

# Matematicko-fyzikálny časopis

---

Július Krempaský; Valéria Macková; Eva Skočková  
Nové metódy merania koeficientu teplotnej a tepelnej vodivosti látok

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 11 (1961), No. 2, 146--158

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126593>

## Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## NOVÉ METÓDY MERANIA KOEFIČIENTU TEPLOTNEJ A TEPELNEJ VODIVOSTI LÁTKO

JÚLIUS KREMPASKÝ, VALÉRIA MACKOVÁ, EVA SKOČKOVÁ, Bratislava

V práci sa experimentálne vyšetruje nová metóda merania koeficientu teplotnej a tepelnej vodivosti látok. Študuje sa presnosť merania, vplyv rozličných vonkajších činiteľov na jej hodnotu a našla sa závislosť koeficientu teplotnej vodivosti meraného touto metódou od geometrických rozmerov malých vzoriek. Pre pravidelné kruhové vzorky je teoreticky vypracovaná a experimentálne vyskúšaná iná ešte jednoduchšia metóda merania, v ktorej jediným prakticky meracím prístrojom sú galvanometer a stopky. Táto metóda je zvlášť výhodná pre meranie tepelných charakteristík v závislosti od teploty, tlaku atď.

### 1. Úvod

Pri zavádzaní nových materiálov do praxe, napr. v stavebníctve, v zariadeniach atómovej fyziky, v elektrotechnike (polovodiče) má veľký význam znalosť ich tepelných charakteristík: koeficientu teplotnej a tepelnej vodivosti, resp. špecifického tepla. V súvislosti s tým sa objavila potreba vypracovať rýchle, nenáročné a pritom dostatočne presné metódy na ich meranie.

Doteraz používané metódy merania sa uplatňujú prevažne len v laboratórnych podmienkach. Stacionárne metódy merania (pozri napr. [1]) majú nevýhody v tom, že sú zdĺhavé (meranie trvá aj niekoľko hodín), pri meraní sa vyžadujú presne graduované termočlánky, prípadne aj normál. Metódy opísané v prehľadných knihách [2], ako aj metódy používané najmä v súčasnej polovodičovej meracej technike [3], [4] sú dosť zložité a podobne ako predchádzajúce metódy vyžadujú vzorky opracované do pravidelných geometrických tvarov, čo znemožňuje ich používanie napr. pre rýchlu kontrolu tepelných charakteristík na vyrobených materiáloch, pre zisťovanie tepelných nehomogenít, pre meranie na hotových prvkoch atď.

V práci [5] je teoreticky zdôvodnená nová rýchla metóda merania tepelných parametrov látok. Meranie dáva správne výsledky pre polonekonečné vzorky.

Úlohou tejto práce je posúdiť presnosť merania. rôzne vonkajšie vplyvy na nameranú hodnotu a zistiť optimálne podmienky pre meranie.

Keďže uvedený spôsob merania je veľmi jednoduchý, javilo sa nám účelným aplikovať ho aj na vzorky konečných rozmerov a zistiť príslušné odchýlky od správnej hodnoty.

Okolnosť, že opísaná metóda merania sa hodí len pre masívnejšie materiály, bola podnetom pre teoretické vyšetrenie tepelných pomerov aj v tenkých vzorkách. Z toho vyplynula ďalšia veľmi jednoduchá metóda merania, ktorá je v tejto práci teoreticky zdôvodnená a experimentálne overená.

## 2. Meranie podľa metódy opísanej v práci [5]

Podľa tejto metódy možno koeficient teplotnej vodivosti polonekonečného materiálu (obr. 1) určiť vzťahom

$$k = \frac{r^2}{\pi t_1} \left( \frac{1 - \frac{T_1}{T_2} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}}{1 - \frac{T_1}{T_2}} \right)^2, \quad (2,1)$$

kde  $r$  – vzdialenosť medzi termočlánkom a bodovým tepelným zdrojom,  $t_1, t_2$  –

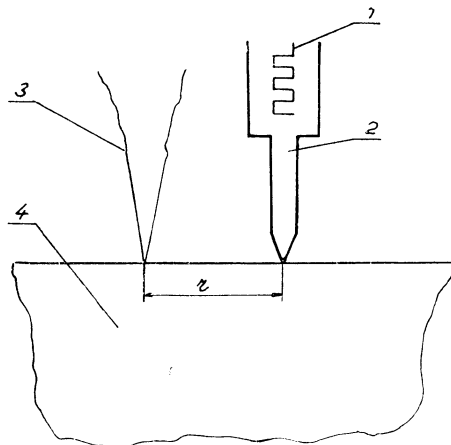
= vhodné zvolené časové okamžiky (musí

platiť  $\frac{r}{\sqrt{2kt}} < 1$ ),  $T_1/T_2$  – podiel teplôt nameraných termočlánkom v časoch  $t_1$  a  $t_2$  (rovná sa jednoducho podielu príslušných výchyliek galvanometra pripojeného na termočlánok, pretože základná teplota vzorky je zvolená za nulovú).

