуемое.

Пусть A_α не содержит идемпотента. Рассмотрим конгруэнтность σ_α на полугруппе A такую, что $a_1 \sim a_2$ (σ_α) тогда и только тогда, когда или $a_1x = a_2x$ для всех $x \in A_\alpha$, или $A_\alpha \cap a_1A_\alpha = a_2A_\alpha \cap A_\alpha = \emptyset$ ([2], стр. 286). Пусть φ_α — гономорфизм, соотвествующий конгруэнтности σ_α, тогда, как показано в [2], стр. 286, $\varphi_\alpha(A)$ или полугруппа с сокращением, или полугруппа с сокращением и внешне присоединенным нулем z. Допустим, что $\varphi_\alpha(a) \in \varphi_\alpha(A')$, тогда $\varphi_\alpha(a) = \varphi_\alpha(a')$, где $a' \in A'$. Если $a' \in A_\alpha$ то $ay = a'y$ при всех $y \in A_\alpha$, и так как A_α — с сокращением, то $a = a'$, что невозможно. Если $a' \in A_\beta(\beta \neq \alpha)$, то $\varphi_\alpha(a') \neq z$, ибо иначе $\varphi_\alpha(a) = -\varphi_\alpha(A_\alpha) = z$, что противоречит определению σ_α. Значит, для всякого $x \in A_\alpha$ имеет место $a'x = ax$, $\alpha\beta = \alpha$, что невозможно. Таким образом, элемент a отделяется от подполугруппы A' с помощью гомоморфизмов в абелевы группы с внешне присоединенным нулем. Из леммы 2° § 1 получаем, что имеет место 2.

II. Очевидно, что из 2 следует 3.

III. Пусть имеет место 3. Из теоремы 1° получаем, что A — коммутативная отделимая полугруппа, и, следовательно, является связкой ϱ полугрупп с сокращением $A_\alpha(\alpha \in A/\varrho)$. Пусть A_α не содержит идемпотента; $xz' = yz'$; $x, z' \in A_\alpha, y \in A_\beta$, $\alpha\beta = \alpha$. Если $\alpha = \beta$ и так как A_α — с сокращениемб то $x = y$. Если $\alpha \neq \beta$, то из леммы 4° § 1 получаем, что A_α содержит идемпотент.

Пусть A_α содержит идемпотент. Так как A_α — архимедова и с сокращением, то A_α — группа. Если α не является нулем, то из леммы 5° § 1 получаем требуемое.

Пусть α — нуль A/ϱ и пусть $a \bar{\in} [a_0, a'](a_0 \in A_\alpha, a' \in A_\beta)$, но $a \in [a_0, a', z_0]$. Тогда по условию существует характер χ такой, что $\chi(a) \bar{\in} \chi([a_0\, a'])$. Отсюда получаем, что $\chi(a)$ и $\chi([a_0, a'])$ содержится в полугруппе с сокращением, ибо если бы $\chi(a) = 0$, то $\chi(a_0) = 0$ и $\chi(a) \in \chi([a_0, a'])$. Если бы $0 \in \chi([a_0, a'])$, то $\chi(A_\alpha) = 0$ и $\chi(a) \in \chi([a_0, a'])$, значит, из $a = a_0^k(a')^l z_0$ следует $\chi(a) = \chi(a_0^k) \cdot \chi(a')^l \chi(z_0) = \chi((a_0^k)(a')^l) \in \chi([a_0, a'])$, что невозможно. Таким образом, имеет место 1 и теорема доказана.

6°. Следствие. *Для того, чтобы полугруппа A была аппроксимируема конечными характерами относительно P_3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *A — удовлетворяет условию* (*).

2) *Не существует пар* (a_1, a_2); $a_1 \neq a_2$; a_1, $a_2 \in A_\xi$ *таких, что уравнение* $a_1x^n = a_2y^n$ *разрешимо в* A_ξ *при любом натуральном* n.

3) *Всякая подгруппа полугруппы* A *периодическая.*

Доказательство. Необходимость следует из 2° и теоремы 5°. Достаточность доказывается аналогично доказательству пункта 1 теоремы 5° с учетом того, что абелевы группы без полных элементов аппроксимируемы конечными характерами относителтно предиката P_3.

7°. Говорят, что полугруппа A удовлетворяет коммутаторному условию, если для любых $x, y \in A$ существуют такие $z, v \in A$, что $xy = zx = yv$. Как показано в [1], стр. 378 полугруппа, удовлетворяющая коммутаторному условию, раскладывается в связку ϱ архимедовых полугрупп A_ξ, и это разбиение является максимальным разбиением, соответствующим конгруэнтностям, фактор по которым явлется идемпотентной коммутативной полугруппой.

8°. Теорема. *Пусть полугруппа* A *удовлетворяет коммутаторному условию. Для того, чтобы полугруппа* A *была аппроксимируема характерами относительно* P_2, *необходимо и достаточно, чтобы все архимедовы компоненты* A, *содержащие идемпотенты, были абелевыми группами.*

Доказательство. Достаточность. Пусть G — подгруппа A, тогда $G \subset A_\xi$. Пусть $a \bar{\in} G$ и $a \bar{\in} A_\xi$, тогда, отобразив A на A/ϱ и воспользовавшись леммой 4° [4], получим требуемое. Если $a \bar{\in} G$, но $a \in A_\xi$, то из леммы 4° [4] и леммы 2° § 1 получаем требуемое.

