Oto Obůrka

K studiu jisté třídy kinematicky vytvořených přímkových ploch

Matematický časopis, Vol. 18 (1968), No. 3, 177--200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126471

Matematický časopis 18 (1968), No. 3

K STUDIU JISTÉ TŘÍDY KINEMATICKY VYTVOŘENÝCH PŘÍMKOVÝCH PLOCH

OTO OBŮRKA, Brno

1. ÚVOD

VYJÁDŘENÍ POHYBU

V poslední době objevuje se stále více prací věnovaných teorii kmitání, což je vyvoláváno rostoucími rychlostmi a rozměry strojů, aplikacemi kmitavého pohybu v dopravě sypkých a kusových materiálů, při rozrušování zemin, zatloukání pilotů a při mnoha různých pochodech strojní, stavební a elektrotechnické praxe.

Předmětem této práce je studium některých geometrických vlastností přímkových ploch, vznikajících šroubovým pohybem přímky při současném tlumeném harmonickém kmitání ve směru osy šroubového pohybu a studium křivek, které jsou vytvářeny body při tomto pohybu. Mnohé nalezené vlastnosti vztahují se i na přímkové plochy, kde se šroubový pohyb skládá s vynuceným kmitáním nebo s vynuceným kmitáním tlumeným. Z hlediska kinematického lze tedy hovořit o tlumeném harmonickém kmitání soustav s jedním stupněm volnosti, které konají vlastní nebo vynucené tlumené kmity.

Nejprve vyjádřím tlumený pohyb kmitavě šroubový, který je vytvářecím pohybem studovaných křivek a ploch. Osu O_z pravoúhlé souřadnicové soustavy v prostoru E_3 zvolíme za osu šroubového pohybu, takže daný bod B s výchozí polohou $(r, 0, 0)$ se bude šroubovat na rotační válcové ploše $x^2 + y^2 = r^2$ a vykonávat přitom tlumený harmonický pohyb. Oba pohyby lze vyjádřit parametrickými rovnicemi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \,.\, v_0\varphi \tag{1.1}$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = ae^{q\varphi} \sin n\varphi. \tag{1.2}$$

Parametrické rovnice křivky K výsledného tlumeného kmitavě šroubového pohybu lze při vhodně volené fázi kmitání, bez újmy obecnosti, psát v jednoduché formě

$$(1.3) \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = ae^{q\varphi}\sin n\varphi + v_0\varphi,$$

kde φ je parametr rotačního pohybu, v_0 parametr šroubového pohybu, r poloměr výše uvedené rotační válcové plochy, a počáteční amplituda, $n > 0$ frekvence tlumeného kmitání, q je konstanta útlumu, jejíž velikost má podstatný vliv na vzniklý pohyb; pro tlumený pohyb musí být její hodnota záporná $q < 0$. Amplituda tlumeného harmonického pohybu pak není stálá a zmenšuje se s parametrem φ rostoucím od nuly, takže volíme $\varphi \in \langle 0, \infty)$.

2. KOMPLANOVANÉ KŘIVKY TLUMENÉHO KMITAVĚ ŠROUBOVÉHO POHYBU

Rozvineme-li uvažovanou válcovou plochu, přechází prostorová křivka K v rovinnou křivku $\bar{K}$

$$(2.1) \qquad x = r\,.\,\varphi, \quad z = ae^{q\varphi}\sin n\varphi + v_0\varphi$$

(Pro zjednodušení zápisu budeme označovat $ae^{q\varphi}\sin n\varphi + v_0\varphi = \eta$) jež je vepsána do rovinné oblasti, omezené křivkami

$$(2.2) \qquad x = r\varphi, \quad z = \pm ae^{q\varphi} + v_0\varphi,$$

které jsou afinní s exponenciálními křivkami

$$(2.3) \qquad x = r\varphi, \quad z = \pm ae^{q\varphi}.$$

Vyjádření těchto křivek můžeme zjednodušit bez újmy obecnosti předpokladem $r = 1$.

Derivace (2.1) podle φ

$$(2.4) \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = ae^{q\varphi}(q\sin n\varphi + n\cos n\varphi) + v_0$$

(pro tento výraz zavedeme zkrácené označení η') určuje směrnici tečny v obecném bodě φ, takže křivka nabývá extrémních hodnot pro φ vyhovující rovnici

$$(2.5) \qquad e^{q\varphi}(q\sin n\varphi + n\cos n\varphi) = -\frac{v_0}{a}.$$

Při $v_0 = 0$ extrémní hodnoty jsou určeny vztahem

$$\operatorname{tg} n\varphi_e = -\frac{n}{q}, \text{ tj. pro } n\varphi_e + k\pi \quad (\text{kde } k = 1, 2, \ldots).$$

Při $v_0 \neq 0$ působí však exponenciální člen $e^{q\varphi}$, že se extrémy posouvají v každé periodě na jinou fázi a počínajíc dostatečně velkou hodnotou φ rovnost (2.5) vůbec nenastane, takže při kladném v_0 je (2.1) stále rostoucí. V bodech určených hodnotami $n\varphi = k\frac{\pi}{2}$ (kde $k = 1, 3, 5, \ldots$) dotýkají se křivky (2.1) křivek (2.2), čímž jsou též určeny jejich tečny.

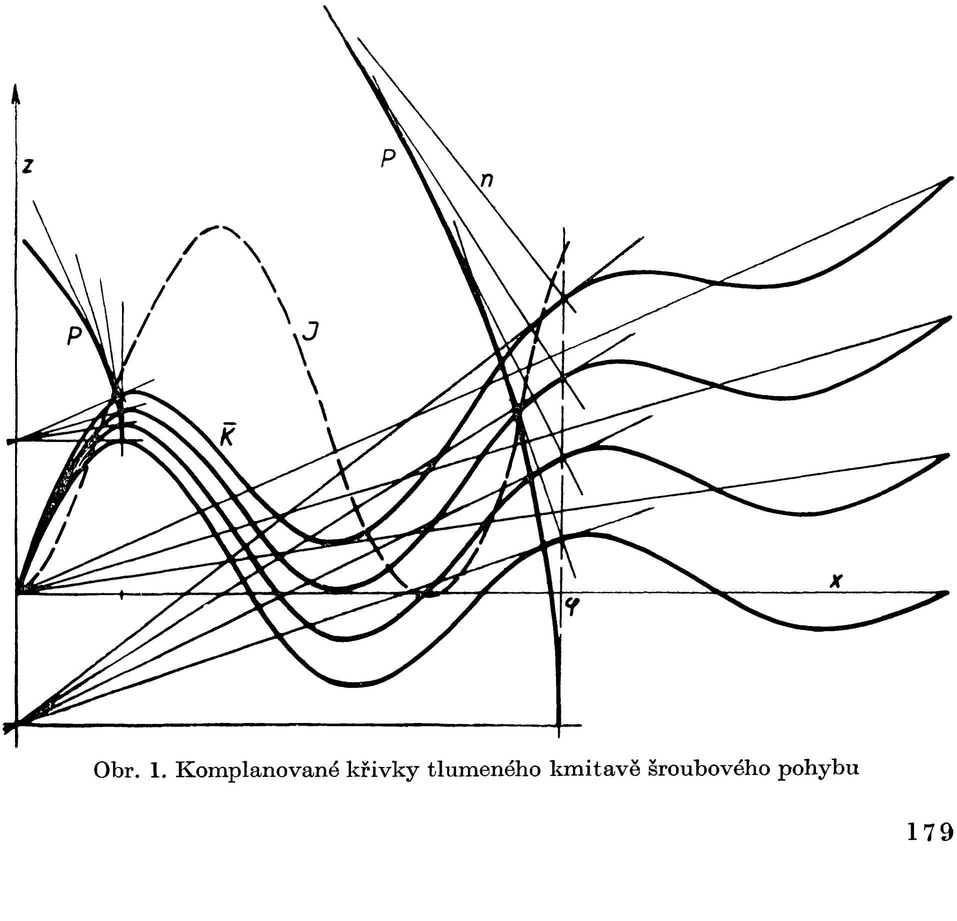
Z druhé derivace výrazu (2.1)

