Václav Medek

Об разложении пучков проективных преобразований на прямой

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 11 (1961), No. 2, 99--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126596

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV. 11, 2, 1961

ОБ РАЗЛОЖЕНИИ ПУЧКОВ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ПРЯМОЙ

ВАЦЛАВ МЕДЕК (Václav Medek), Братислава

В статье [1] описано отображение проективных преобразований вещественной проективной прямой P_1 на точки вещественного проективного пространства P_3. Проективное преобразование определенное уравнениями

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \varrho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad \varrho(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2) \neq 0 \tag{1}$$

отображается на точку с координатами $y_0 = a_{11}$, $y_1 = a_{12}$, $y_2 = a_{21}$, $y_3 = a_{22}$. Вырожденные проективные преобразования отображаются на невырожденную линейчатую квадрику Q, уравнение которой имеет вид

$$y_0y_3 - y_1y_2 = 0. \tag{2}$$

Тождественное преобразование отображается на точку $E(1, 0, 0, 1)$ и инволюции на точки полярной плоскости ε точки E относительно квадрики Q. Плоскость ε имеет уравнение

$$y_0 + y_3 = 0 \tag{3}$$

и пересекает квадрику Q в невырожденном коническом сечении e.

Пучком проективных преобразований на прямой P_1 мы назовем множество всех тех проективных преобразований, которые отображаются на точки одной прямой пространства P_3.

В этой статье рассматриваются возможности разложения пучка проективных преобразований на два пучка инволюций.

1. Прежде всего мы будем рассматривать свойства образа произведения двух инволюций.

Теорема 1. *Если **I** невырожденная инволюция, то множество образов всех произведений вида **IY** и **YI**, где **Y** принадлежит множеству всех инволюций, является полярной плоскостью ${}^I\varepsilon \in P_3$ точки I относительно квадрики Q. Притом соответствие между точками IY и Y является невырожденной* *коллинеацией (эта коллинеация посредничена точкой I) и соответствие между точками IY и YI является инволюционной коллинеацией плоскости ${}^I\varepsilon$ с центром E и осью ${}^Ip \equiv [\varepsilon\,{}^I\varepsilon]$.*

Доказательство. Пусть инволюция $\mathbf{I}$ отображается на точку $I(i_0, i_1, i_2 - i_0)$, и инволюции $\mathbf{Y}$ на точки $Y(y_0, y_1, y_2, -y_0)$; то произведение $\mathbf{YI}$ отображается на точку $YI(i_0y_0 + i_1y_2, i_0y_1 - i_1y_0, i_2y_0 - i_0y_2, i_2y_1 + i_0y_0)$ и произведение $\mathbf{IY}$ отображается на точку $IY(i_0y_0 + i_2y_1, i_1y_0 - i_0y_1, i_0y_2 - i_2y_0, i_1y_2 + i_0y_0)$. Координаты точек YI и IY удовлетворяют уравнению $i_0x_0 + i_2x_1 + i_1x_2 - i_0x_3 = 0$, и поэтому эти точки принадлежат плоскости, которая является полярной плоскостью точки I относительно квадрики Q. В плоскости ε точки ${}^1Y(1, 0, 0, -1)$, ${}^2Y(0, 1, 0, 0)$, ${}^3Y(0, 0, 1, 0)$ линейно независимы. Произведения ${}^1\mathbf{YI}$, ${}^2\mathbf{YI}$, ${}^3\mathbf{YI}$ отображаются на точки ${}^1YI(i_0, -i_1, i_2, i_0)$, ${}^2YI(0, i_0, 0, i_2)$, ${}^3YI(i_1, 0, -i_0, 0)$ плоскости ${}^I\varepsilon$. Матрица

$$\begin{pmatrix} i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ 0 & i_0 & 0 & i_2 \\ i_1 & 0 & -i_0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 3. Действительно, определитель из первых трех столбцов имеет величину $-i_0(i_0^2 + i_1i_2)$ и определитель из первого, второго и четвертого столбцов имеет величину $-i_1(i_0^2 + i_1i_2)$. Из невырожденности инволюции $\mathbf{I}$ следует, что $i_0^2 + i_1i_2 \neq 0$ и по крайней мере одно из чисел i_0, i_1 отлично от нуля. Точки ${}^1YI$, ${}^2YI$, ${}^3YI$ тоже линейно независимы в плоскости ${}^I\varepsilon$. Всякую точку $Y \in \varepsilon$ можно выразить посредством точек ${}^1Y$, ${}^2Y$, ${}^3Y$ и координат $(y_0, y_1, y_2, -y_0)$ точки Y в этом виде: $Y = y_0\,{}^1Y + y_1\,{}^2Y + y_2\,{}^3Y$. Легко убедиться в том, что $YI = y_0\,{}^1YI + y_1\,{}^2YI + y_2\,{}^3YI$. Из этого вытекает, что соответствие $Y \to YI$ есть невырожденной коллинеацией между плоскостями ε и ${}^I\varepsilon$ и если точки Y заполняют всю плоскость ε, то также точки YI заполняют всю плоскость ${}^I\varepsilon$.