Pri tomto meraní je tepelný zdroj trvale zapnutý. Ak zapneme tepelný zdroj len na okamih a zmeráme čas  $\Delta t$ , za ktorý nastane maximum teploty v mieste termočlánku (čo sa prejaví zvratom ručičky galvanometra), môžeme koeficient teplotnej vodivosti počítať zo vzťahu

$$k = \frac{r^2}{6\Delta t}. \quad (2,2)$$

Vzťahy pre meranie koeficientu tepelnej vodivosti sú uvedené v práci [5]. Zo



Obr. 1. Schematické usporiadanie na meranie koeficientu teplotnej vodivosti. 1 – výhrevná špirála, 2 – bodový tepelný zdroj, 3 – termočlánok, 4 – meraný materiál.

známych hodnôt koeficientu teplotnej a tepelnej vodivosti vyplýva aj hodnota špecifického tepla na základe vzťahu

$$k = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad (2,3)$$

kde  $\rho$  – špecifická hmota látky.

Meranie koeficientu teplotnej vodivosti sme robili pomocou prístroja opísaného v práci [5] na základe vzťahu (2,1). Ako indikátora teploty sme používali med' konstantánový termočlánok pripojený na citlivý interflex – galvanometer. Okruh galvanometra bol prispôsobený tak, aby bola potlačená chyba spôsobená zotrvačnosťou galvanometra. Všetky merania sme robili pri maximálnej citlivosti prístroja.

Teplota okolia pri meraní bola 20 °C.

### 2,1. Meranie na polonekonečných vzorkách

Pre meranie sme použili dostatočne masívne vzorky olova a železa, aby sme ich mohli považovať za polonekonečné. (Kedy už možno považovať vzorku za polonekonečnú, bude ozrejmene v ďalších odsekoch.)

Medený vyhrievací blok sme napájali cez autotransfómátor, takže sme mohli vyšetrovať vplyv rôznej teploty ohrievača na meranie. Ukázalo sa, že i v značne širokom intervale rozdielu teplôt medzi vzorkou a ohrievačom ostáva podiel  $T_1/T_2$  prakticky stály a teda voľba teploty tepelného zdroja nemá na meranie žiadny vplyv, čo je v súhlase s teoretickým výsledkom v práci [5]. Rovnako sme nepozorovali vplyv rôznej intenzity pritlačenia zdroja na meranú vzorku.

Presnosť merania koeficientu teplotnej vodivosti závisí teda hlavne od presnosti zmerania pomeru  $T_1/T_2 = s_1/s_2$  ( $s_1, s_2$  – výchylky galvanometra) a od presnosti zmerania vzdialenosti termočlánku od zdroja. Pravdepodobná chyba spojená s meraním  $T_1/T_2$  sa na polonekonečných vzorkách olova pohybovala v medziach 0,11–0,32 %, na polonekonečných vzorkách železa v medziach 0,15–0,5 %. Malé zväčšenie chyby pri meraniach na železe má zrejme príčinu v tom, že v tom prípade nebolo možné dosiahnuť taký dobrý kontakt medzi vzorkou a termočlánkom ako v prípade olova.

Chyba spojená s meraním vzdialenosti  $r$  bola väčšia, pretože zdroj, ktorý ideálne má byť bodový, mal s ohľadom na citlivosť merania konečnú plochu prierezu na styku so vzorkou. I za týchto podmienok však celková chyba merania nepresahovala 1–2 %.

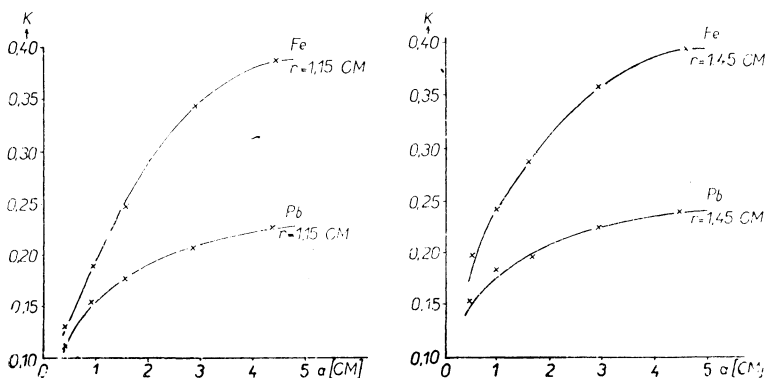
Voľbou čo možno najmenšej plochy styčného prierezu zdroja (intenzívnejšie ohrievanie to umožňuje), voľbou väčšej vzdialenosti  $r$  a mikrometrickým posuvom možno ľahko chybu súvisiacu s meraním vzdialenosti potlačiť aj pod úroveň chýb súvisiacich s meraním podielu  $T_1/T_2$ . To by značilo, že chyba merania koeficientu teplotnej vodivosti by bola len niekoľko desiatín percenta.