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\varphi^2} = a\mathrm{e}^{q\varphi}[(q^2 - n^2)\sin n\varphi + 2nq\cos n\varphi] \tag{2.6}$$

(zavedeme pro něj označení η'') vyplývá, že inflexní body určité křivky $\bar{K}$ se vyskytují v každé periodě při téže fázi, a to pro hodnoty φ určené rovnicí

$$\operatorname{tg} n\varphi = -\frac{2nq}{q^2 - n^2}. \tag{2.7}$$

Argument φ inflexních bodů nezávisí tedy při určité frekvenci ani na parametru šroubového pohybu v_0, ani na amplitudě a, závisí však na konstantě útlumu q.



Obr. 1. Komplanované křivky tlumeného kmitavě šroubového pohybu

Tečny ke křivkám $\bar{K}$ v bodě $x = \varphi$ jsou dány rovnicí

$$z = \eta' x + \eta - \eta' \varphi. \tag{2.8}$$

Jejich průsečíky s přímkami

$$z = v_0 x \tag{2.9}$$

při proměnném v_0 mají souřadnice na ose úseček

$$x = \frac{\sin n\varphi}{q \sin n\varphi + n \cos n\varphi} + \varphi. \tag{2.10}$$

Výsledek není závislý na a, v_0 a lze jej vyjádřit takto:

Věta 2.1. *Průměty úseků na tečnách komplanovaných křivek $\bar{K}$ tlumeného kmitavě šroubového pohybu, měřených od bodu dotyku $x = \varphi_0$, $z = ae^{q\varphi_0} \sin n\varphi_0 + v_0\varphi_0$ k průsečíku tečny s přímkou $z = v_0 x$, sestrojené kolmo na osu x, mají pro všechny hodnoty parametrů a a v_0 stejnou délku $\dfrac{\sin n\varphi_0}{q \sin n\varphi_0 + n \cos n\varphi_0}$. Tutéž hodnotu mají také podobně měřené subtangenty, příslušné tečnám v bodech $\varphi_0 \pm m\pi (m = 1, 2, 3 \ldots)$.*

Dále platí;

Věta 2.2. *Komplanované křivky $\bar{K}$ při daném n, v_0, q a různé amplitudě a, jsou v kosoúhlé afinitě o ose $z = v_0 x$ a se směrem rovnobežným s osou z.*

Průsečíky tečen křivek $\bar{K}$ s přímkou $x = 0$ mají aplikáty

$$z = ae^{q\varphi}[(1 - q\varphi) \sin n\varphi - n\varphi \cos n\varphi], \tag{2.11}$$

z čehož vyplývá, že tečny křivek určených stejnými hodnotami a, n, q a různými hodnotami pro v_0 v bodech příslušejících témuž parametru φ tvoří svazek se středem v bodě (2.11). Z toho lze odvodit;

Věta 2.3. *Komplanované křivky $\bar{K}$ tlumeného kmitavě šroubového pohybu, určené rovnicemi (2.1) jsou při společné hodnotě a, n, q a libovolném parametru v_0 vzájemně v nevlastní elaci, při čemž přímka $x = 0$ je osou i směrem elace.*

Eliminací parametru v_0 z rovnic (2.1) a (2.4) získáme diferenciální rovnici soustavy komplanovaných křivek o frekvenci n a proměnném parametru v_0

$$z' - \frac{1}{4} z = ae^{q\varphi}\left[\left(q - \frac{1}{4}\right) \sin n\varphi + n \cos n\varphi\right]. \tag{2.12}$$

Zvolíme-li $z' = k = \operatorname{tg} \alpha$ dostáváme soustavu isoklin křivek $\bar{K}$

$$x = \varphi, \quad z = ae^{q\varphi}[\sin n\varphi - \varphi(q \sin n\varphi + n \cos n\varphi)] + k\varphi \tag{2.13}$$

které protínají křivky $\bar{K}$ v bodech se směrnicemi k. Z tvaru rovnice je zřejmo, že jde o složení tlumeného kmitavého pohybu a vynuceného tlumeného kmitání při resonanci. Pro $z' = 0$ dostáváme křivku

$$z = ae^{q\varphi}[\sin n\varphi - \varphi(q \sin n\varphi + n \cos n\varphi)], \tag{2.14}$$

která protíná všechny křivky $\bar{K}$ v bodech, jejichž tečny mají směrnici rovnou nule.

Protože tečny ke křivkám $\bar{K}$ v bodech daných stejnou hodnotu parametru φ, při stejných hodnotách a, n, q a různých hodnotách parametru v_0 tvoří svazek, obalují normály.

$$\begin{aligned} z = & - [ae^{q\varphi}(q \sin n\varphi + n \cos n\varphi) + v_0]^{-1} \cdot (x - \varphi) + \\ & + ae^{q\varphi} \sin n\varphi + v_0\varphi \end{aligned} \tag{2.15}$$

nebo zkráceně

$$z = -\frac{1}{\eta'} x + \frac{\varphi}{\eta'} + \eta,$$

Platí věta:

Věta 2.4. *Normály soustavy křivek $\bar{K}$ při těchže hodnotách a, n, q a proměnném v_0 v bodech určených libovolně zvoleným parametrem φ obalují paraboly s osami rovnoběžnými s osou x a s ohnisky na ose elace $x = 0$. Osami parabol jsou tedy tečny v extrémních bodech křivek $\bar{K}$, body dotyku jsou vrcholy parabol.*

Lze tedy napsat rovnici takové paraboly ve tvaru

$$[y - (ae^{q\varphi} \sin n\varphi + v_0\varphi)]^2 = -4\varphi(x - \varphi), \tag{2.16}$$

kde parametr φ splňuje podmínku (2.5). Diferenciální rovnice všech parabol, obalených tečnami křivek $\bar{K}$ má tvar

$$y'^2 = -\frac{(x - 2\varphi)^2}{\varphi(x - \varphi)}. \tag{2.17}$$

Eliminací parametrů v_0 a a z rovnic (2.1), (2.4) a (2.6) získáme diferenciální rovnici všech křivek $\bar{K}$ pro proměnné parametry v_0 a a

$$\frac{\left(\frac{1}{\varphi} - q\right) \sin n\varphi - n \cos n\varphi}{(q^2 - n^2) \sin n\varphi + 2nq \cos n\varphi} z'' + z' - \frac{1}{\varphi} z = 0. \tag{2.18}$$

3. KŘIVKY TLUMENÉHO KMITAVĚ ŠROUBOVÉHO POHYBU

Trajektorie K tlumeného kmitavě šroubového pohybu jsou určeny rovnicemi (1.3). Provedeme-li postupně první, druhou a třetí derivaci podle φ dostáváme;

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r \cos \varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \eta', \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -r \cos \varphi, \quad \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -r \sin \varphi, \quad \frac{d^2z}{d\varphi^2} = \eta'', \tag{3.2}$$

$$\frac{d^3x}{d\varphi^3} = r \sin \varphi, \quad \frac{d^3y}{d\varphi^3} = -r \cos \varphi, \quad \frac{d^3z}{d\varphi^3} = \eta''', \tag{3.3}$$

kde

$$\eta''' = a e^{q\varphi}[q(q^2 - 3n^2) \sin n\varphi + n(3q^2 - n^2) \cos n\varphi].$$