Точно так же можно показать, что соответствие $Y \to IY$ является тоже невырожденной коллинеацией между плоскостями ε и ${}^I\varepsilon$ и если точки Y заполнят всю плоскость ε, то точки IY тоже заполнят всю плоскость ${}^I\varepsilon$. Соответствие $YI \to IY$ является невырожденной коллинеацией ${}^I\mathbf{K}$, так как точке $YI = y_0{}^1YI + y_1{}^2YI + y_2{}^3YI$ соответствует точка $IY = y_0\,I^1Y + y_1\,I^2Y + y_2I^3Y$. Коллинеация ${}^I\mathbf{K}$ является инволюционной. Действительно, пусть точке ${}^1Z = YI$ соответствует точка ${}^2Z = IY$; пусть ${}^2\mathbf{Z}' = {}^1\mathbf{Z} = \mathbf{ZI}$; то $\mathbf{Z} = {}^1\mathbf{ZI}$ и ${}^1\mathbf{Z}' = \mathbf{IZ} = \mathbf{I}^1\mathbf{ZI} = \mathbf{IYII} = \mathbf{IY} = {}^2\mathbf{Z}$. Коллинеация ${}^I\mathbf{K}$ имеет неподвижную точку E; кроме того будет точечно инвариантна и прямая ${}^Ip$. Это последнее утверждение доказывается следовательно: а) пусть $i_0 \neq 0$; то точки ${}^1P\,(i_2, -2i_0, 0, -i_2)$ и ${}^2P\,(i_1, 0, -2i_0, -i_1)$ прямой ${}^Ip$ линейно независимы. Произвольную точку $Y \in {}^Ip$ можно выразить посредством точек ${}^1P$, ${}^2P$ в следующем виде: $Y = \lambda_1\,{}^1P + \lambda_2\,{}^2P$. Потом $\mathbf{IY} = \mathbf{YI} = \mathbf{Y}'$ и точка Y' имеет координаты $[i_0(-i_2\lambda_1 + i_1\lambda_2), (i_1i_2 + 2i_0^2)\,\lambda_1 +$

$+ i_1^2\lambda_2,\ -i_2^2\lambda_1 - (i_1 i_2 + 2i_0^2)\lambda_2,\ i_0(i_2\lambda_1 - i_1\lambda_2)]$ и принадлежит прямой ${}^I p$. Точку Y' можно выразить также посредством точек ${}^1P, {}^2P : Y' = \lambda_1' \, {}^1P + \lambda_2' \, {}^2P$, где

$$\begin{aligned} \varrho\lambda_1' &= (i_1 i_2 + 2i_0^2)\lambda_1 + i_1^2\lambda_2, \\ \varrho\lambda_2' &= -i_2^2\lambda_1 - (i_1 i_2 + 2i_0^2)\lambda_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Соответствие $Y \to Y'$ является инволюцией и путем простого вычисления определяем, что эта инволюция того же рода как и инволюция $\boldsymbol{I}$. Одновременно точки Y, Y' являются сопряженными полюсами относительно квадрики Q. б) пусть $i_0 = 0$; то точки ${}^1P'(1, 0, 0, -1)$, ${}^2P'(0, i_1, -i_2, 0)$ линейно независимы и принадлежат прямой ${}^I p$. Если $Y = \lambda_1 \, {}^1P' + \lambda_2 \, {}^2P'$, то $\boldsymbol{YI} = \boldsymbol{IY} = \boldsymbol{Y}'$ и точка Y' имеет координаты $(i_1 i_2\lambda_2,\ i_1\lambda_1,\ -i_2\lambda_1,\ -i_1 i_2\lambda_2)$; точка Y' принадлежит также прямой ${}^I p$. Если выразить точку Y' посредством точек ${}^1P'$ и ${}^2P' : Y' = \lambda_1' \, {}^1P' + \lambda_2' \, {}^2P'$, то мы получим

$$\varrho\lambda_1' = i_1 i_2\lambda_2,\quad \varrho\lambda_2' = \lambda_1.$$

Соответствие $Y \to Y'$ является снова инволюцией сопряженных полюсов квадрики Q и того же рода что инволюция $\boldsymbol{I}$.

Наконец мы доказали, что если $Y \in {}^I p$, то $\boldsymbol{YI} = \boldsymbol{IY}$ и точки прямой ${}^I p$ в коллинеации ${}^I\boldsymbol{K}$ инвариантны. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{I}$ вырожденная инволюция ($I \in e$); то множеством образов произведений $\boldsymbol{IY}$ ($Y \in \varepsilon$) является прямая квадрики Q проходящая через точку I. Множеством образов всех произведений $\boldsymbol{YI}$ ($Y \in \varepsilon$) является вторая прямая квадрики Q проходящая через точку I.*

Доказательство. Пусть точка I имеет координаты $(i_0, i_1, i_2, -i_0)$, где $i_0^2 + i_1 i_2 = 0$; то точки YI и IY имеют координаты приведенные в доказательстве предыдущей теоремы. Следовательно точки YI и IY принадлежат касательной плоскости ${}^I\varepsilon$ квадрики Q в точке I. Так как инволюция $\boldsymbol{I}$ вырожденная, то произведения $\boldsymbol{YI}$ и $\boldsymbol{IY}$ являются вырожденными проективными преобразованиями и их образы принадлежат прямым, в которых плоскость ${}^I\varepsilon$ пересекает квадрику Q. Точки ${}^1Y(i_0, i_1, i_2, -i_0)$, ${}^2Y(1, 0, 0, -1)$, ${}^3Y(0, 1, 1, 0)$ плоскости ε линейно независимые, так как прямая $[{}^2Y \, {}^3Y]$ не пересекает квадрику Q и, следовательно, точка ${}^1Y \in Q$ не принадлежит прямой $[{}^2Y \, {}^3Y]$. Всякую точку $Y \in \varepsilon$ можно потом выразить в виде: $Y = \lambda_1 {}^1Y + \lambda_2 {}^2Y + \lambda_3 {}^3Y$. Точка YI имеет координаты $(i_0\lambda_2 + i_1\lambda_3,\ -i_1\lambda_2 + i_0\lambda_3,\ i_2\lambda_2 - i_0\lambda_3,\ i_0\lambda_2 + i_2\lambda_3)$ и точку YI можно потом выразить в виде $YI = \lambda_2(i_0, -i_1, i_2, i_0) + \lambda_3(i_1, i_0, -i_0, i_2) = \lambda_2 \, {}^2YI + \lambda_3 \, {}^3YI$. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ i_1 & i_0 & -i_0 & i_2 \end{pmatrix}$$

равен 2, так как величины определителей из первых двух и последних двух столбцов равны соответственно $i_0^2 + i_1^2$, $i_0^2 + i_2^2$ и оба эти числа не могут одновременно равнятся нулю. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & -i_0 \\ i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ i_1 & i_0 & -i_0 & i_2 \end{pmatrix}$$

также равен 2, так как величины определителей из первых и последних трех столбцов равны нулю и ранг матрицы из последних двух строк равен 2. Следовательно, точки I, ${}^2YI$, ${}^3YI$ принадлежат одной и той же прямой, и так как параметры λ_2, λ_3 произвольные, заполняют точки YI всю эту прямую.

