Jaroslav Krbiľa

Структурные формулы квадратичных функционалов

Matematický časopis, Vol. 23 (1973), No. 4, 356--363

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126570

Matematický časopis 23 (1973), No. 4

СТРУКТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

ЯРОСЛАВ КРБИЛЯ, Жилина

§1. Введение

Пусть даны однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$(pq) \qquad (py')' + qy = 0, \qquad (y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$$

$$(PQ) \qquad (PY^{\cdot})^{\cdot} + QY = 0, \qquad (Y^{\cdot} = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}T)$$

коэффициенты которых $p \in C_1(j)$, $P \in C_1(J_0)$, $q \in C_0(j)$, $Q \in C_0(J_0)$, $p \neq 0$, $P \neq 0$ для всех $t \in j$, $T \in J_0$, где j, J_0 суть какие-нибудь интервалы.

Замечаем, что символ $C_k(M)$, k-целое неотрицательное число, обозначает множество всех вещественных функций, непрерывных вместе со своими производными включительно до порядка k на множестве M.

Известно, что дифференциальное уравнение (pq), (PQ) *является дифференциальным уравнением Эйлера для квадратичного функционала с ядром* $py'^2 - qy^2$, $PY^{\cdot 2} - QY^2$.

Главным мотивом этой статьи является применение преобразования дифференциальных уравнений (pq), (PQ) для нахождения явных выражений структурных формул определенных квадратичных функционалов вида:

$$(f) \qquad f(y; a, b) = \int_a^b [py'^2 - qy^2]\, \mathrm{d}t,$$

$a, b \in j$, $a < b$. Интеграл во функционале (f) понимается в смысле Римана.

Нетривиальное решение $y \in C_2([a, b])$ дифференциального уравнения (pq) называется *экстремалью функционала* (f).

Функция y, которая имеет свойство $y \in C_1([a, b])$, $y \not\equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, называется *допустимой функцией функционала* (f).

Пусть функции h, $H \in C_2(j)$, $hH' \neq 0$ для всех $t \in j$. Преобразованием дифференциального уравнения (pq) при помощи подстановки $y(t)$ —

— $h(t)Y[H(t)]$ мы получаем дифференциальное уравнение (PQ), коэффициенты которого на интервале $J = H(j)$ даны соотношениями:

$$P(T) = p(t)H'(t)h^2(t),$$
$$Q(T) = [(p(t)h'(t))' + q(t)h(t)]h(t)/H'(t), \tag{1}$$

где $t = H_{-1}(T)$, $H_{-1}(T)$ является обратной функцией к функции $H(t)$.

Вышеприведённое преобразование называется в литературе *преобразованием Кумера* (см., напр., [6]).

В дальнейшем, когда мы будем предполагать, что функции h, H имеют свойство: $H, h \in C_2([a, b])$, производная $H' > 0$ и $h \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$, вкратце будем говорить, что *функции H, h имеют свойство C*.

Мы будем часто встречаться с функционалом:

$$F(Y; H(a), H(b)) = \int_{H(a)}^{H(b)} [PY'^2 - QY^2]\, \mathrm{d}T, \tag{F}$$

$[H(a), H(b)] \subset J$ и предполагать, что функции P, Q определены соотношениями (1).

Очевидно, верны следующие утверждения.

Если функции H, h обладают свойством C и функция Y является допустимой функцией или экстремалью функционала (F), то функция:

$$y(t) = h(t)Y[H(t)] \tag{2}$$

является допустимой функцией или экстремалью функционала (f) и обратно, если функция y является допустимой функцией или экстремалью функционала (f), то функция:

$$Y(T) = y[H_{-1}(T)]/h[H_{-1}(T)] \tag{3}$$

является допустимой функцией или экстремалью функционала (F).

Допустимая функция y функционала (f), построенная по формуле (2), имеет нуль $t_0 \in [a, b]$ в том и только в том случае, когда $T_0 = H(t_0) \in [H(a), H(b)]$ есть нуль допустимой функции Y функционала (F).