Pri meraní na polovodičoch možno využiť ich pomerne veľkú termosilu a namiesto termočlánku použiť obyčajnú kovovú sondu. To umožňuje jednak meranie na podstatne menších vzorkách a značne zvyšuje presnosť meranie (~1 %).

## 2.2. Meranie na vzorkách s konečnou hrúbkou a veľkou plochou

Pri meraní na vzorkách s konečnou hrúbkou a veľkou (teoreticky nekonečnou) plochou sme používali sériu olovených vzoriek o ploche  $P \approx 55 \text{ cm}^2$  s hrúbkami od 0,4 cm do 4,5 cm a sériu železných vzoriek o ploche  $P \approx 35 \text{ cm}^2$  o hrúbkach od 0,4 cm do 4,5 cm. Merali sme pri dvoch vzdialenostiach termočlánku od zdroja:

$r_1 = 1,45 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 1,15 \text{ cm}$ . Aby bola splnená podmienka  $\frac{r}{\sqrt{2kt}} < 1$ , volili sme časové okamihy  $t_1 = 10 \text{ sec}$ ,  $t_2 = 20 \text{ sec}$ .

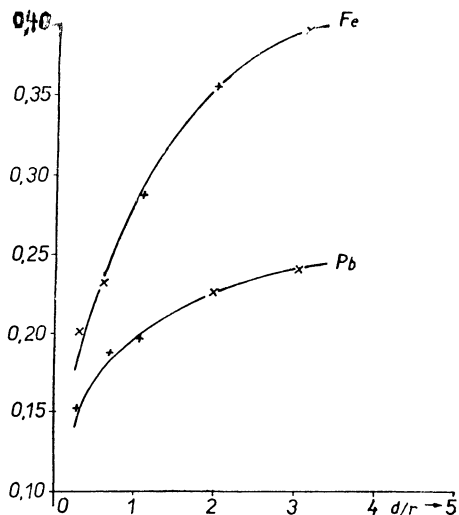


Obr. 2. Závislosť koeficientu teplotnej vodivosti olova a železa od hrúbky vzorky.

Výsledky merania sú graficky zachytené na obr. 2. Na prvom je vynesená závislosť koeficientu teplotnej vodivosti od hrúbky olova a železa pre  $r_1 = 1,45 \text{ cm}$ , na druhom pre  $r_2 = 1,15 \text{ cm}$ .

Výstižnejšou charakteristikou týchto závislostí je však obr. 3, na ktorom je znázornená závislosť nameraného koeficientu olova i železa od podielu hrúbky vzorky a vzdialenosti ( $d/r$ ).

Z obrázkov jednoznačne vyplýva, že so znižovaním hrúbky nameraná hodnota koeficientu teplotnej vodivosti pomerne dosť prudko klesá. Príčina toho poklesu je zrejma: odovzdané teplo zohrieva vzorku na vyššiu teplotu, než ju predpisuje teoretické riešenie. Pri dostatočne veľkých hrúbkach sa však



Obr. 3. Závislosť koeficientu teplotnej vodivosti olova a železa od podielu hrúbky a vzdialenosti  $r$  ( $d/r$ ).

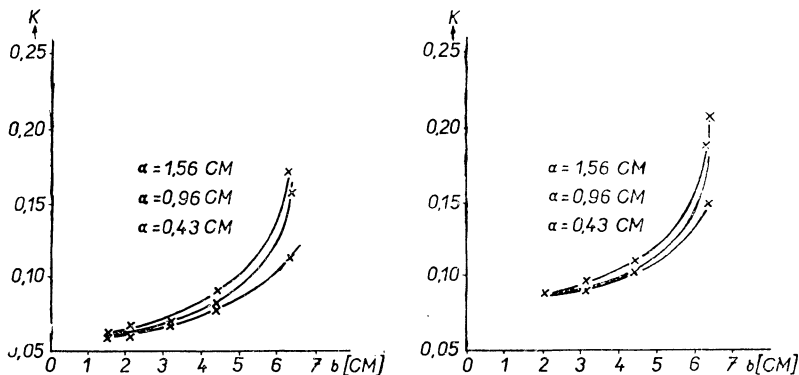
už meranie ustalať a počnúc určitou kritickou hrúbkou sa nameraná hodnota už vôbec nemení. Z obr. 3 vyplýva, že táto ustálená oblasť merania nastáva, ak  $d/r \geq 3,5$ . Vzorky, pre ktoré je táto nerovnosť splnená, možno teda považovať za polonekonečné a meranie na nich uvedenou metódou za absolútne.