Доказательство для произведений вида $\boldsymbol{IY}$ совсем аналогичное.

Следует еще доказать, что точки YI принадлежат одной, и точки IY второй прямой квадрики Q. Прежде всего предположим, что $i_0^2 + i_1^2 \neq 0$ и $i_0^2 + i_2^2 \neq 0$. Из этих предположений следует $i_0 \neq 0$, так как из условия вырожденности инволюции $\boldsymbol{I}$ следует для $i_0 = 0$ одновременно $i_1 = 0$, или $i_2 = 0$ и эти случаи мы исключаем. Если эти предположения выполнены, то точки I, ${}^2YI$ и I^2Y линейно независимы. Матрица из координат этих точек имеет вид

$$\begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & -i_0 \\ i_0 & -i_1 & i_2 & i_0 \\ i_0 & i_1 & -i_2 & i_0 \end{pmatrix}$$

Определитель из первых двух и последнего столбца имеет величину $-4i_0^2i_1$ и определитель из первого и последних двух столбцов имеет величину $4i_0^2i_2$. Оба эти числа не могут одновременно равняться нулю и поэтому точки ${}^2YI$ и I^2Y не принадлежат одной и той же прямой квадрики Q. Теперь пусть $i_0 = i_1 = 0$; то точка I имеет координаты (0, 0, 1, 0) и точки ${}^3YI$ и I^3Y имеют координаты (0, 0, 0, 1) и (1, 0, 0, 0). Эти три точки линейно независимы. Если $i_0 = i_2 = 0$, то точка I имеет координаты (0, 1, 0, 0) и точки ${}^3YI$ и I^3Y имеют координаты (1, 0, 0, 0) и (0, 0, 0, 1); эти три точки также линейно независимы.

Теорема 3. *Невырожденная инволюция* $\boldsymbol{I}$ *перестановочна со всеми инволюциями, которые отображаются на точки поляри* ${}^Ip$ *точки* I *относительно конического сечения* e, *и только на эти точки. Вырожденная инволюция* $\boldsymbol{I}$ *перестановочна со всеми невырожденными инволюциями, которые отображаются на касательную* ${}^1p$ *конического сечения* e *в точке* I, *и только на эти точки.*

Доказательство. Первая часть теоремы следует из доказательства теоремы 1. Две перестановочные невырожденные инволюции ${}^1\boldsymbol{I}$, ${}^2\boldsymbol{I}$ и их произведение отображаются на точки ${}^1I$, ${}^2I$, ${}^3I$, которые образуют автополярный треугольник конического сечения e.

Пусть теперь $\boldsymbol{I}$ вырожденная инволюция, которая отображается на точку I $(i_0, i_1, i_2, -i_0)$, где $i_0^2 + i_1i_2 = 0$. Если невырожденная инволюция $\boldsymbol{Y}$ должна быть перестановочной с **I**, то **YI** = **IY** = **I**. Если точка Y имеет координаты $(y_0, y_1, y_2, -y_0)$, то

$$i_0 y_0 + i_1 y_2 = \varrho i_0, \qquad i_2 y_0 - i_0 y_2 = \varrho i_2,$$
$$i_0 y_1 - i_1 y_0 = \varrho i_1, \qquad i_2 y_1 + i_0 y_0 = -\varrho i_0.$$

Из первого и последнего уравнения выходит

$$2 i_0 y_0 + i_2 y_1 + i_1 y_2 = 0.$$

Итак если инволюции **I** и **Y** перестановочны, то точка Y принадлежит касательной конического сечения e в точке I. Предположим обратно, что точка Y принадлежит касательной конического сечения e в точке I. Потом два случая возможны: а) $i_0 \neq 0$; то точка Y имеет координаты $[-(i_2 y_1 + i_1 y_2), 2 i_0 y_1, 2 i_0 y_2, i_2 y_1 + i_1 y_2]$ и произведение инволюций **I** и **Y** является инволюцией **I**. б) $i_0 = 0$; то точка Y имеет координаты $(y_0, i_1, -i_2, -y_0)$ и произведение инволюций **I** и **Y** снова является инволюцией **I** и теорема доказана.

Рассмотрим теперь произвольный пучок инволюций и умножим эти инволюции взаимно. О множестве образов всех таким образом полученых проективных преобразований вытекает

Теорема 4. *Если прямая i является образом пучка инволюций и точки M и N две произвольные точки прямой i, то образы всех произведений вида* **MN** *принадлежат прямой i', и прямые i, i', сопряженные поляры относительно квадрики Q.*

Доказательство. Пусть точка $A \in i$ имеет координаты $(a_0, a_1, a_2, -a_0)$ и точка $B \in i$ имеет координаты $(b_0, b_1, b_2, -b_0)$. Если точки $M(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2, -\lambda_1 a_0 - \lambda_2 b_0)$, $N(\mu_1 a_0 + \mu_2 b_0, \mu_1 a_1 + \mu_2 b_1, \mu_1 a_2 + \mu_2 b_2, -\mu_1 a_0 - \mu_1 b_0)$ две произвольные точки прямой $[AB]$, тогда образ произведения **NM** имеет координаты

$$\begin{aligned} x_0 &= C\lambda_1\mu_1 + D\lambda_1\mu_2 + E\lambda_2\mu_1 + F\lambda_2\mu_2, \\ x_1 &= G\lambda_1\mu_2 - G\lambda_2\mu_1, \\ x_2 &= H\lambda_1\mu_2 - H\lambda_2\mu_1, \\ x_3 &= C\lambda_1\mu_1 + E\lambda_1\mu_2 + D\lambda_2\mu_1 + F\lambda_2\mu_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где $C = a_0^2 + a_1 a_2$, $D = a_0 b_0 + a_1 b_2$, $E = a_0 b_0 + a_2 b_1$, $F = b_0^2 + b_1 b_2$, $G = a_0 b_1 - a_1 b_0$, $H = a_2 b_0 - a_0 b_2$. Путем элиминации параметров λ, μ из уравнений (5) мы приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} (a_2 b_0 - a_0 b_2)\, x_1 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)\, x_2 &= 0, \\ (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, x_1 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)(x_3 - x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) являются уравнениями двух плоскостей, которые совпадают только тогда, когда $a_0 : a_1 = b_0 : b_1$. Если плоскости определенные уравнениями (6) не совпадают мы убедимся простым вычислением, что их общая прямая i' является сопряженной полярой к прямой i относительно квадрики Q.