Пусть для экстремали y имеет место $y(t) = 0$. Обозначим символом $\varphi_0(t)$ этот нуль экстремали y и символом $\varphi_i(t)$ i-тый, следующий справа, нуль экстремали y за $\varphi_0(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, при условии, что эти нули существуют.

Лемма 1. *Пусть во функционале (f) функция $p > 0$ для всех $t \in [a, b]$. Если $b \in (\varphi_{n-1}(a), \varphi_n(a))$, то квадратичный функционал положительно определен для всех допустимых функций y таких, что $y[\varphi_i(a)] = y(b) = 0$, i $0, 1, \ldots, n-1$, где n есть натуральное число. Если $b = \varphi_n(a)$, то функционал (f) неотрицателен для всех вышеприведённых допустимых функций и экстремум — минимум, равный нулю, достигается на до-*

пустимой функции y тогда и только тогда, когда y является экстремалью функционала (f).

Утверждение этой леммы следует из теоремы 2 и теоремы 1 из работы [4].

§2. Связь между значениями функционалов (f), (F)

Теорема 1. *Пусть функции H, h обладают свойством C и пусть y является допустимой функцией функционала* (f), *построенной посредством допустимой функции Y функционала* (F) *по соотношению* (2). *Тогда для значений функционалов* (f), (F) *имеет место равенство*:

$$F(Y;\, H(a),\, H(b)) = f(y;\, a,\, b) - [p(t)y^2(t)h'(t)/h(t)]_a^b\,. \tag{4}$$

Доказательство. Сделав замену переменной интегрирования $T = H(t)$ в (F) и преобразывав подинтегральное выражение по соотношениям (1) и (3), получим равенство (4).

Из утверждения теоремы 1 немедленно следует:

Следствие. *Пусть функции H, h имеют свойство C. Для того чтобы значения функционалов* (F), (f) *на допустимых функциях, которые связаны по формуле* (2), *равнялись, необходимо и достаточно, чтобы имело место*:

$$[p(t)y^2(t)h'(t)/h(t)]_a^b = 0\,. \tag{5}$$

Замечание 1. Ясно, что условие (5) исполняется в том случае, когда рассматриваются функционалы (f), (F) на допустимых функциях y, Y, связанных по формуле (2) с закрепленными нулевыми концами.

Замечание 2. В частности пусть $p \equiv 1$, $P \equiv 1$ во функционалах (f), (F) и функция $H \in C_3([a, b])$, $H' > 0$ для всех $t \in [a, b]$. *Тогда функция* $h = 1/\sqrt{H'}$, и мы получаем *преобразование Борувки* (см. [1]) Эйлеровых уравнений функционалов (f), (F), которые в этом случае являются дифферунциальными уравнениями типа Якоби. Из теоремы 1 вытекает соотношение:

$$f(y;\, a,\, b) = F(Y;\, H(a),\, H(b)) + [(1/2H'(t))'Y^2[H(t)]]_a^b\,,$$

которое является результатом теоремы 2 из работы [5].

§3. Структурные формулы функционалов (f)

Результат теоремы 1 и её следствия используем для явного выражения определенных квадратичных функционалов (f).

Теорема 2. *Пусть функции H, h имеют свойство C и пусть функция $P(T) \in C_1([H(a), H(b)])$. Если имеет место:*

$$p(t) = P[H(t)]/H'(t)h^2(t), \quad q(t) = -[p(t)h'(t)]'/h(t) \tag{6}$$

для всех $t \in [a, b]$, то в случае, когда для всех $t \in [a, b]$ $p > 0$, или $p < 0$, функционал (f) положительно или отрицательно определен для всех допустимых функций y таких, что $y(a) = y(b) = 0$.