### 2.3. Meranie na malých vzorkách

V prípadoch, keď nie sú k dispozícii masívne vzorky, je dôležité poznať charakter závislosti nameranej hodnoty teplotnej vodivosti od geometrických rozmerov vzoriek. Napr. v polovodičovej meracej technike sa stretávame takmer výlučne len s malými vzorkami. Za účelom namerania takejto závislosti sme vyhotovili sériu obdĺžnikovitých vzoriek s konštantným pomerom strán ( $a/b = 1,42$ ) z olova. (Polovodiče germánium a kremík majú približne rovnaký koeficient teplotnej vodivosti ako olovo.) Pri meraní bol zdroj i termočlánok umiestnený v osi rovnobežnej s dlhšou stranou. Ich vzájomná vzdialenosť bola opäť 1,45 a 1,15 cm.

I pri týchto meraniach sa chyba spojená s meraním  $T_1/T_2$  pohybovala v hraniciach 0,1 až 0,3%. Nebolo možné konštatovať nijakú význačnú závislosť chyby merania od geometrických rozmerov vzoriek. Svedčí to o tom, že vplyvy spôsobené napr. vzdušnými prúdmi, odvodom tepla, vyžarovaním, intenzitou ohrevu a i. majú len druhoradý význam. Merateľne by sa mohli prejavíť len pri vzorkách s veľmi malou tepelnou vodivosťou. Rovnako sme nepozorovali prakticky žiadny vplyv kvality povrchu na meranie. Je to vysvetliteľné tým, že termočlánok bol umiestnený v určitej malej hĺbke pod povrchom vzorky a zachycuje teda tepelný stav nie povrchu, ale samotného materiálu.

Namerané závislosti sú znázornené na obr. 4. Z priebehu týchto grafov vyplýva zaujímavý záver: ak je vzorka už dostatočne malá, závisí nameraná hodnota slabo od geometrických rozmerov a je prakticky nezávislá od hrúbky. Táto okolnosť je pre meracie účely veľmi výhodná a svedčí o tom, že pri rešpektovaní určitého ko-

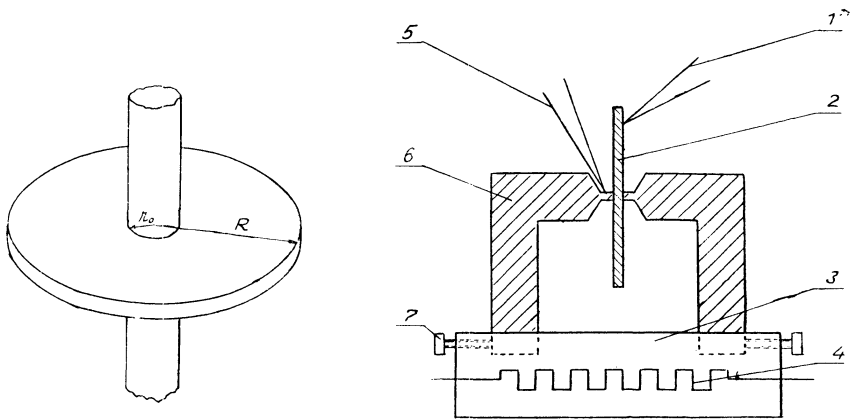


Obr. 4. Závislosť koeficientu teplotnej vodivosti olova od dĺžky strany  $b$  pre malé pozdĺžnikovité vzorky.

rekčného faktora možno uvedenú metódu merania aplikovať s dostatočnou presnosťou i na malé vzorky. V nasledujúcich úvahách si však ukážeme, že možno veľmi jednoducho merať koeficient teplotnej vodivosti i na tenkých vzorkách absolútne, t. j. bez uvažovania korekčných faktorov.