Пусть теперь $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$; если хотим чтобы точки A, B не совпадали, то $a_2 \neq b_2$. Произведение $\mathbf{NM}$ отображается в этом случае на точку с координатами

$$
\begin{aligned}
x_0 &= C\lambda_1\mu_1 + D\lambda_1\mu_2 + C\lambda_2\mu_1 + D\lambda_2\mu_2, \\
x_1 &= 0, \\
x_2 &= \qquad\quad E\lambda_1\mu_2 - E\lambda_2\mu_1, \\
x_3 &= C\lambda_1\mu_1 + C\lambda_1\mu_2 + D\lambda_2\mu_1 + D\lambda_2\mu_2,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $C = a_0^2 + a_1a_2$, $D = a_0^2 + a_1b_2$, $E = a_0(a_2 - b_2)$. Путем елиминации параметров λ, μ из уравнений (7) приходим к уравнениям

$$
x_1 = 0, \; a_1x_2 - a_0(x_3 - x_0) = 0, \tag{8}
$$

двух плоскостей, которые пересекаются опять в сопряженной поляре к прямой i относительно квадрики Q.

2. К разложению произвольного невырожденного проективного преобразования на две инволюции применяется

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{Y} \neq \mathbf{E}$ *произвольное невырожденное проективное преобразование; пусть* $y = [EY]$ *и пусть* y' *сопряженная поляра к прямой* y *относительно квадрики* Q; *то существует бесконечное множество пар инволюций* ${}^x\mathbf{I}$, ${}^x\mathbf{I}'$ $({}^xI \in y', {}^XI' \in y')$ *и таких, что* ${}^x\mathbf{I}{}^x\mathbf{I}' = \mathbf{Y}$; *соответствие* ${}^xI \to {}^xI'$ *является невырожденным проективным преобразованием с инвариантными точками в точках пересечения прямой* y' *с квадрикой* Q.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что произведение двух инволюций ${}^x\mathbf{I}$, ${}^x\mathbf{I}'$ является только тогда проективным преобразованием $\mathbf{Y}$, если точки ${}^xI, {}^xI'$ принадлежат поляре сопряженной к прямой $[EY]$ относительно квадрики Q.

а) Пусть $y_0 \neq y_3$; то точки $O_1\,[-y_1, 0, (y_0 - y_3), y_1]$, $O_2\,[-y_2, (y_0 - y_3), 0, y_2]$ принадлежат прямой y' и они линейно независимы. К произвольной точке ${}^xI = \lambda_1O_1 + \lambda_2O_2$ существует такая точка ${}^xI' = \lambda_1'O_1 + \lambda_2'O_2$, что ${}^x\mathbf{I}'{}^x\mathbf{I} = \mathbf{Y}$. Для параметров λ_1', λ_2' мы находим

$$
\begin{aligned}
\varrho\lambda_1' &= [y_1y_2 + y_0(y_0 - y_3)]\,\lambda_1 + y_2^2\lambda_2, \\
\varrho\lambda_2' &= -y_1^2\lambda_1 - [y_1y_2 - y_3(y_0 - y_3)]\,\lambda_2.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Уравнения (9) являются уравнениями невырожденного проективного преобразования прямой y', так как определитель из коэффициентов уравнений (9) имеет значение $(y_1y_2 - y_0y_3)(y_0 - y_3)^2 \neq 0$. Инвариантные точки этого проективного преобразования имеют значения параметров λ, которые удовлетворяют уравнению $y_1^2\lambda_1^2 + [2y_1y_2 + (y_0 - y_3)^2]\,\lambda_1\lambda_2 + y_2^2\lambda_2^2 = 0$. Тому же уравнению удовлетворяют также значения параметров λ для точек пересечения прямой y' и квадрики Q.

б) Пусть $y_0 = y_3$; то точки $O_1(0, -y_1, y_2, 0)$, $O_2(1, -y_1, y_2, -1)$ линейно независимы и принадлежат прямой y'. Точно также как в случае а) мы приходим к проективному преобразованию определенному уравнениями

$$\begin{aligned} \varrho\lambda_1' &= (y_0 + y_1y_2)\,\lambda_1 + (y_1y_2 - 1)\,\lambda_2, \\ \varrho\lambda_2' &= -y_1y_2\lambda_1 + (y_0 - y_1y_2)\,\lambda_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Определитель из коэффициентов уравнений (10) имеет величину $y_0^2 - y_1y_2 \neq 0$, итак это проективное преобразование невырожденное. Параметры λ его инвариантных точек удовлетворяют уравнению $y_1y_2\lambda_1^2 + 2y_1y_2\lambda_1\lambda_2 + (y_1y_2 - 1)\lambda_2^2 = 0$ и тому же уравнению удовлетворяют также параметры λ точек пересечения прямой y' с квадрикой Q.