Доказательство. Пусть функции p, q имеют вид (6) и пусть y является такой произвольной допустимой функцией функционала (f), что $y(a) = y(b) = 0$. Возьмем функцию Y, сконструированную по соотношению (3). Эта функция не является постоянной функцией на отрезке $[H(a), H(b)]$, потому, что в противном случае вышеприведённая допустимая функция $y \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, а это невозможно. Функция Y является допустимой функцией функционала (F), в котором функция $Q \equiv 0$ на отрезке $[H(a), H(b)]$, потому, что функции H, h реализуют преобразование дифференциальных уравнений (pq), (PQ), что видно из соотношений (1), из которых при условии $Q \equiv 0$ на отрезке $[H(a), H(b)]$ получаем формулы (6). Допустимая функция Y функционала (F), о которой была речь, удовлетворяет условиям $Y[H(a)] = Y[H(b)] = 0$. Очевидно, что допустимые функции y, Y связаны соотношением (2) и в силу замечания 1 имеет место:

$$f(y;\, a, b) = F(Y;\, H(a), H(b)) = \int_{H(a)}^{H(b)} P(T) Y^{\cdot 2}\, \mathrm{d}T. \tag{7}$$

Отсюда, ввиду того, что Y не является постоянной функцией и $\operatorname{sgn} p(t) = -\operatorname{sgn} P[H(t)]$ для всех $t \in [a, b]$, получаем $f(y;\, a, b) > 0$, или $f(y;\, a, b) < 0$ в зависимости от того, является — ли $p > 0$, или $p < 0$ для всех $t \in [a, b]$.

Теорема 3. *Пусть функции H, h обладают свойством C и пусть для всех $t \in [a, b]$ имеет место:*

$$p(t) = 1/H'(t)h^2(t), \quad q(t) = -H'(t)/h^2(t) - [p(t)h'(t)]'/h(t)\,. \tag{8}$$

Тогда функционал (f) положительно определен для всех допустимых функций y, удовлетворящих условиям $y(a) = y(b) = 0$.

Доказательство. Идея доказательства подобна доказательству теоремы 2. Выбором функций $P \equiv -Q \equiv 1$ на отрезке $[H(a), H(b)]$ мы получаем из соотношений (1) условия (8), а вместо равенства (7) получаем:

$$f(y;\, a, b) = F(Y;\, H(a), H(b)) = \int_{H(a)}^{H(b)} [Y^{\cdot 2} + Y^2]\, \mathrm{d}T,$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть функции H, h обладают свойством C и пусть $(n-1)\pi < H(b) - H(a) < n\pi$, n — натуральное число. Если для всех $t \in [a, b]$ имеет место:*

$$(9) \qquad p(t) = 1/H'(t)h^2(t), \quad q(t) = H'(t)/h^2(t) - [p(t)h'(t)]'/h(t),$$

то функционал (f) положительно определен для всех допустимых функций y, которые удовлетворяют условиям $u[\varphi_i(a)] = u(b) = 0$, $t = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Выбором функций $P \equiv Q \equiv 1$ на отрезке $[H(a), H(b)]$ получаем точно так же, как и выше, вместо равенства (7):

$$(10) \qquad f(y; a, b) - F(Y; H(a), H(b)) = \int_{H(a)}^{H(b)} [Y'^2 - Y^2]\,\mathrm{d}T.$$

Экстремалью Y последнего функционала, которая удовлетворяет условию $Y[H(a)] = 0$, является экстремаль $Y(T) = \sin[T - H(a)]$. Из предположения $(n-1)\pi < H(b) - H(a) < n\pi$ ясно, что $H(b) \in (\varphi_{n-1}(a), \varphi_n(a))$. Из этого факта и утверждения леммы 1 получаем в соотношении (10) неравенство $f(y; a, b) > 0$ и теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть функции H, h обладают свойством C и пусть $H(b) = H(a) + n\pi$, n — натуральное число. Пусть функции p, q имеют вид (9). Тогда функционал (f) неотрицателен для всех допустимых функций y, удовлетворяющих условиям $y[\varphi_i(a)] = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и минимум, равный нулю, достигается на экстремалях $y(t) = kh(t)\sin[H(t) - H(a)]$, где $k \neq 0$ есть произвольная постоянная.*

