Jaromír Zezula

Metrická charakterisace zborcené plochy s fleknodální čarou nevlastní

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 6 (1956), No. 4, 205--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126514

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, VI, 4 — 1956

METRICKÁ CHARAKTERISACE ZBORCENÉ PLOCHY S FLEKNODÁLNÍ ČAROU NEVLASTNÍ

JAROMÍR ZEZULA, BRNO

Prof. dr Jiří Klapka v článku: Příspěvek k metrické theorii zborcených ploch, Sborník vysoké školy technické v Brně, 1937, určuje podmínky,[1] za kterých přímka

$$\mathfrak{G} = G_1\mathfrak{A}_1 + G_2\mathfrak{A}_2 + G_3\mathfrak{A}_3,$$

kde

$$G_i = g_i + \varepsilon \bar{g}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

a

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1,$$
$$g_1\bar{g}_1 + g_2\bar{g}_2 + g_3\bar{g}_3 = 0$$

je asymptotickou tečnou zborcené plochy $\mathfrak{A}(t)$ ve tvaru (v pojednání rovnice 9a, b, c, d):

$$\bar{g}_2 = -\frac{\bar{p}}{p}\, g_2,$$

$$g_3\bar{g}_3 = -g_2\bar{g}_2,$$

$$g_3\bar{g}_3 = \frac{\bar{p}}{p}\, g_2^2,$$

$$qpg_2^2 + (\bar{p}q + p\bar{q})\, g_3^2 - 2p\bar{p}\, g_1g_3 + \frac{1}{p}(p\bar{p}' - p'\bar{p})\, g_2g_3 = 0.$$

Označme $\frac{g_3}{g_2} = r$. Pak asymptotická tečna zborcené plochy $\mathfrak{A}(t)$ v bodě $(r; 0; 0; 1)$, různá od tvořící přímky, má Plückerovy souřadnice:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{pq}{2p^2}\, r^2 + \frac{p\bar{p}' - \bar{p}p'}{2pp^2}\, r + \frac{\bar{p}q + p\bar{q}}{2p\bar{p}}; \qquad g_2 = \frac{p}{\bar{p}}\, r; \qquad g_3 = 1; \\ \bar{g}_1 &= 0; \qquad \bar{g}_2 = -r; \qquad \bar{g}_3 = \frac{\bar{p}}{p}\, r^2. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Mění-li se r při pevném t, vytvoří přímky (1) oskulační hyperboloid, jehož bodová rovnice je

$$qx_2^2 + \frac{\bar{p}q + p\bar{q}}{\bar{p}}\, x_3^2 - 2px_1x_3 + \frac{p\bar{p}' - \bar{p}p'}{p\bar{p}}\, x_2x_3 + 2\bar{p}x_2x_1 = 0. \qquad (2)$$

[1] V invariantech Blaschkovy theorie (viz Blaschke, *Differentialgeometrie* I, 3. vyd., 1930).

Má-li plocha řídící rovinu, pak $q = 0$ a oskulační hyperboloid je paraboloidem. Vyloučíme-li tento případ, lze uvést rovnici (2) na tvar

$$\frac{x_1^2}{\dfrac{p^2}{q\varrho_1}} + \frac{x_2^2}{\dfrac{p^2}{q\varrho_2}} + \frac{x_3^2}{\dfrac{q^2}{q\varrho_3}} = 1, \tag{3}$$

kde $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\varrho^3 - \frac{2pq + pq}{p}\varrho^2 - \left[p^2 + \frac{(pp' - pp')^2}{4p^2p^2} - \frac{q}{p}(pq + pq)\right]\varrho - p^2q = 0. \tag{4}$$

Označíme-li a, b, c poloosy oskulačního hyperboloidu (jedna z nich má záporný čtverec), pak

$$a^2b^2c^2 = \frac{p^6}{q^3\varrho_1\varrho_2\varrho_3} = -\left(\frac{p^3}{pq^2}\right)^2. \tag{5}$$

Plochy, jejichž invarianty p, p, q splňují podmínku $\frac{p^3}{pq^2} =$ konst. *mají konstantní součin poloos oskulačních hyperboloidů.*

Přímka (8) je *fleknodální asymptotickou tečnou*, t. j. asymptotickou tečnou se čtyřbodovým stykem s plochou, splňují-li její Plückerovy souřadnice rovnici (11) citovaného pojednání:

$$-3(pp' + pp')\,g_1g_3 + \left[\frac{pp'' - p''p}{p} - 2p(qq + pp)\right]g_2g_3 -$$
$$+ (2p'q + pq')\frac{p}{p}\,g_2^2 + (2p'q + 2p'q + pq' + pq')\,g_3^2 = 0.$$

Dosadíme-li sem Plückerovy souřadnice (1) asymptotické tečny, obdržíme kvadratickou rovnici pro r:

$$A + 2Br + Cr^2 = 0, \tag{6}$$

kde

$$A = pp^2\left[pq\left(\log\frac{pq^2}{p^3}\right)' + pq\left(\log\frac{pq^2}{p^3}\right)''\right],$$

$$B = pp(pp'' - pp'') - \frac{3}{2}(p^2p'^2 - p^2p'^2) - 2p^3p(pp - qq),$$

$$C = p^3pq\left(\log\frac{pq^2}{p^3}\right)'.$$

Rovnice (6) určuje na tvořící přímce zborcené plochy *vzdálenosti dvou fleknodů od centrálního bodu této přímky*. Jestliže $C = 0$, splyne jedna část fleknodální čáry s nevlastní čarou plochy. To nastane vždy, když $q = 0$, t. j. když plocha

$\mathfrak{A}(t)$ má řídící rovinu. Vyloučíme-li tento známý případ, pak — ježto $ppq \neq 0$ — nutná a postačující podmínka pro nevlastní fleknodální čáru je

$$\frac{pq^2}{p^3} = \text{konst}.$$

Srovnáním (5) a (7) vychází věta:

Nevlastní čára zborcené plochy je její fleknodální křivkou tehdy a jen tehdy, je-li součin poloos jejího oskulačního hyperboloidu konstanta různá od nuly.

Došlo 11. VI. 1956.

МЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОСОЙ ПОВЕРХНОСТИ С НЕСОБСТВЕННОЙ ФЛЕКНОДАЛЬНОЙ КРИВОЙ

ЯРОМИР ЗЕЗУЛА

Выводы

В статье доказывается теорема: несобственная кривая косой поверхности является ей флекнодальной кривой тогда и только тогда, когда произведение полуосей ее гиперболоида соприкосновения является постоянной отличной от нуля.

METRISCHE CHARAKTERISATION EINER WINDSCHIEFEN REGELFLÄCHE MIT UNEIGENTLICHER FLEKNODALKURVE

JAROMÍR ZEZULA

Zusammenfassung

Es wurde folgender Satz bewiesen: Die uneigentliche Kurve einer windschiefen Regelfläche ist ihre Fleknodalkurve dann und nur dann, wenn das Produkt der Halbachsen ihres Oskulationshyperboloides konstant ist.