Směrové kosiny tečny mají hodnoty

$$\alpha = \frac{-r \sin \varphi}{c}, \quad \beta = \frac{r \cos \varphi}{c}, \quad \gamma = \frac{\eta'}{c},$$

kde $c = (\eta'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$, takže rovnice tečny v obecném bodě, daném parametrem φ, lze psát

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = r, \tag{3.4}$$

$$\eta' x + rz \sin \varphi = r(\eta \sin \varphi + \eta' \cos \varphi).$$

Určité vlastnosti tečen křivek K odvodíme v článku 4. o rozvinutelných plochách tečen. Některé vlastnosti křivek K lze odvodit z vlastností křivek $\bar{K}$, nalezených v odstavci 2. Analogicky k větě 2.1 platí;

Věta 3.1. *Pro všechny křivky* (1.3) *vytvořené na téže válcové ploše pro tytéž hodnoty n, q avšak při libovolném parametru šroubování v_0 a amplitudě a platí: Úseky na tečnách křivek* (1.3), *měřené od bodu dotyku $M(\varphi_0)$ k průsečíku s rozvinutelnou plochou šroubovou, vytvořenou tečnami příslušné šroubovice* (1.1) *mají stejné pravoúhlé průměty do roviny (x, y) o délce* $\dfrac{\sin n\varphi_0}{q \sin n\varphi_0 + n \cos n\varphi_0}$. *Stejné délky průmětů mají též podobně měřené subtangenty příslušné tečnám v bodech $\varphi_0 \pm m\pi (m = 1, 2, \ldots)$.*

Jako obdoba k větě 2.2 platí:

Věta 3.2. *Křivky* (1.3) *při daných hodnotách n, v_0, q a libovolné amplitudě a jsou ve speciální perspektivní afinní prostorové příbuznosti, v níž osovou plochou je rozvinutelná šroubová plocha, vytvořená tečnami šroubovic* (1.1) *a směr rovnoběžný s osou z.*

Některé zajímavé vlastnosti lze nalézt studiem oskulačních rovin křivek (1.3), které jsou vyjádřeny rovnicí

$$(3.5) \qquad (\eta' \sin\varphi + \eta'' \cos\varphi)x - (\eta' \cos\varphi - \eta'' \sin\varphi)y + rz = r(\eta + \eta'').$$

Z matice z koeficientů tří libovolných oskulačních rovin při daných parametrech a, n, q a různém v_0, pro tutéž hodnotu argumentu φ vychází, že tyto roviny tvoří svazek. Osa svazku je dána rovnicemi

$$(3.6) \qquad x \sin\varphi - r \cos\varphi = r\varphi,$$
$$\eta'' x + rz \cos\varphi = r[(\eta + \eta'') \cos\varphi - (\eta' \cos\varphi - \eta'' \sin\varphi)\varphi]$$

takže její odchylka α od průmětny (x, y) je dána vztahem

$$(3.7) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta''}{r}.$$

Řídící kuželová plocha vedená počátkem $O(0, 0, 0)$ je určena rovnicemi

$$(3.8) \qquad x \sin\varphi - y \cos\varphi = 0,$$
$$\eta'' x + rz \cos\varphi = 0.$$

Z první rovnice (3.6) je zřejmo, že průměty os svazků oskulačních rovin obalují kruhovou evolventu

$$(3.9) \qquad x = r(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi), \quad y = r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Výsledek dosavadních úvah lze vyjádřit takto;

Věta 3.3. *Oskulační roviny křivek K při pevně zvolených hodnotách parametrů r, a, n, q a proměnném parametru v_0 v bodech určených libovolnou hodnotou argumentu φ tvoří svazek, jehož osa se dotýká evolventní válcové plochy* (3.9) *rovnoběžné s osou z.*

Prostorovou křivku K charakterisují směrové kosiny hlavní normály

$$l = \frac{\eta'\eta'' \sin\varphi - (\eta'^2 + r^2) \cos\varphi}{g}, \quad m = \frac{\eta'\eta'' \cos\varphi + (\eta'^2 + r^2) \sin\varphi}{g}$$

$$(3.10) \qquad n = \frac{r\eta''}{g},$$

kde

$$g = (\eta'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \, . \, (\eta'^2 + \eta''^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Normálová rovina je dána rovnicí

$$(3.11) \qquad x \sin\varphi - y \cos\varphi - \frac{\eta'}{r} z + \frac{\eta\eta'}{r} = 0.$$

Z věty 2.4 lze odvodit větu:

Věta 3.4. *Normálové roviny ke křivkám* (1.3) *v bodech povrchové přímky* *řídící válcové plochy pro danou hodnotu parametru φ, při stejných hodnotách a, n, q a různých hodnotách parametrů v_0 obalují parabolickou válcovou plochu, její rovina souměrnosti je kolmá k ose z a ohnisková přímka prochází středem svazku tečen křivek* (1.3).

Délka oblouku křivky (1.3) je vyjádřena integrálem

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + [ae^{q\varphi}(q \sin n\varphi + n \cos n\varphi) + v_0]^2}\, d\varphi. \tag{3.12}$$

Pro složitost výrazu nezavedeme v dalších úvahách oblouk jako parametr.

4. ROZVINUTELNÁ PLOCHA TEČEN KŘIVKY K

Rozvinutelná plocha tečen křivky (1.3) je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} \eta' x + rz \,.\, \sin\varphi &= r(\eta \sin\varphi + \eta' \cos\varphi),\\ \eta' y - rz \cos\varphi &= r(\eta' \sin\varphi - \eta \cos\varphi). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Její průnik s evolventní válcovou plochou rovnoběžnou s osou z, jejíž stopní čára do roviny (x, y) je dána rovnicemi (3.9) je křivka

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi),\\ y &= r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),\\ z &= ae^{q\varphi} \,.\, \varphi \left[\left(\frac{1}{\varphi} - q\right) \sin n\varphi - n \cos n\varphi\right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

která není závislá na parametru šroubového pohybu v_0. Při dané hodnotě argumentu φ a pevných hodnotách a, n, q protínají se tečny pro všechna v_0 ve stejném bodě uvedeného evolventního válce. Analogicky k větě 2.3 platí:

Věta 4.1. *Křivky tlumeného kmitavě šroubového pohybu* (1.3) *jsou při daných hodnotách a, n, q a libovolnému v_0 v prostorové korespondenci, při níž tečny v bodech příslušejících témuž parametru φ se protínají na evolventní válcové ploše s řídící evolventou* (3.9) *a s povrchovými přímkami rovnoběžnými s osou z v bodech křivky* (4.2).

Při komplanaci evolventního válce (3.9) do roviny přejde křivka (4.2) v rovinnou křivku

$$x = \frac{r}{2}\varphi^2, \quad z = ae^{q\varphi} \,.\, \varphi \,.\left[\left(\frac{1}{\varphi} - q\right) \sin n\varphi - n \cos n\varphi\right], \tag{4.3}$$

která je křivkou vynuceného tlumeného kmitání. Její kmity jsou aperiodické jak vidno z první rovnice (4.3).

Stopní čára rozvinutelné plochy tečen (4.1) je dána v polárních souřadnicích φ, ϱ

$$(4.4) \qquad \varphi, \quad \varrho = r\sqrt{\frac{\eta^2}{\eta'^2} + 1}\,,$$

kde výraz $\dfrac{\eta}{\eta'}$ představuje délku subtangenty v bodě určeném parametrem φ.

