Matematický časopis

Imrich Komara

Stupeň inverznej krivky v projektívnom priestore Lagrangeových-Sylvestrových polynómov

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 4, 301--305

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126580

STUPEŇ INVERZNEJ KRIVKY V PROJEKTÍVNOM PRIESTORE LAGRANGEOVÝCH–SYLVESTROVÝCH POLYNÓMOV

IMRICH KOMARA, Žilina

V celej práci predpokladáme pevne danú maticu $\mathbf{A} \in GL(n, C)$, $n > 2$, ktorá má n navzájom rôznych charakteristických čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Nech $\mathscr{L}(\mathbf{A})$ je množina všetkých matíc tvaru:

$$\mathbf{X} = \alpha_0 \mathrm{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}, \quad \alpha_i \in C$$

a $\mathscr{S}(\mathbf{A})$, respektíve $\mathscr{R}(\mathbf{A})$ podmnožina množiny $\mathscr{L}(\mathbf{A})$ obsahujúca všetky singulárne, respektíve regulárne matice z $\mathscr{L}(\mathbf{A})$. Teda

$$\mathscr{S}(\mathbf{A}) \cap \mathscr{R}(\mathbf{A}) = \emptyset$$

$$\mathscr{S}(\mathbf{A}) \cup \mathscr{R}(\mathbf{A}) = \mathscr{L}(\mathbf{A}) .$$

Množina $\mathscr{L}(\mathbf{A})$ tvorí vzhľadom na operácie „po súradniciach $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$" n-rozmerný komplexný priestor s privilegovanou bázou

$$\mathscr{A} = \{\mathrm{E}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\} .$$

Tento vektorový priestor je dokonca komutatívnou algebrou vzhľadom na binárnu operáciu „násobenie matíc". Množina $\mathscr{R}(\mathbf{A})$ je podgrupou grupy $GL(n, C)$.

Opísané algebraické štruktúry môžeme geometrizovať. Nech

$$\Phi_{\mathbf{A}} : \mathscr{L}^*(\mathbf{A}) \to P_{\mathbf{A}}^{n-1}, \ \mathbf{X} \mapsto \overline{\mathbf{X}}$$

je kanonická projekcia z $\mathscr{L}^*(\mathbf{A}) = \mathscr{L}(\mathbf{A}) - \{\mathbf{O}\}$, ($\mathbf{O}$ je nulová matica v $\mathscr{L}(\mathbf{A})$), na asociovaný projektívny priestor $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$, ktorého body sú triedy ekvivalencie v $\mathscr{L}^*(\mathbf{A})$ pri ekvivalencii

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \iff \text{existuje } \lambda \in C \text{ tak, že } \mathbf{X} = \lambda \mathbf{Y} .$$

Operácia násobenia matíc sa z $\mathscr{L}(\mathbf{A})$ na $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$ nedá prenášať, lebo množina $\mathscr{L}^*(\mathbf{A})$ nie je voči tejto operácii uzavretá. Grupová štruktúra grupy $\mathscr{R}(\mathbf{A})$

sa však dá previesť pomocou zobrazenia $\Phi_{\mathbf{A}}$ na časť priestoru $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$, lebo pre $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in \mathscr{R}(\mathbf{A})$ platí:

$$\mathbf{X}_1 \sim \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1 \sim \mathbf{Y}_2 \Rightarrow \mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1^{-1} \sim \mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2^{-1} .$$

Teda v $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$ je daná podmnožina $R_{\mathbf{A}} = \Phi_{\mathbf{A}}(\mathscr{R}(\mathbf{A}))$, na ktorej je z $\mathscr{R}(\mathbf{A})$ indukovaná štruktúra grupy. Označme ešte $S_{\mathbf{A}} = P_{\mathbf{A}}^{n-1} - R_{\mathbf{A}}$.

V práci [2] bola dokázaná veta: Ak p je priamka v $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$ neležiaca celá v $S_{\mathbf{A}}$, tak v $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$ existuje algebraická krivka q a spojité bijektívne zobrazenie $\varphi: p \to q$ tak, že pre $\mathbf{X} \in p \cap R_{\mathbf{A}}$ je $q(\overline{\mathbf{X}}) = (\overline{\mathbf{X}^{-1}})$. Krivku q sme nazvali inverznou krivkou priamky p.