### 3. Meranie koeficientu teplotnej vodivosti na kruhových vzorkách ľubovoľnej hrúbky

V prípadoch, keď nie sú k dispozícii masívne vzorky, možno koeficient teplotnej vodivosti jednoducho a pritom dostatočne presne namerať na kruhových vzorkách ľubovoľnej hrúbky. Vzorka je buď prevítaná (obr. 5) a ohrievač cez ňu prevlečený



Obr. 5. Vzorka materiálu s prevlečeným vyhrievacím systémom na meranie teplotnej vodivosti. —  
 Obr. 6. Schéma zariadenia pre meranie koeficientu teplotnej vodivosti pre tenké kruhové vzorky.  
 1 — termočlánok, 2 — meraná vzorka, 3 — medený blok, 4 — vyhrevná špirála, 5 — termočlánok,  
 6 — vyhrievací rámik, 7 — skrutka.

ako oska, alebo, ak je dostatočne tenká, stačí ju v strede z dvoch strán stlačiť dvoma rovnakými násadkami s rovnakým polomerom styčnej plochy  $r_0$  (obr. 6). V čase  $t = 0$  sa ohrievač zapne a udržuje na styčnej plôške so vzorkou konštantnú teplotu. V ľubovoľnom bode vzorky (napr. na obvode) sa umiesti termočlánok\* tak, aby meral termonapätie úmerne teplotnému rozdielu medzi vyhrievaným miestom a termočlánkom.

Podľa teoretického výsledku odvodeného v dodatku možno koeficient teplotnej vodivosti takejto vzorky počítať vzťahom

$$k = \frac{A}{\Delta t} \ln \left| \frac{T_1}{T_2} \right|, \quad (3,1)$$

\* Pri meraní na polovodiči stačia dve kovové sondy, ako je uvedené na konci odstavca 2,1.

kde  $T_1/T_2$  – podiel teplôt v mieste termočlánku vzhľadom na teplotu ohrievača, meraných v časových okamihoch  $t_1, t_2$  po zapnutí zdroja,  $\Delta t = t_2 - t_1$  a  $A$  – koeficient charakterizujúci geometrické rozmery vzorky, ktorý má hodnotu

$$A = \frac{R^2 \left(1 - \frac{3b}{2}\right)}{3b}; \quad b = \frac{r_0}{R}. \quad (3,2)$$

Ak je termočlánok dvojité a upevnený jedným koncom na vzorke a druhým na ohrievači, je podiel  $T_1/T_2$  rovný priamo podielu príslušných výchyliek galvanometra pripojeného na termočlánok. Vidíme, že v porovnaní s predchádzajúcou metódou odpadá problém merania vzdialenosti zdroja a termočlánku a meranie možno začať kedykoľvek po zapnutí zdroja, pretože vo výslednom vzťahu vystupuje len dĺžka časového intervalu medzi prvým a druhým zmeraním výchylky.

Meranie podľa vzťahu (3,1) je tým presnejšie, čím je  $r_0 < R$ . Pri presnom meraní sa neodporúča merať výchylky ihneď po zapnutí zdroja.

### 3.1. Meracie zariadenie

Meranie možno robiť napr. priamo podľa obr. 5 alebo 6. Ak je však ohrievač elektricky vodivý, má tento spôsob nevýhodu v tom, že sa okruh termočlánku skratuje. Je preto v tomto prípade treba merať dvoma oddelenými termočlámkami.

Aby sme sa vyhli uvedenej ťažkosti, použili sme ako tepelný zdroj elektricky nevodivú kvapalinu – olej alebo destilovanú vodu. Zariadenie pre tento účel je schematicky znázornené na obr. 7. Z rezervoára zohriatej kvapaliny 5 sa kohútikom 6 vypúšťa kvapalina do otvoru v nádobke s pevnou 4 a pohyblivou stenou 3. Vnútri nádoby je prevrtaná vzorka 8 od nádoby tepelne izolovaná. Termočlánok 2 jedným spojom zasahuje priamo do kvapaliny vo vzorke, druhým spojom je pripevnený na vzorku. Pri menej presných meraniach možno prvý spoj ponoriť priamo do zásobníka teplej kvapaliny.

Opísaný spôsob merania má ďalšiu výhodu v tom, že ho ľahko možno upraviť na meranie vo vákuu a na meranie v širokom intervale teplôt. Najmä pri meraní pri nízkych teplotách sa uplatňuje okolnosť, že zdroj tepla je fakticky mimo meracieho prostredia a teda že nezvyšuje teplotu okolia vzorky.