Ve všech bodech křivky (1.3) o extrémních souřadnicích z nemají tečny s rovinou (x, y) vlastní průsečík. Z platnosti věty 3.2 vyplývá:

Věta 4.2. *Rozvinutelné plochy tečen* (4.1) *při daných hodnotách r, n, v_0 a q a libovolné amplitudě a protínají šroubový torzus se šroubovicí vratu* (1.1) *v téže křivce*

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} x &= r\left[\cos\varphi + \frac{\eta - v_0\,\varphi}{\eta' - v_0}\sin\varphi\right], \\ y &= r\left(\sin\varphi - \frac{\eta - v_0\varphi}{\eta' - v_0}\cos\varphi\right), \\ z &= \eta - \eta'\,\frac{\eta - v_0\varphi}{\eta' - v_0}. \end{aligned}$$

Z obou prvních rovnic (4.5) je zřejmo, že průmět průsečné křivky nezávisí na parametru v_0, z čehož v souhlase s větou 3.1 vyplývá věta:

Věta 4.3. *Zvolíme-li u ploch určených ve větě* 4.2 *různé hodnoty parametru šroubového pohybu v_0, mají průsečné čáry ploch* (4.1) *s příslušnými šroubovými torzy tentýž pravoúhlý průmět do roviny, vyjádřený prvními dvěma rovnicemi* (4.5) *nebo v polárních souřadnicích φ, ϱ*

$$(4.6) \qquad \varphi, \quad \varrho = r\sqrt{1 + \frac{\sin^2 n\varphi}{(q\sin n\varphi + n\cos n\varphi)^2}}\,.$$

Jak již výše uvedeno nevyskstuje se v rovnici (4.6) ani parametr a ani v.

5. PŘÍMKOVÉ NEROZVINUTELNÉ PLOCHY TLUMENÉHO KMITAVĚ ŠROUBOVÉHO POHYBU

Nyní se budeme zabývat studiem nerozvinutelných ploch R_{yz} které vzniknou, když podrobíme tlumenému kmitavě šroubovému pohybu obecnou přímku $p(\varphi) = [y(\varphi), z(\varphi)]$, danou v projektivním prostoru P_3, vzniklém rozšířením eukleidovského prostoru E_3 o body nevlastní roviny. Tvořící přímka je dána jako spojnice bodu $y(\varphi)$ s nevlastním bodem $z(\varphi)$, které jsou vyjádřeny uspořádanými čtveřicemi homogenních souřadnic

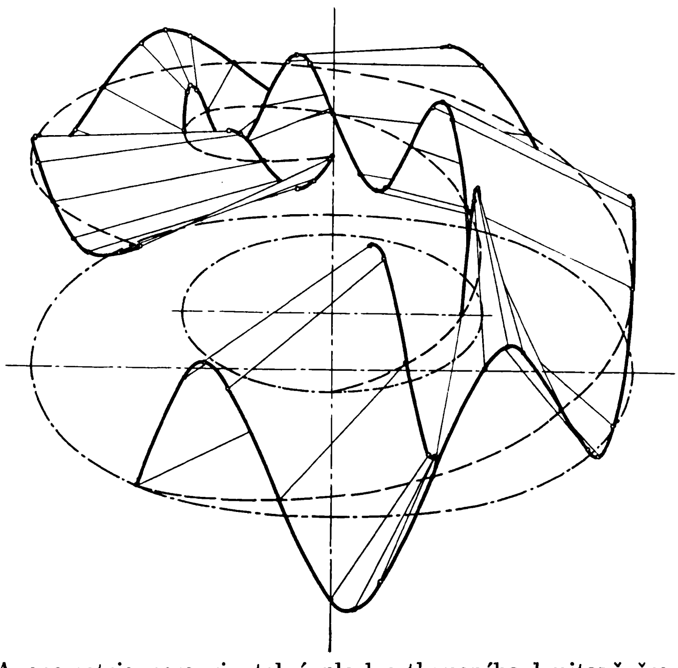
$$
\begin{aligned}
y(\varphi) &= (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ ae^{q\varphi}\sin n\varphi + v^2\varphi,\ 1) \\
z(\varphi) &= (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ b \qquad\qquad\qquad\quad ,\ 0),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

jejichž matice je hodnosti 2 identicky v proměnném φ a kde a, r, n, v_0, q jsou dříve uvedené konstanty různé od nuly. Nově je zavedena veličina $b = \operatorname{cotg}\beta$, kde β je odchylka tvořící přímky plochy od osy $o \equiv z$. Tvořící přímka $p(\varphi)$ je tečnou rotační válcové plochy $x^2 + y^2 = r^2$ ve svém centrálním bodě $y(\varphi)$, takže křivka C_y na této válcové ploše, vytvořená bodem $y(\varphi)$ je strikční křivkou plochy R_{yz}. Pro $b \neq 0$ má plocha řídicí kuželovou plochu o ose O_z, pro $b = 0$ má plocha řídicí rovinu kolmou k ose O_z.

Podle hodnot r, b můžeme provést podobné rozdělení ploch R_{yz}, jako je zavedeno u ploch šroubových, t. j. pro $r \neq 0$ plochy otevřené, $r = 0$ plochy zavřené, $b = 0$ plochy pravoúhlé a $b \neq 0$ plochy kosoúhlé.

Libovolný bod plochy R_{yz} lze vyjádřit výrazem

$$
\begin{aligned}
x = y + uz = (r\cos\varphi - u\sin\varphi,\ r\sin\varphi + u\cos\varphi,\ ae^{q\varphi}\sin n\varphi + \\
+ v_0\varphi + bu,\ 1),
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$



Obr. 2. Axonometrie nerozvinutelné plochy tlumeného kmitavě šroubového pohybu

kde u je vedle φ nový parametr plochy. Křivky C_y a C_z opsané body $y(\varphi)$, $z(\varphi)$, uvedenými v (5.1) budeme považovat za řídicí křivky plochy R_{yz}.

Věta 5.1. *Ve vyjádření přímkových ploch tlumeného kmitavě šroubového pohybu* (5.2) *jsou proměnné* $u \in (-\infty, \infty)$ *a* $\varphi < 0, \infty)$ *křivočarými souřadnicemi bodu na ploše. Křivka* C_y *je strikční křivkou, křivka* C_z *je křivkou nevlastní.*

Podmínka, aby plocha byla nerozvinutelná je totožná s požadavkem, aby platilo identicky při proměnném φ

$$[y, z, y', z'] \neq 0, \tag{5.3}$$

kde levá strana znamená determinant ze souřadnic bodů y, z a jejich derivace podle φ. Po rozvedení vychází hodnota determinantu (5.3)

$$a e^{q\varphi}(q \sin n\varphi + n \cos n\varphi) + v_0 - br = \eta' - br. \tag{5.4}$$

Existují-li isolované torsální přímky plochy R_{yz}, platí, že jim příslušné hodnoty parametru φ jsou kořeny rovnice

$$[y, z, y', z'] = 0. \tag{5.5}$$

Kdyby (5.5) platilo identicky pro všechna φ určitého intervalu, byla by plocha v onom intervalu rozvinutelná.

Věta 5.2. *Podmínka nerozvinutelnosti přímkových ploch tlumeného kmitavě šroubového pohybu je* $\eta' - br \neq 0$. *Podél přímek určených hodnotami* φ, *pro něž* $\eta' - br = 0$, *chovají se uvedené plochy jako rozvinutelné. Výraz* $\eta' - br$ *vyjadřuje parametr distribuce plochy* R_{yz}.