Необходимость. Пусть G — произвольная подгруппа A, тогда G аппроксимируема характерами относительно равенитва (1° § 1) и, значит, коммутативна. Пусть архимедова компонента A_ξ содержит по крайней мере два идемпотента $e_1 \neq e_2$, тогда e_1 отделяется от e_2 с помощью гомоморфизма на группу, что невозможно. Пусть G — максимальная подгруппа A, тогда $G \subset A_\xi$. Допустим, что $a \in A_\xi$, но $a \bar{\in} G$. Обозначим через e единицу группы G. Докажем, что элемент $eae \in G$. Действительно: e — единица для eae и, кроме того, из архимедовости A_ξ следует, что e делится на всякий элемент A_ξ. По условию существует характер χ такой, что $\chi(a) \bar{\in} \chi(G)$. Так как a и G лежат в одной архимедовой компоненте A, то $\chi(a)$ и $\chi(G)$ лежат в одной подгруппе, но $\chi(a) = 1 \,.\, \chi(a) \,.\, 1 = \chi(e)\chi(a)\chi(e) = \chi(eae) \in$ $\in \chi(G)$, что невозможно. Таким образом: $G = A_\xi$.

9°. Следствие. *Пусть полугруппа* A *удовлетворяет коммутаторному условию. Тогда для того, чтобы* A *была аппроксимируема конечными характерами относительно предиката* P_2, *необходимо и достаточно, чтобы все архимедовы компоненты* A, *содержащие идемпотент, были абелевыми периодическими группами с ограниченными порядками элементов.*

Доказательство. Необходимость. Из предыдущей теоремы следует, что если A_ξ содержит идемпотент, то A_ξ — абелева группа. Периодичность следует из леммы 3° [4]; ограниченность порядков следует из [6].

Достаточность следует из 6° и леммы 4° [4].

10 . Характер χ полугруппы A называется регулярным, если $\chi(A)$ — регулярная полугруппа.

Теорема. *Пусть A — произвольная полугруппа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) A — *вполне регулярная инверсная полугруппа.*

2) A — *аппроксимируема идемпотентными комплексными характерами относительно вхождения элемента в идеал.*

3) A — *аппроксимируема относительно делимости регулярными характерами.*

Доказательство. I. Пусть имеет место 1). Тогда, т. к. инверсная вполне регулярная полугруппа имеет лишь изолированные идеалы, а каждый изолированный идеал в полугруппе удовлетворяющей коммутарному условию является пересечением простых, то для всякого элемента $a_0 \in A$ и идеала J такого, что $a_0 \overline{\in} J$, найдется простой идеал J_0, для которого $a_0 \overline{\in} J_0$, $J \subset J_0$. Рассмотрим характер χ:

$$\chi(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in J_0; \\ 1, & \text{если } a \overline{\in} J_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\chi(a) = 1 \overline{\in} \chi(J) = 0$ и, значит, имеет место 2).

II. Пусть имеет место 2), тогда из леммы 3° § 1 следует, что имеет место 3).

III. Пусть имеет место 3), тогда из леммы 7° § 1 следует, что A удовлетворяет коммутаторному условию и, значит, раскладывается в связку ϱ архимедовых полугрупп A_α. Пусть $a_1, a_2 \in A_\alpha$ и a_1 не делится на a_2 в A. Тогда по условию найдется гомоморфизм χ полугруппы A на группу G, может быть, с внешне присоединенным нулем z, такой, что $\chi(a_1)$ не делится на $\chi(a_2)$. Так как A_α не имеет собственных простых идеалов, то или $\chi(A_\alpha) = z$, или $\chi(A_\alpha) \subset G$. Если бы $\chi(A_\alpha) = z$, то $\chi(a_1) = z = \chi(a_2)z$, что невозможно. Значит $\chi(A_\alpha) \subset G$, что также невозможно. Таким образом любые два элемента $a_1, a_2 \in A_\alpha$ делятся друг на друга и справа и слева в полугруппе A. Так как a и a^2 лежат в одной архимедовой подполугруппе, то a делится на a^2 и, следовательно, A — регулярная полугруппа. Так как A удовлетворяет коммутаторному условию, то максимальная подполугруппа идемпотентов A коммутативна. Остается показать, что A вполне регулярна. Пусть i_a — правая регулярная единица элемента a, тогда $i_a = xa$. Так как A удовлетворяет коммутаторному условию, то существует $y \in A$ такой, что $i_a = ay$. Кроме того: $i_a a = i_a(a i_a) = i_a(i_a v) = i_a v = a i_a = a$; $i_a v = a i_a$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] PETRICH M., Topics in semigroups. The Pensylvania State University, 1967.
[2] БУРМИСТРОВИЧ. И. Е. Коммутативные связки полугрупп с сокращением. Сибирск. мат. ж., т. VI, № 2, 1965, стр. 284.
[3] HEWITT E., ZUKERMAN H.: The l_1-algebra of commutative semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. v. 83 N 1, 1956, p. 70—97.
[4] ЛЕСОХИН. М. М. Об отделимости подполугрупп комплексными характерами. Мат. сб., т. 74(116), № 2, 1967, стр. 314—320.
[5] FUCHS L.: Abelian groups. Budapest 1958.
[6] МАЛЬЦЕВ. А. И. О гомоморфизмах на конечные группы. Уч. зап. Ивановского пед. института, т. 18, 1958, стр. 49—60.

Поступило 6. 7. 1971

СССР
Мойка 48
Ленинград Д-186
Кафедра алгебры