Вспомогательная теорема. *Пусть k невырожденное коническое сечение плоскости α и пусть точка $P \in \alpha$ не принадлежит коническому сечению k; пусть p поляра точки P относительно конического сечения k; пусть $m \in \alpha$ произвольная прямая через точку P, и пусть она не является касательной конического сечения k; пусть ${}^m\mathbf{I}$ инволюция сопряженных полюсов индуцируемая коническим сечением k на прямой m; пусть a и b произвольные прямые плоскости α не проходящие точкой P и пусть они пересекают прямую m в точках ${}^aM$, ${}^bM$; пусть ${}^m\mathbf{P}$ проективное преобразование прямой m такое, что ему сопряженной инволюцией (см. напр.* [2], *стр.* 117*) является ${}^m\mathbf{I}$ и точке ${}^aM$ соответствует точка ${}^bM$; то точки соответствующие точкам ${}^bM$ в проективных преобразованиях ${}^m\mathbf{P}$ принадлежат коническому сечению ${}^bk$. Коническое сечение состоит из двух прямых (одна из этих прямых соединяет точку P с точкой пересечения R прямых a, b) тогда, и только тогда, когда прямая b проходит точкой пересечения прямой a и конического сечения k.*

Доказательство. а) Пусть точка P внешняя точка конического сечения k; в плоскости α существует такая система координат, что точка P имеет координаты $(0, 0, 1)$ и точки пересечения прямой p с коническим сечением имеют координаты $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$. Уравнение конического сечения k мы можем привести к виду $x_3^2 - x_1x_2 = 0$; прямые m имеют уравнения $\mu_1x_1 + \mu_2x_2 = 0$, где $\mu_1\mu_2 \neq 0$ и точки пересечения ${}^1M$, ${}^2M$ прямой m с коническим сечением k имеют координаты $(-\mu_2, \mu_1, \pm\sqrt{-\mu_1\mu_2})$. Всякую точку L прямой m мы можем выразить в виде: $L = \lambda_1{}^1M + \lambda_2{}^2M$ и параметры λ являются проективными координатами точки L на прямой m. Точка P в этой системе координат имеет координаты $(1, -1)$. Если прямые a, b имеют соответственно уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ и $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$, то точки ${}^aM$, ${}^bM$ имеют на прямой m координаты $(a_1\mu_2 - a_2\mu_1 + a_3\sqrt{-\mu_1\mu_2}, -a_1\mu_2 + a_2\mu_1 + a_3\sqrt{-\mu_1\mu_2})$, $(b_1\mu_2 - b_2\mu_1 + b_3\sqrt{-\mu_1\mu_2}, -b_1\mu_2 + b_2\mu_1 + b_3\sqrt{-\mu_1\mu_2})$. Для уравнений проективного преобразования ${}^m\mathbf{P}$ мы получаем

$$\begin{aligned} \varrho\lambda_1 &= (a_1\mu_2 - a_2\mu_1 + a_3\sqrt{-\mu_1\mu_2})\,\lambda_1', \\ \varrho\lambda_2 &= (a_1\mu_2 - a_2\mu_1 - a_3\sqrt{-\mu_1\mu_2}\,\lambda_2'. \end{aligned} \tag{11}$$

Координаты точек ${}^bM'$ соответствующих точкам ${}^bM$ в преобразованиях ${}^m\mathbf{P}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{(a_3b_2 - a_2b_3)\mu_1^2 +{}} (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mu_1\mu_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mu_2^2,\\
x_2 &= (a_3b_2 - a_2b_3)\,\mu_1^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)\,\mu_1\mu_2,\\
x_3 &= a_2b_2\mu_1^2 + (a_3b_3 - a_1b_2 - a_2b_1)\,\mu_1\mu_2 + a_1b_1\mu_2^2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Из уравнений (12) следует, что точки ${}^bM'$ принадлежат коническому сечению, которое вырожденное тогда, и только тогда, когда определитель из коэффициентов у μ_1^2, $\mu_1\mu_2$, μ_2^2 равен нулю, или если

$$a_3b_3[(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_3b_1 - a_1b_3)(a_2b_3 - a_3b_2)] = 0.$$

В силу условия $a_3b_3 \neq 0$ (ни одна из прямых a, b не переходит через точку P), следует

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_3b_1 - a_1b_3)(a_2b_3 - a_3b_2) = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) удовлетворено тогда, и только тогда, если точка пересечения R прямых a, b принадлежит коническому сечению k.

Для того, чтобы найти прямые, из которых состоит коническое сечение (12), если выполнено условие (13), выразим коническое сечение k в параметрическом представлении: $x_1 = t_1^2$, $x_2 = t_2^2$, $x_3 = t_1t_2$. Рассмотрим на коническом сечении k три точки $R(r_1^2, r_2^2, r_1r_2)$, $A(a_1^2, a_2^2, a_1a_2)$, $B(b_1^2, b_2^2, b_1b_2)$, и притом одна из точек A, B может совпадать с точкой R. Прямые $[AR]$ и $[BR]$ (касательная конического сечения k, если точка R совпадает с одной из точек A, B) имеют уравнения

$$
\begin{aligned}
r_2a_2x_1 + r_1a_1x_2 - (r_1a_2 + r_2a_1)\,x_3 &= 0,\\
r_2b_2x_1 + r_1b_1x_2 - (r_1b_2 + r_2b_1)\,x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Уравнения конического сечения (12) получают, следовательно, вид

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (a_2b_1 - a_1b_2)\,\mu_2(r_1^2\mu_1 + r_2^2\mu_2),\\
x_2 &= (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mu_1(r_1^2\mu_1 + r_2^2\mu_2),\\
x_3 &= (a_1b_1\mu_1 + a_2b_2\mu_2)(r_1^2\mu_1 + r_2^2\mu_2).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Коническое сечение (14) состоит из прямой $r_2^2x_1 - r_1^2x_2 = 0$ (и это пряма $[PR]$) и из прямой

$$x_1 = (a_2b_1 - a_1b_2)\,\mu_2, \quad x_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mu_1, \quad x_3 = a_1b_1\mu_1 + a_2b_2\mu_2.$$

Уравнения прямой b' мы можем выразить в виде

$$a_2b_2x_1 - a_1b_1x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,x_3 = 0.$$

б) Пусть точка P внутренняя точка конического сечения k; то существует система координат плоскости α такова, что точка P имеет координаты $(0, 0, 1)$ и точки $P, (0, 1, 0)$ и $(1, 0, 0)$ составляют автополярный треугольник конического сечения k. Уравнение конического сечения k имеет в этом случае вид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Прямая m имеет уравнение $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$ и ей точки пересечения с коническим сечением k являются точки ${}^1M(-\mu_2, \mu_1, \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2})$, ${}^2M(-\mu_2, \mu_1, -\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2})$. Если прямые a, b имеют уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$, то точки соответствующие в проективном преобразовании точкам прямой b имеют координаты