Odvodíme rovnici tečné roviny v obecném bodě $x = y + uz$, která obsahuje body y, z, $d(y + uz)$, takže pro každý její bod $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, 1)$ platí $[X, y, z, d(y + uz)] = 0$, kde u je možno pokládat za konstantní. Rozvedením hořejšího determinantu podle prvního sloupce vzniká hledaná rovnice tečné roviny ve tvaru

$$\begin{aligned} X^{(1)}[(\eta' - br) \cos \varphi + u \,.\, b \sin \varphi] + X^{(2)}[(\eta' - br) \sin \varphi - ub \cos \varphi] + \\ + X^{(3)} \,.\, u = r(\eta' - br) + u\eta. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pro derivaci distribučního parametru $\eta' - br$ vychází

$$\frac{\mathrm{d}\,(\eta' - br)}{\mathrm{d}\varphi} = a e^{q\varphi}[(q^2 - n^2) \sin n\varphi + 2nq \cos n\varphi] = \eta''.$$

6. PROJEKTIVNÍ DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE PLOCHY R_{yz}

Ke studiu projektivních vlastností společných všem plochám, které vznikají z plochy kmitavě šroubového pohybu regulárními kolineacemi, vyjdeme ze soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu, zavedených E. J. Wilczynskim v díle [8]

$$
\begin{aligned}
y'' &= l_1 y' + l_2 z' + l_3 y + l_4 z, \\
z'' &= m_1 y' + m_2 z' + m_3 y + m_4 z.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Dosadíme do nich příslušné hodnoty z rovnic (5.1) a jejich derivace a ze vzniklých soustav určíme koeficienty soustavy (6.1)

$$
l_1 = \frac{\eta''}{\eta' - br}, \quad l_2 = r, \quad l_3 = 0, \quad l_4 = -r\frac{\eta''}{\eta' - br}, \tag{6.2}
$$

$$
m_1 = \frac{b}{\eta' - br}, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0, \quad m_4 = -\frac{\eta'}{\eta' - br},
$$

takže Wilczynského soustava má tvar

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{\eta''}{\eta' - br} y' + rz' - r\frac{\eta''}{\eta' - br} \cdot z, \\
z'' &= \frac{b}{\eta' - br} y' - \frac{\eta'}{\eta' - br} z.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

V díle o projektivní diferenciální geometrii [1] rozložil E. Čech koeficienty soustavy (6.1) v prvky, z nichž jsou zřejmy invarianty plochy R_{yz} a vyjádřil přímkovou plochou o řídících křivkách C_y, C_z soustavou diferenciálních rovnic druhého řádu

$$
\begin{aligned}
y'' &= (\Theta' - 2\bar{b})y' + 2\bar{a}z' + (-\bar{b}' + \bar{b}\Theta' + \bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 - B - j)y + \\
&\quad + (\bar{a}' - \bar{a}\Theta' + A)z, \\
z'' &= -2\bar{c}y' + (\Theta' + 2\bar{b})z' + (-\bar{c}' + \bar{c}\Theta' - C)y + (\bar{b}' - \bar{b}\Theta' + \\
&\quad + \bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 + B - j)z.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Pruhy v symbolech $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (obecně funkcích parametru) jsme zavedli k odlišení od dříve zavedených konstant a, b, jejichž smysl je jiný. Porovnáním koeficientů při y', z', y, z v soustavách (6.1) a (6.4) a provedením příslušných výpočtů dostaneme

$$
\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{r}{2}, \\
\bar{b} &= \frac{1}{4}\frac{\eta''}{\eta' - br},
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

$$\bar{c} = -\frac{1}{2}\frac{b}{\eta' - br},$$

$$\Theta' = \frac{1}{2}\frac{\eta''}{\eta' - br},$$

$$j = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{br}{\eta' - br} - \frac{1}{16}\frac{\eta''^2}{(\eta' - br)^2},$$

$$A = -\frac{3}{4}\frac{r\eta''}{\eta' - br},$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\eta'''}{\eta' - br} - \frac{3}{4}\frac{\eta''^2}{(\eta' - br)^2} - \frac{\eta'}{\eta' - br}\right.,$$

$$C = -\frac{3}{4}\frac{b\eta''}{(\eta' - br)^2}.$$

Tím byl získán aparát některých významných projektivních vlastností ploch R_{yz} a jejich křivek.

Věta 6.1. *Přímkové plochy tlumeného kmitavě šroubového pohybu, definované rovnicemi* (5.2) *a všechny jejich plochy transformované regulárními kolineacemi jsou integrálními plochami soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu* (6.3).

7. NĚKTERÉ VÝZNAČNÉ SOUSTAVY KŘIVEK NA NEROZVINUTELNÉ PLOŠE R_{yz}

Výsledků teorie E. Čecha použijeme ke studiu některých význačných čar na nerozvinutelné ploše R_{yz} a jiných geometrických objektů. Zvláště si všimneme vrstev křivek, jejichž křivky protínají tvořící přímky plochy v projektivních bodových řadách.

a) Nejprve budeme studovat asymptotické křivky, jejichž vrstva je v Čechově teorii určena Riccatiho diferenciální rovnicí

$$u' + \bar{a} + 2\bar{b}u + \bar{c}u^2 = 0. \tag{7.1}$$

Pro plochu kmitavě šroubového pohybu R_{yz} o rovnicích (6.3) je rovnice (7.1) tvaru

$$u' + \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\frac{\eta''}{\eta' - br}\cdot u - \frac{1}{2}\frac{b}{\eta' - br}\cdot u^2 = 0. \tag{7.2}$$

Bod $y + uz$ opíše tedy asymptotickou křivku C_{y+uz}, když u je řešením rovnice (7.2). Z vlastností Riccatiho rovnice vyplývá, že asymptotické křivky vytínají na tvořících přímkách projektivní bodové řady.

b) Buď dána Riccatiho diferenciální rovnice

$$u' + \alpha + 2\beta u + \gamma u^2 = 0 \tag{7.3}$$

definující na R_{yz} Riccatiho soustavu křivek, která není totožná se soustavou asymptotik (7.1). Pak rovnice druhého stupně v u

$$\alpha - \bar{a} + 2(\beta - \bar{b})u + (\gamma - \bar{c})u^2 = 0 \tag{7.4}$$

vyjadřuje dvojici tzv. základních křivek Riccatiho soustavy R (O. Mayer).

c) Položíme-li $u =$ konst. (a tedy $u' = 0$), dostáváme soustavu ekvidistant strikční čáry plochy R_{yz}, dané rovnicemi (5.2), t. j. každý bod $y + uz$ křivky C_{y+uz} má tutéž vzdálenost, měřenou na tvořící přímce od centrálního bodu y tvořící přímky $[y, z]$. Dvojice základních křivek soustavy ekvidistant je tedy dána rovnicí

$$r(\eta' - br) - \eta'' u - bu^2 = 0. \tag{7.5}$$

Pro parametr u odtud vychází dvojice hodnot

$$u = \frac{1}{2b}\left(-\eta'' \pm \sqrt{\eta''^2 + 4br(\eta' - br)}\right).$$

Součin parametrů u_1, u_2 obou základních křivek je tedy vázán podmínkou

$$u_1 \,.\, u_2 = -\frac{r}{b}(\eta' - br). \tag{7.6}$$

d) Jinou významnou soustavou R čar plochy R_{yz} je soustava ortogonálních trajektorií soustavy tvořících přímek. Její Riccatiho diferenciální rovnice se získá anulováním skalárního součinu směrových vektorů tvořící přímky $[y, z]$ a tečny křivky C_{y+uz}, takže má tvar