V tejto práci vyčerpávajúcim spôsobom odpovedáme na otázku hľadania inverznej krivky q aj pre priamku $p \in S_{\mathbf{A}}$. Určíme algebraické vyjadrenie krivky q a stanovíme jej stupeň.

Najprv preskúmame vzájomnú polohu priamky p a množiny $S_{\mathbf{A}}$. Ďalej predpokladáme, že matica $\mathbf{A}$ je v Jordanovom tvare, t. j. $\mathbf{A} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Vo vektorovom priestore $\mathscr{L}(\mathbf{A})$ existuje okrem privilegovanej bázy ešte ďalšia veľmi dôležitá báza, a to

$$\mathfrak{Z} = \{\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n\} ,$$

kde $\mathbf{Z}_i$ je matica majúca všetky prvky nulové okrem prvku $a_{ii} = 1$. (Túto maticu nazývame i-tý komponent-matica). Teda

$$\mathbf{Z}_i = diag(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) ,$$

(jednička na i-tom mieste).

Geometrický význam bázy $\mathfrak{Z}$ je očividný: singulár $S_{\mathbf{A}}$ priestoru $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$ sa skladá práve z tých bodov $\overline{\mathbf{X}} = \Phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = x^1\mathbf{Z}_1 + \ldots + x^n\mathbf{Z}_n$, pre ktoré platí: $det\, \mathbf{X} = x^1x^2 \ldots x^n = 0$. Teda $S_{\mathbf{A}}$ je množina všetkých bodov ležiacich na stenách simplexu $\{\overline{\mathbf{Z}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{Z}}_n\}$. Čísla $x^1, \ldots, x^n$ sú charakteristické čísla matice $\mathbf{X}$. (To je algebraický význam bázy $\mathfrak{Z}$.) Presnejšie $\mathbf{X} = diag(x^1, \ldots, x^n)$.

Uvažujeme v $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$ priamku $\overline{\mathbf{U}\mathbf{V}}$, kde

$$\mathbf{U} = u^1\mathbf{Z}_1 + \ldots + u^n\mathbf{Z}_n , \quad \mathbf{V} = v^1\mathbf{Z}_1 + \ldots + v^n\mathbf{Z}_n .$$

Bod $\overline{\mathbf{X}} \in \overline{\mathbf{V}\mathbf{U}}$ zapísaný v tvare $\mathbf{X} = t\mathbf{U} + s\mathbf{V}$ leží na $S_{\mathbf{A}}$ práve keď

$$(tu^1 + sv^1)(tu^2 + sv^2) \ldots (tu^n + sv^n) = 0 \tag{1}$$

Pretože body $\overline{\mathbf{U}}$, $\overline{\mathbf{V}}$ sú rôzne, je

$$hod \begin{pmatrix} u^1 & \ldots & u^n \\ v^1 & \ldots & v^n \end{pmatrix} = 2 ,$$

a teda existujú aspoň 2 navzájom nie úmerné riešenia (t_1, s_1), (t_2, s_2) rovnice (1). Odtiaľ vyplýva:

Lema 1. *Priamka* $p \equiv \overline{\mathbf{UV}} \in P^{n-1}_{\mathbf{A}}$ *buď celá náleží do* $S_{\mathbf{A}}$, *buď pretína singulár v* k *bodoch, pričom* $2 \leqq k \leqq n$.

Ďalej symbolom G označíme podgrupu grupy $GL(n, C)$ tvorenú všetkými diagonálnymi maticami. Grupa G pracuje na množine $P^{n-1}_{\mathbf{A}}$ ako transformačná grupa predpisom

$$G \times P^{n-1}_{\mathbf{A}} \to P^{n-1}_{\mathbf{A}},\ (diag\,(g^1, \ldots, g^n), (x^1, \ldots, x^n)) \mapsto (g^1x^1, \ldots, g^nx^n)$$

v reperi $\mathfrak{Z}$.

Nech L je zväz voči inklúzii tvorený všetkými m-rozmernými stenami $(-1 \leqq m \leqq n)$ simplexu $S_{\mathbf{A}}$; špeciálne 0 je nulový prvok zväzu pre $m = -1$ a P^{n-1} je jednotkový prvok zväzu pre $m = n$. Definujeme zobrazenie π: $P^{n-1}_{\mathbf{A}} \to L$ predpisom: $\pi(\overline{\mathbf{M}})$ je najmenší prvok z L obsahujúci celú orbitu $G(\mathbf{M})$ bodu $\overline{\mathbf{M}}$.