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mu_1\mu_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mu_2^2, \\ x_2 &= (a_3b_2 - a_2b_3)\,\mu_1^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)\,\mu_1\mu_2, \\ x_3 &= (a_2b_2 - a_3b_3)\,\mu_1^2 - (a_2b_1 + a_1b_2)\,\mu_1\mu_2 + (a_1b_1 - a_3b_3)\,\mu_2^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения (15) являются опять параметрическим представлением точек конического сечения, которое вырожденное тогда, и только тогда, когда определитель из коэффициентов уравнений (15) равен нулю:

$$a_3b_3[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)^2] = 0.$$

Так как $a_3b_3 \neq 0$, то

$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0. \tag{16}$$

Условие (16) однако эквивалентно требованию, чтобы точка пересечения прямых a, b принадлежала коническому сечению k.

Уравнение прямой b' мы можем получить точно также как и в предыдущем случае путем параметрического представления конического сечения k.

Теорема 6. *Всякий пучок проективных преобразований можно получить как множество произведений одной инволюции с инволюциями одного пучка.*

Доказательство. Прежде всего пусть пучок проективных преобразований не отображается на прямую соединяющую точку E с точкой конического сечения e; то возможны три случая: а) пучок отображается на прямую a через точку E. Проложим через прямую a произвольную плоскость ${}^A\varepsilon$, которая не касается квадрики Q и ей полюс обозначим A. Поляра a' сопряженная к прямой a относительно квадрики Q проходит через точку A. Из теорем 1 и 4 следует, что в коллинеации посредниченой точкой A между плоскостями ε и ${}^A\varepsilon$ соответствует прямой a' именно прямая a, а следовательно, произведение инволюции $\mathbf{A}$ с инволюциями пучка, который отображается на прямую a', является точно пучок проективных преобразований отображающихся на прямую a.

б) Пусть образом пучка является прямая a, которая не проходит через точку E и не принадлежит квадрике Q; то плоскость ${}^A\varepsilon$ проходящая через точку E и через прямую a не является касательной плоскостью квадрики Q и ей полюс A не принадлежит коническому сечению e. Точкой A снова посредничена невырожденная коллинеация между плоскостями ε и ${}^A\varepsilon$ и в этой коллинеации прямой a соответствует прямая $a' \in \varepsilon$. Произведения инволюции $\mathbf{A}$ с инволюциями пучка отображающегося на прямую a' составляют пучок проективных преобразований отображающихся на прямую a.

в) Пусть образом пучка является прямая a квадрики Q; то плоскость α проходящая через точку E и через прямую a является касательной плоскостью квадрики Q в точке $A \equiv [a\varepsilon]$. Пусть m произвольная прямая плоскости ε не проходящей точкой A. Произведения инволюции $\mathbf{A}$ с инволюциями отображающимися на точки прямой m принадлежат, согласно теореме 2, прямой a. Вместе с тем мы получим таким образом все точки прямой a. Пусть например точка M произвольная точка прямой a и пусть поляра сопряженная с прямой $[EM]$ относительно квадрики Q пересекает прямую m в точке M'. Следовательно, образ произведения инволюций $\mathbf{A}$ и $\mathbf{M}'$ (в определенном порядке) принадлежит прямой a и прямой $[EM]$ и он является точно точкой M.

Пусть теперь образом пучка проективных преобразований являются прямая соединяющая точку E с точкой $A \in e$; в этом случае мы рассмотрим произвольную плоскость α проходящую через прямую a и отличну от касательной плоскости квадрики Q в точке A. Пусть точка $P \in \varepsilon$ полюс плоскости α относительно квадрики Q. Точкой P посредничена невырожденная коллинеация между точками плоскостей ε и α; в этой коллинеации точками прямой a соответствуют точки касательной a' конического сечения e в точке A. Следовательно, образы произведений инволюции $\mathbf{P}$ с инволюциями отображающимися на точки прямой a', составляют точно прямую a.

Определение. *Мы будем говорить, что пучок проективных преобразований можно разложить на два пучки инволюций, если существуют такие два пучки инволюций (они могут и совпадать) и такое проективное преобразование между точками прямых, на которые они отображаются, что произведения соответствующих инволюций составлят данный пучок проективных преобразований.*

Теорема 7. *Невырожденный пучок проективных преобразований (т. е. такой, которой не содержит только вырожденные преобразования) можно разложить на два пучки инволюций тогда, и только тогда, когда он содержит по крайней мере одно вырожденное преобразование с исключением пучков, которые содержат тождественное преобразование и вырожденную инволюцию.*

Доказательство. а) Пусть данный пучок проективных преобразований отображается на прямую a, которая не проходит точкой E и пусть плоскость α проходящая точкой E и прямой a не является касательной плоскостью квадрики Q; то плоскость α пересекает плоскость ε в прямой p, которая не является касательной конического сечения e. Пусть P полюс прямой p относительно конического сечения e. Точкой P посредничена невырожденная коллинеация между плоскостями ε и α, в которой прямой $a \in \alpha$ соответствует прямая $a' \in \varepsilon$. Пусть A произвольная точка прямой a и пусть m соединяет точки E и A; то точка A индуцирует на поляре m' сопряженной с прямой m относительно квадрики Q проективное преобразование, которого сопряженная инволюция является инволюцией сопряженных полюсов конического сечения e и одна пара соответствующих точек является точка P и точка пересечения A' прямой m' и a'. Так как инволюцию **A** мы можем получить только как произведение инволюций, отображенных на прямой m', доказательство теоремы в настоящем случае следует прямо из вспомогательной теоремы.