$$u' + r + \frac{b}{1 + b^2}(\eta' - br) = 0\,. \tag{7.7}$$

Je zřejmé, že pro pravoúhlé konoidy tlumeného kmitavě šroubového pohybu (tedy pro $r = b = 0$) ortogonální trajektorie tvořících přímek jsou křivky $u =$ konst. a jejich průměty ve směru osy z do roviny (x, y) jsou soustředné kružnice. Pro otevřené plochy pravoúhlé jsou průměty ortogonálních trajektorií soustav tvořících přímek evolventy kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ s rovnicí v polárních souřadnicích φ, ϱ ; $\varrho = r\sqrt{1 + \varphi^2 + C}$ .Půdorysy ortogonálních trajektorií k přímkám kosoúhlé otevřené plochy tlumeného kmitavě šroubového pohybu jsou vyjádřeny v polárních souřadnicích φ, ϱ rovnicí

$$\varrho = \sqrt{r^2 + \frac{1}{(1+b^2)^2}(b\eta + r\varphi)^2 + C}.$$

e) Při studiu čar na ploše R_{yz} všimneme si též fleknodálných křivek, jejichž tečny mají čtyřbodový styk s plochou. Dvojice fleknodálních křivek je určena tzv. fleknodální kvadratickou formou. tj. v symbolice Čechovy teorie kořeny rovnice

$$A + 2Bu + Cu^2 = 0, \tag{7.8}$$

která nabývá pro plochu R_{yz} tvaru

$$3\frac{b\eta''}{\eta' - br}\cdot u^2 - \left(2\eta''' - 3\frac{\eta''^2}{\eta' - br} - 4\eta'\right)u + 3r\eta'' = 0\cdot \tag{7.9}$$

Fleknodální křivka protíná každou tvořící přímku ve dvojici fleknodů, v nichž mají křivočaré asymptotiky (7.2) body obratu. Oba fleknody splývají na tvořících přímkách, pro které hodnoty parametru vyhovují rovnici $B^2 - AC = 0$: je-li tento diskriminant roven nule pro určitou plochu identicky, obě fleknodální čáry splývají.

Vyjádříme-li součin kořenů u_1, u_2 rovnice (7.9)

$$u_1 \,.\, u_2 = \frac{r}{b}(\eta' - br) \tag{7.10}$$

pomocí vzdálenosti $\bar{u}$ bodu u od centrálního bodu $\bar{u} = \sqrt{1 + b^2}\,.\,u$, dostáváme, že součin vzdálenosti fleknodů od centrálního bodu je

$$\bar{u}_1 \,.\, \bar{u}_2 = \frac{r}{b}(1 + b^2)\,.\,(\eta' - br). \tag{7.11}$$

8. LINEÁRNÍ KOMPLEX A LIEHO ASYMPTOTIKY

Všechny přímkové plochy tlumeného kmitavě šroubového pohybu jsou obsaženy v lineárním komplexu Ω o rovnici v Plückerových souřadnicích

$$bp_{12} + rp_{34} = 0 \tag{8.1}$$

neboť pro tvořící přímku plochy

$$p_{12} = \begin{vmatrix} r\cos\varphi, & -\sin\varphi \\ r\sin\varphi, & \cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

$$p_{34} = \begin{vmatrix} \eta, & b \\ 1, & 0 \end{vmatrix} = -b.$$

Protože plocha R_{yz} je obsažena při $rb \neq 0$ v obecném lineárním komplexu Ω existuje dvojice Lieho asymptotik, jejichž tečny též náležejí komplexu Ω. Jako asymptotické čáry vyhovují rovnici (7.2) a jako komplexové křivky současně vyhovují rovnici

$$r\eta' - bu^2 = 0, \tag{8.2}$$

takže po provedení výpočtu vychází, že Lieho asymptotiky jsou křivky opsané body

$$y \pm \sqrt{\frac{r}{b}(\eta' - br)} \, . \, z. \tag{8.3}$$

Na libovolné tvořící přímce tedy centrální bod půlí úsečku vyťatou Lieho asymptotikami o délce $2\sqrt{\frac{r}{b}(\eta' - br)(1 + b^2)}$. Platí věty:

Věta 8.1. *Každá přímková plocha tlumeného kmitavě šroubového pohybu je obsažena v lineárním komplexu Ω, který je vyjádřen v Plückerových souřadnicích rovnicí* (8.1). *Při $rb \neq 0$ Ω je obecný a existuje dvojice Lieho křivočarých asymptotik plochy, jejichž tečny též náležejí do komplexu Ω. Jsou vyjádřeny rovnicí* (8.2) *a lze je proto určit bez kvadratur.*

Věta 8.2. *Dvojice základních křivek soustavy ekvidistant, dvojice Lieho asymptotik a dvojice složená ze strikční křivky a z křivky nevlastní vytínají na každé tvořící přímce plochy tři dvojice bodů, náležející téže bodové involuci druhého stupně, jejímž středem je centrální bod a jejíž symetrická dvojice bodů náleží Lieho asymptotikám.*

9. NĚKTERÉ METRICKÉ VLASTNOSTI PLOCH R_{yz}

Pro studium metrických vlastností odvodíme první a druhou základní diferenciální formu. Koeficienty první diferenciální formy

$$ds^2 = E du^2 + 2F du d\varphi + G d\varphi^2 \tag{9.1}$$

jsou pro plochy Ryz vyjádřeny výrazy

$$\begin{aligned} E &= 1 + b^2, \\ F &= b\eta' + r, \\ G &= \eta'^2 + r^2 + u^2, \end{aligned} \tag{9.2}$$

takže deskriminant

$$EG - F^2 = (\eta' - br)^2 + (1 + b^2)u^2. \tag{9.3}$$

Transformací parametru $\bar{u} = \sqrt{1 + b^2} \, . \, u$ výraz pro diskriminant přejde v

$$(9.4) \qquad EG - F^2 = (\eta' - br)^2 + \bar{u}^2.$$

Podobně druhá diferenciální forma

$$(9.5) \qquad L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi + N\mathrm{d}\varphi^2$$

má v naší symbolice koeficienty

$$(9.6) \qquad \begin{aligned} L &= 0, \\ M &= \frac{\eta' - br}{\sqrt{(\eta' - br)^2 + \bar{u}^2}}, \\ N &= \frac{r(\eta' - br) - \eta'' u - bu^2}{\sqrt{(\eta' - br)^2 + \bar{u}^2}}. \end{aligned}$$

Čáry křivosti jsou dány diferenciální rovnicí

$$(9.7) \qquad (EM - FL)\mathrm{d}u^2 + (EN - GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi + (FN - GM)\mathrm{d}\varphi^2 = 0$$

odkud pro $L = 0$ a po dosazení příslušných hodnot dostáváme rovnici

$$(9.8) \qquad \begin{aligned} &(\eta' - br)(1 + b^2)\mathrm{d}u^2 + (1 + b)^2[a(\eta' - br) - \eta'' u - bu^2]\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi + \\ &+ \{(\eta' - br)[(\eta' + b(a - r))^2 + a^2 + u^2] - [b\eta' + b(a - r) + a] \,. \\ &. \, [a(\eta' - br) - \eta'' u - bu^2]\}\mathrm{d}y^2 = 0. \end{aligned}$$

Pro konoid kmitavě šroubového pohybu, určený $b = r = 0$ zjednoduší se rovnice na tvar

$$\eta' \mathrm{d}u^2 + (a\eta' - \eta'' u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi + [\eta'(\eta'^2 + u^2) - a\eta'' u]\mathrm{d}\varphi^2 = 0.$$