Teda ak

$$\mathbf{M} = m^1\mathbf{Z}_1 + \ldots + m^n\mathbf{Z}_n, \quad \text{tak}$$

$$\pi(\mathbf{M}) = \{x^1m^1\mathbf{Z}_1 + \ldots + x^nm^n\mathbf{Z}_n, x^i \in C\}\,.$$

Pomocou uvedených pojmov je možné zaviesť unárnu operáciu σ: $P^{n-1}_{\mathbf{A}} \to P^{n-1}_{\mathbf{A}}$ (nazveme ju relatívne invertovanie matíc) takto: Ak $\mathbf{X} = x^1\mathbf{Z}_1 + \ldots + x^n\mathbf{Z}_n$ je matica, potom vypustením nulových súradníc môžeme ju v podpriestore $\pi(\mathbf{X})$ písať v tvare

$$\mathbf{X} = x^{i_1}\mathbf{Z}_{i_1} + \ldots + x^{i_m}\mathbf{Z}_{i_m}, \quad x^{i_1} \ldots x^{i_m} \neq \emptyset.$$

Nech $\mathbf{X}^* = \dfrac{1}{x^{i_1}}\mathbf{Z}_1 + \ldots + \dfrac{1}{x^{i_m}}\mathbf{Z}_m$. Položme $\sigma(\overline{\mathbf{X}}) = \overline{\mathbf{X}}^*$. Špeciálne ak $\mathbf{X} \notin S_{\mathbf{A}}$, tak $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^{-1}$. Uvažujme priamku p a označme $\pi(p) = \{\pi(\overline{\mathbf{X}}), \overline{\mathbf{X}} \in p\}$, $\delta(p) = dim\,\pi(p)$, $\varkappa(p) = card\,\{\overline{\mathbf{X}} \in p,\ hod\ \mathbf{X} < \delta(p)\}$.

Lema 2. *Existuje* $\overline{\mathbf{M}} \in p$ *tak, že* $\pi(\overline{\mathbf{M}}) = \pi(p)$.

Dôkaz očividný.

Veta 1. *Nech* p *je priamka, potom existuje krivka* q *stupňa* $\varkappa(p) - 1$ *a bijektívne zobrazenie*

$$\sigma_p : p \to q$$

tak, že platí $\overline{\mathbf{X}} \in p$, $\pi(\overline{\mathbf{X}}) = \pi(p) \Rightarrow \sigma(\overline{\mathbf{X}}) = \sigma_p(\overline{\mathbf{X}})$.

Dôkaz. Nech $p \equiv \overline{\mathbf{UV}}$. Dokážeme najskôr, že veta platí pre prípad $\pi(p) = P^{n-1}_{\mathbf{A}}$. Nech $\mathbf{X} = t\mathbf{U} + s\mathbf{V}$, kde $\overline{\mathbf{X}}$ má súradnice $x^i = tu^i + sv^i$. Nech rovnica (1) má $\varkappa(p)$ rôznych koreňov. Keďže $\pi(p) = \mathrm{P}^{n-1}_{\mathbf{A}}$, všetky korene sú jednoduché, okrem jedného, ktorý je $n - \varkappa(p) + 1$ násobný. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že korene rovníc

$$tu^1 + sv^1 = 0, \ldots, tu^{\varkappa(p)-1} + sv^{\varkappa(p)-1} = 0$$

sú jednoduché a rovnice

$$tu^{\varkappa(p)} + sv^{\varkappa(p)} = 0, \ldots, tu^n + sv^n = 0$$

majú spoločné riešenie. Potom

$$\begin{aligned} tu^{\varkappa(p)+1} + sv^{\varkappa(p)+1} &= k_1(tu^{\varkappa(p)} + sv^{\varkappa(p)}) \\ tu^{\varkappa(p)+2} + sv^{\varkappa(p)+2} &= k_2(tu^{\varkappa(p)} + sv^{\varkappa(p)}) \\ &\ldots \\ tu^n + sv^n &= k_{n-\varkappa(p)}(tu^{\varkappa(p)} + sv^{\varkappa(p)}), \end{aligned} \tag{2}$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_{n-\varkappa(p)} \in C$.

