Matematický časopis

Beloslav Riečan

Poznámka o regulárnych K-priestoroch

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 1, 50--52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126584

POZNÁMKA O REGULÁRNYCH K-PRIESTOROCH

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

Cieľom tejto poznámky je upozorniť na jednu alternatívnu charakteristiku regulárnych K-priestorov (veta 3), skoro regulárnych K-priestorov (veta 2), K-priestorov spočetného typu, ako aj Booleových algebier spočetného typu (dôsledky 1 resp. 2 vety 1).

Všetky názvy a označenia používame podľa knihy [2]. Naviac zavedieme toto označenie: zväz A spĺňa podmienku (α), ak ku každej zhora ohraničenej množine $E \subset A$ existuje spočetná podmnožina $F \subset E$ tak, že $\sup E = \sup F$.

Veta 1. *Nech A je zväz s najmenším prvkom 0. Nech pre každú postupnosť $\{x_n\}$ prvkov z A a každé $x \in A$ je* $(\sup x_n) \cap x = \sup (x_n \cap x)$. *Nech A spĺňa podmienku* (α). *Potom A je spočetného typu, t. j. každá ohraničená množina navzájom disjunktných prvkov je spočetná.*

Dôkaz.(1) Nech E je ohraničená množina navzájom disjunktných prvkov $0 \notin E$. Podľa predpokladu existuje spočetná množina $F \subset E$ tak, že $\sup E = \sup F$. Stačí dokázať, že $F = E$.

Keby existovalo $y \in E - F$, tak by $y \cap \sup F = 0$. Je $y \leqq \sup E = \sup F$, teda $0 = y \cap \sup F = y$, čo je v spore s predpokladom.

Dôsledok 1. *úplná Booleova algebra A má vlastnosť* (α) *vtedy a len vtedy, keď je spočetného typu.*

Dôkaz. Z vlastnosti (α) vyplýva spočetnosť typu podľa vety 1 (por. [2], veta II. 5. 3). Opačná implikácia vyplýva z [2], veta VI. 1.1.

Dôsledok 2. *K-priestor X má vlastnosť* (α) *vtedy a len vtedy, keď je spočetného typu.*

Dôkaz. Ak X má vlastnosť (α), má ju aj kužel A kladných prvkov. Podľa vety 1 (por. [2], veta III. 5.1) je X spočetného typu. Opačná implikácia vyplýva z [2], veta VI. 2.2.

Veta 2. *K-priestor X je skoro regulárny vtedy a len vtedy, ak má vlastnosť* (α) *a každá neklesajúca zhora ohraničená postupnosť konverguje s regulátorom.*

(1) Pozri [1], V. veta 1.44.

Dôkaz. Ak je X skoro regulárny, tak je jednak spočetného typu, a podľa dôsledku 2 má vlastnosť (α), jednak konvergencia s regulátorom je ekvivalentná s (o)-konvergenciou ([2], veta VI. 4.1).

Dokážeme opačnú implikáciu. Podľa dôsledku 2 je K spočetného typu. Zostáva nám dokázať, že (o)-konvergencia je ekvivalentná s (r)-konvergenciou ([2], veta VI. 4.1), teda, že z $x_n \xrightarrow{(o)} x$ vyplýva $x_n \xrightarrow{(r)} x$.

Z predpokladu vety vyplýva, že aj každá nerastúca zdola ohraničená postupnosť konverguje s regulátorom. Okrem toho, ak u (resp. v) je regulátor konvergencie postupnosti $\{x_n\}$ (resp. $\{y_n\}$), tak $u + v$ je regulátor konvergencie oboch postupností.

Nech $x_n \xrightarrow{(o)} x$. Potom existujú postupnosti $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ tak, že $y_n \leqq x_n \leqq z_n$, $y_n \nearrow x$, $z_n \searrow x$. Nech u je spoločný regulátor konvergencie postupností $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. Potom k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje N tak, že pre všetky $n > N$ je

$$z_n - x = |z_n - x| < \varepsilon u, \quad x - y_n = |x - y_n| < \varepsilon u.$$

Teda

$$-\varepsilon u < y_n - x \leqq x_n - x \leqq z_n - x < \varepsilon u,$$

odkiaľ vyplýva $x_n \xrightarrow{(r)} x$.

Veta 3. *K-priestor X je regulárny vtedy a len vtedy, ak má vlastnosť (α) a každý spočetný systém neklesajúcich ohraničených postupností má spoločný regulátor konvergencie.*

Dôkaz. Je známe, že v regulárnom K-priestore platia uvedené podmienky ([2], vety VI. 2.2, VI. 4.1, VI. 5.2). Obrátená implikácia vyplýva z dôsledku 2 a nasledujúcich troch liem.

Lema 1. *Ak každý spočetný systém neklesajúcich ohraničených postupností má spoločný regulátor konvergencie, tak platí veta o spoločnom regulátore konvergencie, t. j. ak $x_n^m \xrightarrow{(o)} x_m$ $(n \to \infty)$ $(m = 1, 2 \ldots)$ tak existuje spoločný regulátor konvergencie všetkých postupností $\{x_n^m\}$.*

Dôkaz možno previesť podobne ako dôkaz vety 2.

Lema 2. *Z vety o spoločnom regulátore konvergencie vyplýva veta o diagonálnej postupnosti (t. j. táto veta: Ak $x_n^m \xrightarrow{(o)} x_m$ $(n \to \infty)$ a $x_m \xrightarrow{(o)} x$, tak existuje rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{n(m)\}_{m=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n(m)}^m \xrightarrow{(o)} x$ $(m \to \infty)$).*

Dôkaz.(2) Nech u je spoločný regulátor konvergencie postupností $\{x_n^m\}$. Číslo $n(m)$ určme tak, aby $|x_{n(m)}^m - x_m| < 1/mu$, $n(m) > n(i)$, pre $i < m$. Odtiaľ vyplýva, že $x_{n(m)}^m - x_m \xrightarrow{(o)} 0$. Pretože $x_m \xrightarrow{(o)} x$, platí, že $x_{n(m)}^m - x = x_{n(m)}^m - x_m + x_m - x \xrightarrow{(o)} 0$, teda $x_{n(m)}^m \xrightarrow{(r)} (o)\, x$.

(2) Pozri [2], veta VI. 5.3.

Lema 3. *K-priestor spočetného typu, v ktorom platí veta o diagonálnej postupnosti je regulárny.*

Dôkaz. [1], kap. V, veta 1.47.

Dôsledok. *K-priestor spočetného typu (resp. skoro regulárny K-priestor) je regulárny vtedy a len vtedy, ak každý spočetný systém neklesajúcich ohraničených postupností má spoločný regulátor konvergencie.*

LITERATÚRA

[1] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*, Москва 1950.

[2] Вулих Б., *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*, Москва 1961.

Došlo 11. 2. 1967.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

A NOTE ON REGULAR K-SPACES

Beloslav Riečan

Summary

A K-space X is a space of the countable type if and only if it satisfies the following condition (α): For any bounded set E there is a countable subset $F \subset E$ such that $\sup E = \sup F$. A K-space X is almost regular if and only if it satisfies the condition (α) and any non increasing bounded sequence converges with a regulator. A K-space X is regular if and only if it satisfies the condition (α) and any countable family of non increasing bounded sequences posseses a common regulator of convergence.