Na každé normále jsou obecně dvě ohniska kongruence normál, která jsou určena jako řešení rovnice

$$(9.9) \qquad M^2 t^2 + (EN - 2FM)t + F^2 - EG = 0,$$

kde t_1 a t_2 jsou vzdálenosti ohnisek od bodu plochy. Pro $b = r = 0$ má rovnice (9.9) kořeny

$$t_{12} = \frac{-\eta'' u \pm \sqrt{\eta''^2 \,.\, u + 4\eta'^2(\eta'^2 + u^2)}}{2\eta'}.$$

Anulováním druhé kvadratické diferenciální formy získá se diferenciální rovnice sítě asymptotických čar plochy R_{yz}

$$(9.10) \qquad 2(\eta' - br)\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi + [r(\eta' - br) - \eta'' u - bu^2]\mathrm{d}\varphi^2 = 0.$$

Koeficient $L = 0$ v (9.6) vyjadřuje, že jedna vrstva asymptotik $\mathrm{d}\varphi = 0$ je složena z tvořících přímek. Druhá vrstva je zřejmě totožná s vrstvou (7.2).

Napíšeme ještě diferenciální rovnici geodetických čar, které tvoří na ploše R_{yz} dvouparametrickou kovariantní soustavu

$$(9.11) \qquad [\eta' - br)^2 + (1 + b^2)u^2]u'' = 2(1 + b^2)u \,.\, u'^2 +$$

$$+ [3(b\eta' + r)u + (\eta' - br)\eta'']u' + (\eta'^2 + r^2 + u^2)u + [r(\eta' - br) - bu^2]\eta''.$$

Při volbě $b = r = 0$ vychází

$$(9.12) \qquad (\eta'^2 + u^2)u'' = 2uu'^2 + \eta'\eta''u' + (\eta'^2 + u^2)u.$$

Též povrchové přímky plochy R_{yz} o rovnici $\varphi =$ konst. zřejmě jsou geodetickými čarami a Christoffelův symbol $\Gamma^2_{11} = 0$. Je-li také $F = 0$, což nastává pro $b = r = 0$, jsou křivky $u =$ konst. ortogonálními trajektoriemi těchto geodetik, jsou geodetickými čarami a tvoří jednoparametrickou vrstvu geodetických rovnoběžek.

Integrál pro délku krivky mezi dvěma body P_0, P_1 plochy R_{yz} (bez jakýchkoliv omezení, tedy i pro $r \neq 0$, $b \neq 0$) lze psát

$$(9.13) \qquad s = \int_{u_0}^{u_1} f(u, \varphi, \varphi')\mathrm{d}u, \left(\text{kde } \varphi' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\right),$$

kde funkce f je dána vzorcem

$$(9.14) \qquad f(u,\varphi,\varphi') = [(1 + b^2) + 2(b\eta' + r)\varphi' + (\eta'^2 + r^2 + u^2)\varphi'^2]^{\frac{1}{2}}$$

Diferenciální rovnici (9.11) geodetik mohli bychom získat též hledajíce funkce $\varphi(u)$ extremalisující integrál (9.13).

10. KONJUGOVANÉ ŘÍDÍCÍ ČÁRY PLOCHY R_{yz}

Vyjdeme-li z definice A. Terraciniho [7], dostáváme podmínku konjugovanosti dvojice řídících čar C_y, C_z plochy R_{yz}, vyjádřenou v symbolice teorie E. Čecha (viz [4])

$$(10.1) \qquad \bar{a}C + \bar{c}A = 0$$

Dosadíme-li příslušné hodnoty z rovnic (6.5) vychází,že podmínka (10.1) je splněna identicky pro všechny přímkové plochy tlumeného kmitavě šroubového pohybu.

Také podmínky bikonjugovanosti řídících čar na uvedených plochách

$$(10.2) \qquad 3\varrho'N - \varrho N' + 12NB = 0$$

kde

(10.3) $$\varrho = \frac{A}{\bar{a}} = -\frac{C}{\bar{c}} = -\frac{3}{2}\frac{\eta''}{\eta' - br},$$

$$N = \bar{a}'\bar{c} - \bar{a}\bar{c}' + 4\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$$

je splněna identicky, takže platí;

Věta 10.1. *Strikční křivka C_y a nevlastní křivka C_z přímkové plochy Ryz tlumeného kmitavě šroubového pohybu jsou bikonjugovanými řídícími křivkami ve smyslu A. Terraciniho.*

11. K DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII PŘÍMKOVÝCH PLOCH R_{yz}

Souřadnice obecného bodu libovolné přímkové plochy tlumeného kmitavě šroubového pohybu R_{yz} byly uvedeny v rovnici (5.2). Vrstevnice o kótě z_0 je vyjádřena v kartézských parametrických souřadnicích

$$x = r\cos\varphi - \frac{1}{b}(z_0 - \eta)\sin\varphi,$$

(11.1) $$y = r\sin\varphi - \frac{1}{b}(z_0 - \eta)\cos\varphi,$$

$$z = z_0.$$

Derivací rovnice

(11.2) $$bu + \eta = z_0$$

podle φ dostaneme diferenciální rovnici soustavy vrstevnic

(11.3) $$u' = -\frac{\eta'}{b},$$

z níž je zřejmé, že vrstevnice vytínají na tvořicích přímkách plochy shodné bodové řady.

Vrstevnice (11.1) je křivka, vznikající superposicí evolventy

$$x = r\cos\varphi + \frac{v_0}{b}\varphi\sin\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi - \frac{v_0}{b}\varphi\,.\cos\varphi,$$

kružnice

$$x = -\frac{z_0}{b}\sin\varphi,$$

$$y = \frac{z_0}{b}\cos\varphi$$

a křivky

$$x = \frac{ae^{q\varphi}}{b}\sin n\varphi\sin\varphi,$$

$$y = -\frac{ae^{q\varphi}}{b}\sin n\varphi\cos\varphi,$$

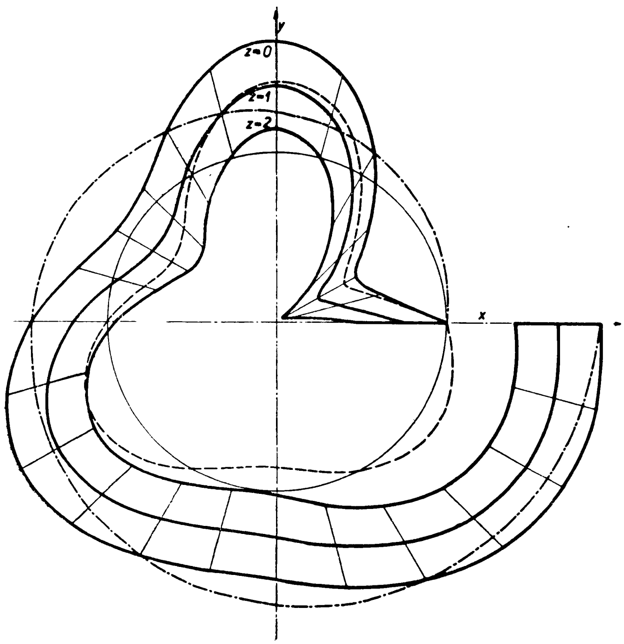
která odráží tlumený kmitavý pohyb.