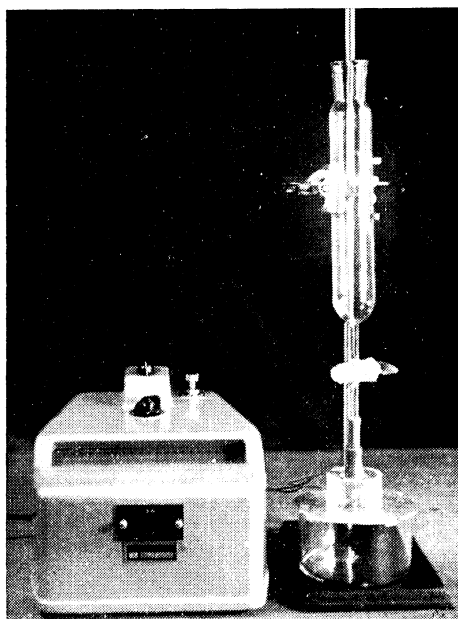
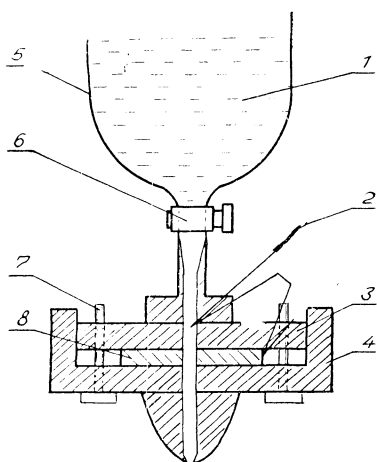
### 3.2. Meranie a zhodnotenie výsledkov

Ak nehľadíme na prácu spojenú s určením konštanty  $A$ , ktorej hodnota vyplýva z geometrických rozmerov vzorky, spočíva celé meranie v určení podielu výchyliek galvanometra pripojeného na termočlánok  $s_1/s_2$  vo zvolenom časovom rozpätí  $\Delta t$ . Okolnosť, že vo vzťahu (3,1) nevystupuje absolútna hodnota času, umožňuje v priebehu niekoľkých desiatok sekúnd urobiť niekoľko meraní odrazu. Stačí pri trvalom pretekaní kvapaliny sledovať ručičku galvanometra a v stanovenom intervale od-



čítať jej polohu. Vždy z dvoch za sebou nasledujúcich hodnôt možno pomocou vzťahu (3,1) vypočítať koeficient teplotnej vodivosti a vziať z nich strednú hodnotu.

Chyba spojená s meraním podielu  $s_1/s_2$  je približne rovnako veľká ako v predchádzajúcej metóde. Avšak pretože tu odpadá úloha merať vzdialenosť zdroja od termočlánku, čo v predchádzajúcej metóde značne ovplyvňuje presnosť merania, je meranie touto metódou presnejšie. Pri dobrom splnení teoretických predpokladov je presnosť merania okolo  $\pm(1-3)\%$ .



Obr. 7. Zariadenie pre meranie koeficientu teplotnej vodivosti na tenkých vzorkách pomocou pretekajúcej kvapaliny. 1 — zohriata kvapalina, 2 — termočlánok, 3 — pesuvná doštička, 4 — pevný rámik, 5 — zásobník, 6 — výpustný kohútik, 7 — skrutka, 8 — meraná vzorka. — Obr. 8. Celkový pohľad na meracie zariadenie.

Vzťah pre konštantu  $A$  (3,2) je síce aproximatívny, ale ako ukázali merania, vyhovuje veľmi dobre. Konečne, jej hodnotu nie je potrebné určovať početne. Možno ju zmerať na tepelnom normále na základe vzťahu (3,1). Pretože jej hodnota závisí len od geometrie vzorky, mala by takto nameraná konštantu  $A$  pre všetky podobné vzorky rovnakú hodnotu.

#### 4. Záver

V prvej časti práce sa vyšetruje presnosť merania koeficientu teplotnej vodivosti novou metódou, študujú sa okolnosti, za ktorých možno považovať meranie za správne, a je vyskúšaná možnosť jej použitia i na menšie vzorky pravidelných geo-

metrických tvarov. Ukázalo sa, že zavedením určitej korekcie by bolo možné uvedenou metódou spoľahlivo premeriavať i malé vzorky.

V druhej časti práce je ukázané, že pre meranie koeficientu teplotnej vodivosti na malých vzorkach (nie je to však podmienkou) sa oveľa lepšie ako predchádzajúca metóda hodí metóda založená na šírení tepla vo valcovej (kruhovej) vzorke. Ak možno vzorku v prostriedku prevrátať, je výhodné ako tepelný zdroj použiť zohriatu kvapalinu (nevodivú), pretože potom pre meranie stačí jediný termočlánok. Ak vzorku nemožno prevrátať a ak je dostatočne tenká, možno urobiť meranie obyčajným pritlačením dvoch vyhriatych blokov rovnakého prierezu k vzorke.

Meranie touto metódou, ktorá je v dodatku teoreticky vypracovaná, je nielen presnejšie, ale i jednoduchšie a pohodlnejšie.