б) Пусть теперь α касательная плоскость квадрики Q в точке $P \in e$ и прямая a не проходит точкой E. Введем систему координат на прямой P_1 таким образом, чтобы точка P имела координаты $(0, 1, 0, 0)$; то плоскость α имеет уравнение $x_2 = 0$. Плоскости проходящее точками E и P имеют уравнения

$$\mu_1 x_2 + \mu_2(x_0 - x_3) = 0. \tag{17}$$

Пусть прямая $[EP]$ пересекает прямую a в точке A и пусть прямая соединяющая точку E с точкой $(1, 0, 0, -1)$ (она принадлежит касательной p конического сечения e в точке P) пересекает прямую a в точке B; то точки A и B отличны и имеют координаты $(a_0, a_1, 0, a_0)$, $(b_0, 0, 0, b_3)$, где $a_1 \neq 0$, $b_0 \neq b_3$. Используя точки A, B мы можем всякую точку M прямой a привести к виду $M = \lambda_1 A + \lambda_2 B$ Поляра m' сопряженная к прямой $m = [EM]$ является прямой пересечения одной из плоскостей (17) с плоскостью ε. Между параметрами λ точки M и параметрами соответствующей плоскости существует соотношение

$$\mu_1 = -2a_1\lambda_1, \quad \mu_2 = (b_3 - b_0)\,\lambda_2. \tag{18}$$

Точки $O_1[-\lambda_1 a_1, 0, \lambda_2(b_0 - b_3), \lambda_1 a_1]$, $O_2(0, 1, 0, 0)$ прямой m' линейно независимы. Точка M определяет на прямой m' проективное преобразование точек такое, что произведения инволюций отображающихся до соответствующих точек, совпадают точно с инволюцией **M**. Если O_1, O_2 базисные точки, то уравнения этого проективного преобразования принимают вид

$$\begin{aligned}\varrho\alpha_1' &= \lambda_2(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0)(b_0 - b_3)\,\alpha_1,\\ \varrho\alpha_2' &= [-\lambda_1^2 a_1^2 + \lambda_2(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_3)(b_0 - b_3)]\,\alpha_2.\end{aligned} \tag{19}$$

Если b произвольная прямая плоскости ε не проходящая точкой P, то мы рассмотрим образы всех таких инволюций, которых произведения с инволюциями отображающимися на точки прямой b, отображаются на прямую a. Если плоскость β проходящая точкой E и прямой b имеет уравнение

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 - A_0 x_3 = 0, \tag{20}$$

то простым вычислением убедимся в том, что координаты требуемых точек имеют вид

$$\begin{aligned}x_0 &= a_0 a_1 A_1 \lambda_1^2 + a_1 b_0 A_1 \lambda_1 \lambda_2,\\ x_1 &= (a_1^2 A_1 - 2a_0 a_1 A_0)\,\lambda_1^2 + [a_0 A_2(b_0 - b_3) - 2a_1 b_3 A_0]\,\lambda_1\lambda_2 + b_3 A_2(b_0 - b_3)\,\lambda_2^2,\\ x_2 &= -a_0 A_1(b_0 - b_3)\,\lambda_1\lambda_2 - b_0 A_1(b_0 - b_3)\,\lambda_2^2,\\ x_3 &= -a_0 a_1 A_1 \lambda_1^2 - a_1 b_0 A_1 \lambda_1 \lambda_2.\end{aligned} \tag{21}$$

Чтобы найти условия вырожденности этого конического сечения, мы его будем проицировать из точки $(0, 0, 0, 1)$ на плоскость $x_3 = 0$. Первые три координаты точек конического сечения останут неизмененные и четвертая равна нулю. Таким образом, для вырожденности конического сечения (21) необходимо и достаточно, чтобы

$$a_0^2(b_0 - b_3)^2 A_2 - 2a_0a_1b_0(b_0 - b_3) A_0 - a_1^2b_0^2A_1 = 0 \tag{22}$$

Условие (22) эквивалентно утверждению, что плоскость β проходит точкой $T[-a_0a_1b_0(b_0 - b_3), -a_1^2b_0^2, a_0^2(b_0 - b_3)^2, a_0a_1b_0(b_0 - b_3)]$. Точка T принадлежит коническому сечению e. Так как прямая a в этом случае имеет всегда с квадрикой Q по крайней мере одну точку общую, и в этом случае теорема доказана.

в) Пусть прямая a проходит точкой E и пусть пересекает плоскость ε в точке A. Нужно различать три случая:

ва) Точка A внешняя точка конического сечения e; то существует такова система координат на прямой P_1, что точка A будет иметь координаты $(1, 0, 0, -1)$. Точки O_1 $(0, 1, 0, 0)$, O_2 $(0, 0, 1, 0)$ поляры a' сопряженной к прямой a относительно квадрики Q линейно независимы; на прямой a точки E $(1, 0, 0, 1)$, A $(1, 0, 0, -1)$ также линейно независимы. Пусть точки прямой a имеют параметры λ и пусть пары точек прямой a' имеют параметры λ' и λ'' и пусть например

$$\begin{aligned} \varrho\lambda_1' &= \lambda_1 + \lambda_2, \quad \varrho\lambda_2' = a\lambda_1 + b\lambda_2, \quad a \neq b, \\ \sigma\lambda_1'' &= \lambda_1 - \lambda_2, \quad \sigma\lambda_2'' = a\lambda_1 + b\lambda_2, \quad a \neq b, \end{aligned}$$

то произведением инволюций $\lambda_1'\mathbf{O}_1 + \lambda_2'\mathbf{O}_2$ и $\lambda_1''\mathbf{O}_1 + \lambda_2''\mathbf{O}_2$ является точно проективное преобразование $\lambda_1\mathbf{E} + \lambda_2\mathbf{A}$. Так как прямая a пересекает квадрику Q в двух точках, теорема и в этом случае верна.