Soustava spádových křivek plochy R_{yz} je soustavou ortogonálních trajektorií vrstevnic. Z rovnice pro křivky minimální

$$\mathrm{E}u'^2 + 2Fu' + G = 0 \tag{11.4}$$

můžeme určit směry na sebe kolmé u_1', u_2'. Dosazením příslušných hodnot z rovnic (9.2) dostaneme

$$(1 + b^2)u_1' \,.\, u_2' + (b\eta' + r)(u_1' + u_2') + \eta'^2 + u^2 + r^2 = 0 \tag{11.5}$$



Obr. 3. Vrstevnice přímkové plochy tlumeného kmitavě šroubového pohybu.

takže

$$(11.6) \qquad u_1' = -\frac{(b\eta' + r)u_2' + u^2 + \eta'^2 + r^2}{(1 + b^2)u_2' + b\eta' + r}.$$

Dosadíme za u_1' z rovnice (11.3), upravíme a vynecháme index při u_2', dostaneme rovnici

$$(11.7) \qquad u' = \frac{b}{\eta' - br} u^2 - r,$$

z níž plyne, že spádové křivky vytínají na tvořících přímkách projektivní bodové řady.

Věta 11.1. *Křivky největšího spádu na plochách tlumeného kmitavě šroubového pohybu R_{yz} tvoří Riccatiho soustavu o rovnici* (11.7). *V bodech Lieho asymptotik se spádové křivky dotýkají ekvidistant.*

Průniky plochy R_{yz} s rovinami procházejícími osou šroubového pohybu můžeme zkoumat bez újmy obecnosti studiem řezu rovinou $x = 0$

$$(11.8) \qquad r \cos \varphi - u \sin \varphi = 0$$

tedy

$$u = r \operatorname{cotg} \varphi$$

takže průniková křivka je určena v kartézských souřadnicích parametrickými rovnicemi

$$(11.9) \qquad x = 0,\ y = r \operatorname{cosec} \varphi,\ z = ae^{q\varphi} \sin n\varphi + br \operatorname{cotg} \varphi + v_0\varphi.$$

Riccatiho rovnice soustavy průniků plochy s rovinami svazku o ose O_z zřejmě zní

$$(11.10) \qquad u' + r + \frac{1}{r} u^2 = 0$$

a má řešení

$$\varphi = \operatorname{arc\,cotg} \frac{u}{r} + C$$

(pro $C = 0$ jde o průnik (11.8)).

12. NĚKTERÁ ZJEDNODUŠENÍ STUDOVANÝCH PLOCH R_{yz}

V předchozích odstavcích nalezené analytické výrazy a vlastnosti zůstávají v platnosti v mnoha případech, provedeme-li v určení pohybu některá zjednodušení.

Volíme-li v rovnicích (1.3) koeficient útlumu $q = 0$, získáme netlumený pohyb kmitavě šroubový

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = a \sin n\varphi + v_0\varphi. \tag{12.1}$$

Křivky, rozvinutelné i nerozvinutelné přímkové plochy tímto pohybem vznikající studoval jsem v práci [6].

Volíme-li v rovnicích (1.3) parametr $v_0 = 0$ a zachováme $q \neq 0$, získáme tlumený pohyb kmitavě rotační

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = ae^{q\varphi} \sin n\varphi, \tag{12.2}$$

jehož studiem se zabýval W. Wunderlich v práci [9], kde jsou zkoumány křivky a rozvinutelné plochy tímto pohybem vytvářené.

Konečně jestliže v rovnicích (1.3) položíme $v_0 = 0$ i $q = 0$ vzniká harmonický pohyb kmitavě rotační

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = a \sin n\varphi, \tag{12.3}$$

kterým se zabýval W. Kautny v článcích [2] a [3]. Obsahují studium křivek a rozvinutelných ploch; nerozvinutelné plochy přímkové kmitavě rotační jsem studoval v práci [5].

V předchozí části prováděné studium nerozvinutelných přímkových ploch R_{yz} lze obdobně rozšířit na případy, kde vytvářecí rotační nebo šroubový pohyb je spojen s vynuceným kmitáním

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = k \,.\, \varphi \sin n\varphi \tag{12.4}$$

resp.

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = k \,.\, \varphi \sin n\varphi + v_0\varphi, \tag{12.5}$$

jaké může vyvolat harmonicky proměnná síla, kde amplituda lineárně roste v závislosti na velikosti konstanty k. Výsledky lze vztahovat také na pohyb vznikající spojením rotačního nebo šroubového pohybu s vynuceným kmitáním tlumeným

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = a(1 - e^{q\varphi}) \sin n\varphi, \tag{12.6}$$

resp.

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = a(1 - e^{q\varphi}) \sin n\varphi + v_0\varphi. \tag{12.7}$$

Jak lze snadno ukázat, platí mnohé nalezené vlastnosti také pro přímkové plochy, vznikající při skládání harmonických pohybů se stejnou amplitudou a frekvencí, se stejnou amplitudou při různých kruhových frekvencích, případně s různými amplitudami a různými frekvencemi, např.

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,\ z = a \sin n_1\varphi + k \sin (n_2\varphi + \omega). \tag{12.8}$$

Lze tedy říci, že jde o dosti obsáhlou třídu přímkových ploch, vytvářených pohybem složeným z rotace nebo šroubového pohybu a z jednoduchého nebo složeného harmonického kmitání uvedených typů. Při analytickém zkoumání některých složených případů přicházejí však složité a nepřehledné výrazy a vzorce, takže obecné výpočty se stávají těžkopádnými a výsledky nesnadno přehlednými.

LITERATURA

[1] Fubini G., Čech E., *Geometria proiettiva differenziale*, T. I., Bologna, Zanichelli 1926.

[2] Kautny W., *Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs*, Monatsh. Math. *60* (1956), 66—82.

[3] Kautny W., *Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen*, Monatsh. Math. *63* (1959), 169—188.

[4] Klapka J., *Über Paare von konjugierten Kurven einer Regelfläche*, Spisy Přírodověd. fak. Univ. Brně, *393* (1958), 161—188.

[5] Obůrka O., *Zum Studium der Umschwungstrahlflächen mittels der Methode der Differentialgleichungen*, Časop. pěstov. mat. *87* (1962), 63—75.

[6] Obůrka O., *Křivky a plochy vibrátorové*, Sborník Vysokého učení technického 1965, 97—131.

[7] Terracini A., *Direttrici congiunte di una rigata*, Rend. Semin. mat. Univ. e Politechn. Torino. *9* (1949—1950), 325—342.

[8] Wilczynski E. J., *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig 1926.

[9] Wunderlich W., *Zur Geometrie des gedämpften harmonischen Umschwungs*, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. Abt. IIa. *173* (1964), 7—28.

Došlo 19. 12. 1966,
nové znenie 6. 2. 1967.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty Vysokého učení technického, Brno

ON A CERTAIN CLASS OF KINEMATICALLY GENERATED RULED SUFRACES

OTO OBŮRKA

Summary

The present paper contains a study of space curves and ruled surfaces created by screwing combined with damped oscillation in the direction of the axis of the screwing movement. The curves created by the movement of a point are given by equations (1.3). Affine properties important for the construction of curves (1.3) and properties of osculating and normal planes have been derived.

The main part of the paper is devoted to the study of developable and nondevelopable ruled surfaces generated by the damped oscillation — screwing motion of straight lines. The system of second — order differential equations (6.5) of the family of surfaces has

been derived, the projective invariants of Čech's theory calculated, remarkable R systems on these surfaces have been studied. The surface belongs to a linear complex. Further metric and projective properties of these surfaces habe been found. The line of striction and the improper curve are biconjugated director curves of the surface in the sense of A. Terrachini' s theory. Some properties interesting from the point of view of descriptive geometry are found.