### 5. Dodatok: Teoretický výpočet k meraniu na kruhových vzorkách

Majme vzorku materiálu podľa obr. 5. Nech má všade konštantnú hodnotu koeficientu teplotnej vodivosti a nech  $R$  značne prevyšuje  $r_0$ . Šírenie tepla v materiáli je všeobecne opísané rovnicou

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (5,1)$$

Pretože náš problém je rovinný a s ohľadom na centrálnu os vzorky symetrický, môžeme po prepísaní rovnice (5,1) do sférických súradníc vychádzať pri riešení z rovnice

$$\frac{\partial T}{\partial t} = kr^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (5,2)$$

Hraničné podmienky určíme tak, aby teplota zdroja v ľubovoľnom čase bola rovná nule. Teplota meranej vzorky v čase  $t = 0$  musí byť preto záporná  $-T_0$ . Ďalej budeme predpokladať, že cez obvod vzorky teplo do okolia neprechádza (po zanedbaní vyžarovania by to presne platilo vo vákuu). Je teda treba nájsť riešenie rovnice (5,2)  $T(r, t)$  pri týchto hraničných a počiatočných podmienkach:

$$T(r_0, t) = 0, \quad (5,3a)$$

$$\left. \frac{dT(r, t)}{dr} \right|_{r=R} = 0, \quad (5,3b)$$

$$T(r, 0) = -T_0. \quad (5,3c)$$

Zavedaním substitúcie  $z = rT$  prejde rovnica (5,2) do tvaru

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial r^2},$$

ktorú môžeme výhodne riešiť metódou separácie premenných. Dostali by sme [6]

$$z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n t} \{A_n \sin \omega_n r + B_n \cos \omega_n r\}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{a_n}{k}}, \quad (5,4)$$

kde  $a_n$  – parameter, ktorého hodnotu určíme z hraničných podmienok. Teplota  $T(r, t)$  v ľubovoľnom mieste a čase teda je

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n t} \left\{ A_n \frac{\sin \omega_n r}{r} + B_n \frac{\cos \omega_n r}{r} \right\}. \quad (5,5)$$

Hraničné podmienky (5,3) aplikované na funkciu (5,5) dajú dve lineárne a homogénne rovnice, ktoré majú riešenie, len ak ich determinant sa rovná nule, t. j.

$$\begin{vmatrix} \sin \omega_n r_0, & \cos \omega_n r_0 \\ \omega_n \cos \omega_n R - \frac{\sin \omega_n R}{R}, & -\omega_n \sin \omega_n R - \frac{\cos \omega_n R}{R} \end{vmatrix} = 0. \quad (5,6)$$

Pre neznáme parametre  $a_n$  z toho vyplýva podmienka

$$\operatorname{tg} \omega_n r_0 = - \frac{R \omega_n \cos \omega_n R - \sin \omega_n R}{R \omega_n \sin \omega_n R + \cos \omega_n R}. \quad (5,7)$$

Explicitne vyjadriť riešenie tejto rovnice pre  $a_n$  nie je možné. Pre nás je dôležité nájsť len prvé riešenia, t. j.  $a_1, a_2, \dots$ . Predpokladajme, že prvé riešenie bude také, že platí

$$x = \omega_1 R < 1, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{a_1}{k}}, \quad (5,8)$$

potom môžeme pre funkcie  $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$  použiť vyjadrenie vo forme radov a aproximovať ich len prvými členmi. Tak dostaneme

$$a_1 = \frac{3bk}{R^2 \left(1 - \frac{3b}{2}\right)}; \quad b = \frac{r_0}{R}. \quad (5,9)$$

Pretože podľa predpokladu je vždy  $r_0 \ll R$ , je  $b \ll 1$  a teda

$$\omega_1 R \approx \sqrt{3b} < 1.$$

Nerovnosť (5,8) je teda splnená.

Pre veľké hodnoty  $R$  môžeme v determinante (5,6) vynechať členy úmerne  $R^{-1}$ , čím dostaneme

$$\operatorname{tg} \omega_n R = -\operatorname{cotg} \omega_n r_0.$$

Ak navyše je  $r_0$  dostatočne malé, môžeme položiť  $r_0 \rightarrow 0$  a  $\operatorname{ctg} \omega_n r_0 \rightarrow \infty$  preto

$$\operatorname{tg} \omega_n R = -\infty. \quad (5,10)$$

Tejto rovnici vyhovujú riešenia

$$a_n = \frac{k}{R^2} \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} \right]^2. \quad (5,11)$$

Zostáva ešte splniť podmienku (5,3c). Z podmienky (5,3a) vyplýva

$$\frac{B_n}{A_n} = -\operatorname{tg} \omega_n r_0. \quad (5,12)$$

S ohľadom na nerovnosť  $b \ll 1$  a na vzťah (5,8) je  $B_n \rightarrow 0$ , preto podmienka (5,3c) žiada, aby platilo

$$\sum A_n \{\sin \omega_n r\} = -rT_0. \quad (5,13)$$

Pre naše účely nie je potrebné poznať hodnoty koeficientov  $A_n$ . Určili by sa rozvinutím funkcie  $-rT_0$  do Fourierovho radu.