Доказательство. Точно так же, как и в доказательстве теоремы 4, мы получаем равенство (10). В силу предположения $H(a) + n\pi \quad H(b)$ имеет место $H(b) = \varphi_n[H(a)]$, и из леммы 1 получаем доказательство теоремы. Экстремаль, упомянутую в теореме, получаем преобразованием экстремали $Y(T) = k\sin[T - H(a)]$.

§4. Квадратичный функционал с ядром $[py' - qy]^2$

В этой части мы будем рассматривать функционал вида:

$$(\bar{f}) \qquad \bar{f}(y; a, b) = \int_a^b [py' - qy]^2\,\mathrm{d}t,$$

a, b — вещественные числа, $a < b$.

Мы будем исследовать функционал $(\bar{f})$ на множестве допустимых функций, которые определяем также, как и во введении допустимые функции функционала (f).

Ядро функционала $(\bar{f})$ мы можем писать как $p^2y'^2 - pq(y^2)' + q^2y^2$.

Если функции $p, q \in C_1([a, b])$, $p \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$, то с помощью интегрирования по частям получаем:

$$(11) \qquad \bar{f}(y; a, b) = \int_a^b [p^2 y'^2 + ((pq)' + q^2) y^2]\, \mathrm{d}t - [pqy^2]_a^b .$$

Отсюда видно, что функционал $(\bar{f})$ можно перевести на функционал вида (f), например, в следующих случаях:

(а) Если функционал $(\bar{f})$ исследуется на множестве всех допустимых функций y, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = y(b) = 0$.

(б) Если функционал $(\bar{f})$ исследуется на множестве всех допустимых функций y, у которых закреплен только один конец $y(a) = 0$, или $y(b) = 0$ и одновременно функция q имеет нуль в точке b или в точке a.

(в) Если функционал $(\bar{f})$ исследуется на множестве произвольных допустимых функций при условии, что функция q удовлетворяет краевым условиям $q(a) = q(b) = 0$.

Теорема 6. *Если функции $p, q \in C_0([a, b])$, то функционал $(\bar{f})$ положительно определен для всех допустимых функций y, за исключением функций $y = k\exp[\int(q/p)\,\mathrm{d}t]$, где $k \neq 0$ — произвольная постоянная.*

Доказательство. Для всякой допустимой функции y имеет место неравенство $\bar{f}(y; a, b) \geqq 0$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда допустимая функция y функционала $(\bar{f})$ является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка $py' - qy = 0$, общее решение которого имеет вид $y = k \exp[\int(q/p)\,\mathrm{d}t]$. Теорема доказана.

Следствие. *Если функции $p, q \in C_0([a, b])$, то функционал $(\bar{f})$ положительно определен для всех допустимых функций y, удовлетворяющих условию $y(a) = 0$, или $y(b) = 0$.*

Доказательство (от противного). Если для допустимой функции y, которая удовлетворяет условию $y(a) = 0$, или $y(b) = 0$, имеет место $\bar{f}(y; a, b) = 0$, то $y \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, а это невозможно.

Лемма 2. *Пусть функция $q \in C_0([a, b])$, $p \in C_1([a, b])$ и $p > 0$ для всех $t \in [a, b]$. Для того чтобы функционал (f) был положительно определен для всех допустимых функций y, удовлетворяющих краевым условиям $y(a) = y(b) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальное уравнение (pq) было дисконъюгованно на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство этого утверждения находится, например, в [2, V., §22, стр. 110].