вб) Точка A внутренняя точка конического сечения e; на прямой P_1 существует такова система координат, что точка A имеет координаты $(0, 1, -1, 0)$. Точки 0_1 $(0, 1, 1, 0)$, 0_2 $(1, 0, 0, -1)$ поляры a' сопряженной к прямой a относительно квадрики Q линейно независимы и также точки A $(0, 1, -1, 0)$, E $(1, 0, 0, 1)$ прямой линейно независимы. Предположим, что пучок отображаемый на прямую a можно разложить на произведение двух пучков инволюций. Из этого условия следует, что между параметрами λ, λ', λ'' существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varrho\lambda_1' &= a_0\lambda_1 + a_1\lambda_2, \varrho\lambda_2' = a_2\lambda_1 + a_3\lambda_2, a_0a_3 - a_1a_2 \neq 0, \\ \sigma\lambda_1'' &= b_0\lambda_1 + b_1\lambda_2, \sigma\lambda_2'' = b_2\lambda_1 + b_3\lambda_2, b_0b_3 - b_1b_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Инволюции $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{A}, \mathbf{E}$ связаны соотношением $(\lambda_1''\mathbf{O}_1 + \lambda_2''\mathbf{O}_2)(\lambda_1'\mathbf{O}_1 + \lambda_1'\mathbf{O}_2) = \lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{E}$. Из этого соотношения вытекает

$$\begin{aligned} (a_0b_0 + a_2b_2)\lambda_1^2 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 + a_3b_2)\lambda_1\lambda_2 + (a_1b_1 + a_3b_3)\lambda_2^2 &= \varrho\lambda_2 \\ (a_2b_0 - a_0b_2)\lambda_1^2 + (a_2b_1 + a_3b_0 - a_0b_3 - a_1b_2)\lambda_1\lambda_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\lambda_2^2 &= \varrho\lambda_1 \end{aligned} \tag{24}$$

Условия разрешимости уравнений (24) мы найдем путем элиминации ϱ в этом виде

$$
\begin{aligned}
&b_0 = ka_2, b_1 = la_1, b_2 = -ka_0, b_3 = la_3, kl \neq 0,\\
&(a_1a_2 - a_0a_3 - a_0^2 - a_2^2)\,k + (a_0a_1 + a_2a_3)\,l = 0,\\
&-(a_0a_1 + a_2a_3)\,k + (a_1^2 + a_3^2 + a_0a_3 - a_1a_2)\,l = 0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Последние из уравнений (25) имеют решение тогда, и только тогда, если

$$(a_1a_2 - a_0a_3)\,[(a_1 - a_2)^2 + (a_0 + a_3)^2] = 0,$$

откуда

$$a_1 = a_2, \quad a_0 = -a_3. \tag{26}$$

Если соотношения (26) применить к первому уравнению (25), то

$$b_0b_3 - b_1b_2 = kl(a_2a_3 + a_0a_1) = 0$$

и это противоречит условию (23).

Значит, если точка внутренняя точка конического сечения e, или если прямая a не имеет с квадрикой Q никакую общую точку, то не возможно разложить пучок отображаемый на прямую a на два пучка инволюций.

вв) Точка A принадлежит коническому сечению e; то существует на прямой P_1 такая система координат, что точка A имеет координаты (0, 1, 0, 0). Полярой a' сопряженной к прямой a относительно квадрики Q является касательная конического сечения e в точке A; на этой касательной точки $O_1 = A\,(0, 1, 0, 0)$, $O_2\,(1, 0, 0, -1)$ линейно независимы. Точки A, E прямой a также линейно независимы. Предположим, что пучок разлагается на два пучка инволюций; то между параметрами λ, λ', λ'' существовали бы соотношения (23). Из условия $(\lambda_1''\mathbf{O}_1 + \lambda_2''\mathbf{O}_2)(\lambda_1'\mathbf{O}_1 + \lambda_2'\mathbf{O}_2) = \lambda_1\mathbf{E} + \lambda_2\mathbf{A}$ вытекает

$$
\begin{aligned}
&a_2b_2\lambda_1^2 + (a_2b_3 + a_3b_2)\,\lambda_1\lambda_2 + a_3b_3\lambda_2^2 = \varrho\lambda_2,\\
&(a_2b_0 - a_0b_2)\,\lambda_1^2 + (a_2b_1 + a_3b_0 - a_0b_3 - a_1b_2)\,\lambda_1\lambda_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\lambda_2^2 = \varrho\lambda_1.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Условия разрешимости уравнений (27) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&a_2b_2 = 0,\\
&a_2b_3 + a_3b_2 - a_2b_0 + a_0b_2 = 0,\\
&a_3b_3 - a_2b_1 - a_3b_0 + a_0b_3 + a_1b_2 = 0,\\
&a_3b_1 - a_1b_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Эти уравнения разрешимые только тогда, если $a_0a_3 - a_1a_2 = 0$, или $b_0b_3 - b_1b_2 = 0$, что противоречит предположению. Теорема 7 вполне доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Medek V., *Lineárne systémy projektívnych príbuzností na priamke*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 6 (1956), 98-108.

[2] Vojtěch J., *Geometrie projektivní*, Praha 1932.

Поступило в редакцию 24 июня 1960 г.

Katedra deskriptívnej geometrie
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ÜBER DIE ZERLEGUNG DER PROJEKTIVITÄTEN EINER GERADEN

Václav Medek

Zusammenfassung

In vorliegender Abhandlung benützt man eine Abbildung der Projektivitäten einer Geraden auf Punkte eines dreidimensionalen projektiven Raumes. Unter einem Büschel von Projektivitäten versteht man ein System aller solchen Projektivitäten, welche sich auf Punkte einer Geraden abbilden. Man untersucht die Bedingungen, unter welchen man einen Büschel von Projektivitäten auf zwei Büschel von Involutionen zerlegen kann. Der Definition nach kann man einen Büschel von Projektivitäten dann auf zwei Büschel von Involutionen zerlegen, wenn eine solche projektive Verwandtschaft zwischen den Involutionen der beiden Büscheln existiert, dass die Produkte entsprechender Involutionen den gegebenen Büschel von Projektivitäten bilden. Das Hauptresultat ist: Einen regulären Büschel von Projektivitäten kann man auf zwei Büschel von Involutionen dann und nur dann zerlegen wenn er mindestens eine singuläre Projektivität enthält mit der Ausnahme der Büscheln, welche die Identität und eine singuläre Involution enthalten.