Výhodné pre nás je, že pravú stranu rovnice možno aproximovať hneď prvým členom radu na ľavej strane. Na základe (5,8) je nutne  $\omega_1 r \ll 1$ , preto môžeme písať

$$A_1 \omega_1 r \approx -rT_0,$$

z čoho

$$A_1 = -RT_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{3b}{2}}{3b}}. \quad (5,14)$$

Pretože  $a_2 > a_1$ , možno vhodnou voľbou času  $t$  dosiahnuť, aby druhý člen radu (5,13) bol značne menší ako prvý. V tom prípade je teplota  $T(r, t)$  dostatočne určená prvým členom radu (5,5). Podiel dvoch teplôt  $T_1$  a  $T_2$  meraných v tom istom mieste v dvoch rôznych časových okamihoch  $t_1$  a  $t_2$ , ak označíme  $t_2 - t_1 = \Delta t$ , je preto zrejmé

$$\frac{T_1}{T_2} = \exp \frac{3bk}{\left(1 - \frac{3}{2}b\right)R^2} \Delta t,$$

z čoho pre koeficient teplotnej vodivosti vychádza

$$k = \frac{R^2 \left(1 - \frac{3b}{2}\right)}{3b \Delta t} \ln \frac{|T_1|}{|T_2|}. \quad (5,15)$$

Ak označíme

$$A = \frac{R^2 \left(1 - \frac{3b}{2}\right)}{3b},$$

čo je konštanta charakterizujúca geometrické rozmery vzorky, dostaneme

$$k = \frac{A}{\Delta t} \ln \frac{|T_1|}{|T_2|},$$

čo je vzorec (3,1) použitý v texte.

#### LITERATÚRA

- (1) Иоффе А. Ф., Физика полупроводников, Москва—Ленинград 1957.
- (2) Лыков А. В., Теория теплопроводности, Москва 1952.  
Кондратов Г. М., Испитание на тепловодность по методам регулярного режима, Москва 1936.
- (3) Иоффе А. Ф., Иоффе А. В., ЖТФ 22 (1952), 2005.
- (4) Полупроводники в науке и технике 1., ИАН СССР, Москва—Ленинград 1957.
- (5) Krempeký J., ЖТФ (v tlači).
- (6) Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Москва 1953.

Došlo 18. 6. 1960.

*Katedra fyziky  
Slovenskej vysokej školy technickej  
v Bratislave*

#### НОВЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Юлиус Кремпаски, Валерия Мацкова, Эва Скочкова

#### Резюме

В настоящей статье исследуются возможности быстрого измерения коэффициента температуропроводности и теплопроводности при помощи точечного источника тепла. Измерение зависимости коэффициента температуропроводности от геометрических размеров образца показало, что оно приводит к хорошим результатам, если эти размеры в 3—5 раз превышают расстояние источника тепла от термопары.

Для образцов круговой формы и произвольной толщины теоретически разработан и экспериментально проверен другой быстро приводящий к цели метод измерения коэффициента температуропроводности, основанный практически только на вычислении двух отступлений гальванометра, присоединенного к термопаре. Если температура в окружающую среду не отдается, точность измерения по обоим методам определяется практически только точностью измерения расстояний.

# NEUE METHODEN DER MESSUNG DER TEMPERATUR- UND WÄRMELEITFÄHIGKEIT

Július Krempaský, Valéria Macková, Eva Skočková

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersucht man die Möglichkeit die Temperatur- und Wärmeleitfähigkeit mittels einer Punktwärmequelle schnell zu messen. Die Messungen der Abhängigkeit dieser von die geometrischen Abmessungen der Probe haben gezeigt, daß diese Methode rechte Ergebnisse gibt, wenn die Abmessungen 3—5 mal größer als der Abstand der Punktwärmequelle von dem Thermoelement sind.

Für die beliebige dicke Kreisförmige-proben ist eine andere schnelle Methode zur Messung der Wärmeleitfähigkeit vorgeschlagen und theoretisch gelegt. Diese Methode liegt praktisch in der Ablesung zwei hintereinander gehenden Ausschlagen des Galvanometers welcher ist an der Thermoelement gebunden. Wenn die Wärmeverluste in Umgebung ausgeschlossen sind, die Messungfehler nach beiden untersuchten Methoden ist nur mit Fehler der Abstandmessungen bestimmt.