Теорема 7. *Пусть $p, q \in C_1([a, b])$, $p \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$. Тогда дифференциальное уравнение:*

$$(12) \qquad (p^2 y')' - [(pq)' + q^2] y = 0$$

является дисконъюгованным уравнением на отрезке $[a, b]$ *и его общее решение имеет вид:*

$$y = \{c_1 \int [(\exp [-2 \int (q/p)\,\mathrm{d}t])/p^2]\,\mathrm{d}t + c_2\} \exp [\int (q/p)\,\mathrm{d}t],$$

c_1, c_2 — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Первую часть утверждения теоремы получаем из следствия теоремы 6 и утверждения леммы 2, так как дифференциальное уравнение (12) является Эйлеровым уравнением функционала $(\bar{f})$, рассматриваемого на множестве всех допустимых функций y, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = y(b) = 0$, что видно из соотношения (11). При помощи преобразования $y(t) = Y(t) \exp [\int (q/p)\,\mathrm{d}t]$ получим из дифференциального уравнения (12) дифференциальное уравнение $(p^2 Y')' + 2pqY' = 0$. Из решения этого уравнения, которое найдем методом понижения порядка, получаем в теореме приведенное общее решение уравнения (12).

В заключение сделаем следующее замечание. Дифференциальное уравнение (12) не находится в книге [3]. При помощи теоремы 7 можно специальным выбором функций p, q конструировать линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, дисконъюгованные на отрезке $[a, b]$, и их общие решения. Например, если в уравнении (12) $p \equiv 1$ на отрезке $[a, b]$, то получим дифференциальное уравнение, которое находится в [3, стр. 417] под номером 2.29 и в случае $p = t$, q — постоянная функция на отрезке $[a, b]$, то получим линейное дифференциальное уравнение Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

[1] BORŮVKA, O.: Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung. Berlin 1967.

[2] ГЕЛЬФАНД, И. М., ФОМИН, С. В.: Вариационное исчисление. Москва 1961.

[3] KAMKE, E.: Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. (Русский перевод.) Москва 1965.

[4] KRBIĽA, J.: Kvadratické funkcionály s Eulerovou rovnicou $(py')' + qy = 0$. Acta Univ. Palackianae Olomucensis (В печати.)

[5] KRBIĽA, J.: Vyšetrovanie kvadratických funkcionál pomocou transformácie lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu. Sborník prací VŠD a VÚD, *44* 1971, 5—17.

[6] WILLETT, D.: Classification of Second Order Linear Differential Equations with Respect to Oscillation. Advances Math., Vol. *3*, *4*, 1969, 594—623.

Поступило 14. 8. 1972

Katedra matematiky
Fakulty strojno-elektrotechnickej
Vysokej školy dopravnej
Žilina

STRUCTURAL FORMULAE OF THE QUADRATIC FUNCTIONALS

Jaroslav Krbiľa

Summary

In paper there is investigated (theorem 1) the relation between values of the functionals:

$$(f) \qquad f(y; a, b) = \int_a^b [py'^2 - qy^2] \, dt \,,$$

$$(F) \qquad F(Y; H(a), H(b)) = \int_{H(a)}^{H(b)} [PY^{\cdot 2} - QY^2] \, dT \,,$$

on admissible functions y, Y, for which there holds $y(t) = h(t) Y[H(t)]$, where by the functions h, H realize the Kummer transformation of Euler's differential equations:

$$(py')' + qy = 0, \qquad (PY^{\cdot})^{\cdot} + QY = 0$$

of the functionals (f), (F). By using the structural formulae of the definite (Theorems 2, 3, 4) and non-negative (Theorem 5) functionals (f) are deduced by a special choice of the functions P, Q. The functionals of the following form are also investigated:

$$\bar{f}(y; a, b) = \int_a^b [py' - qy]^2 \, dt \,,$$

their positive definiteness (Theorem 6), by means of which there is found a certain class (Theorem 7) of the linear differential equation of the 2nd order disconjugate in the interval $[a, b]$.