Uvažujeme krivku q:

$$\begin{aligned} y_1 &= b(tu^2 + sv^2) \ldots (tu^{\varkappa(p)} + sv^{\varkappa(p)}) \\ y_2 &= b(tu^1 + sv^1)(tu^3 + sv^3) \ldots (tu^{\varkappa(p)} + sv^{\varkappa(p)}) \\ &\ldots \\ y_{\varkappa(p)} &= b(tu^1 + sv^1) \ldots (tu^{\varkappa(p)-1} + sv^{\varkappa(p)-1}) \\ y_{\varkappa(p)+1} &= b_1(tu^1 + sv^1) \ldots (tu^{\varkappa(p)-1} + sv^{\varkappa(p)-1}) \\ &\ldots \\ y_n &= b_{n-\varkappa(p)}(tu^1 + sv^1) \ldots (tu^{\varkappa(p)-1} + sv^{\varkappa(p)-1}), \end{aligned} \tag{3}$$

kde $b = k_1k_2 \ldots k_{n-\varkappa(p)}$, $b_1 = k_2 \ldots k_{n-\varkappa(p)}, \ldots,$ $b_{n-\varkappa(p)} = k_1k_2 \ldots k_{n-\varkappa(p)-1}$. Z (3) vyplýva, že každému bodu $\mathbf{X}$ priamky p je priradený bod krivky q, ktorá je stupňa $\varkappa(p) - 1$. Očividne toto zobrazenie je bijekcia, ktorú označíme σ_p. Nech $\pi(\mathbf{X}) = \pi(p)$; potom $x^i = tu^i + sv^i \neq 0$, preto $\sigma(\mathbf{X})$ má súradnice $z^i = \frac{1}{x^i}$ alebo po úprave

$$z_i = (tu^1 + sv^1) \ldots (tu^{i-1} + sv^{i-1})(tu^{i+1} + sv^{i+1}) \ldots (tu^n + sv^n),$$

čo použitím (2) dáva

$$\begin{aligned} z^1 &= y^1 \\ &\ldots \\ z^n &= y^n \end{aligned}$$

teda $\sigma_p(\mathbf{X}) = \sigma(\mathbf{X})$.

Nech $\pi(p) \subset P^{n-1}_{\mathbf{A}}$. Pretože štruktúra $P^{n-1}_{\mathbf{A}}$ je dedičná, správnosť vety 1 vyplýva z reštrikcie priestoru $P^{n-1}_{\mathbf{A}}$ na $\pi(p)$.

Poznámka 1. Číslo $\varkappa(p)$ definované vyššie a pojem s-úmernosti matíc z práce [2] sú úzko viazané takto:

Ak $\overline{\mathbf{U}}$, $\mathbf{V}$ sú dva rôzne body priamky p, tak matice $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ sú práve $\varkappa(p)$ — úmerné.

Dôkaz tohto tvrdenia vyplýva z jednoduchej úvahy o matici

$$\begin{pmatrix} u^1 & \dots & u^n \\ v^1 & \dots & v^n \end{pmatrix}.$$

LITERATÚRA

[1] KOMARA, I.: Projektívny priestor Lagrange—Sylvestrových polynómov. In: Sborník prací VŠD a VÚD, č. 44, 1971.

[2] KOMARA, I.: Aplikácie projektívneho priestoru Lagrange—Sylvestrových polynómov. In: Sborník prací VŠD a VÚD, č. 44, 1971.

Došlo 22. 3. 1971

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vysoká škola dopravná v Žiline,
Strojno-elektrotechnická fakulta

ПОРЯДОК ОБРАТНОЙ КРИВОЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА—СИЛЬВЕСТРА

Имрих Комара

Резюме

Пусть C — поле комплексных чисел. Пусть $\mathbf{A}$ — невырожденная матрица над C, собственные числа которой только простые. Обозначим $\mathscr{L}(\mathbf{A})$ коммутативную алгебру матриц

$$\mathbf{X} = \alpha_0\mathbf{E} + \alpha_1\mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}, \qquad \alpha_i \in C$$

и $P_{\mathbf{A}}^{n-1}$ проективное пространство, присоединенное к $\mathscr{L}(\mathbf{A})$. Пусть $p \equiv \overline{\mathbf{X}} = t\mathbf{U} + s\mathbf{V}$ — прямая, где $\mathbf{U}$, $\mathbf{V} \in \mathscr{L}(\mathbf{A})$, t, $s \in C$. В этой работе установлен порядок кривой $(\mathbf{X}^{-1})$.