Matematicko-fyzikálny časopis

Václav Medek

O obryse vypuklých plôch

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 4 (1954), No. 1, 38--42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126453

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1954

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O OBRYSE VYPUKLÝCH PLÔCH

VÁCLAV MEDEK

Pojem obrysu plochy, jeden zo základných pojmov deskriptívnej geometrie, nebýva dosť presne vymedzený a často sa pri jeho definícii odvolávame na jeho priestorovú názornosť.

V ďalšom by som chcel podať definíciu obrysu vypuklých plôch pre premietanie z bodu S na rovinu π, ktorá neprechádza bodom S.

Pod vypuklou nadplochou v E_n budem rozumieť množinu hraničných bodov vypuklej oblasti, ktorej všetky body neležia v jedinej nadrovine. Pre $n = 3$ dostávame vypuklú plochu, pre $n = 2$ vypuklú krivku.

Vypuklú oblasť s jej vypuklou plochou budem nazývať *vypuklým telesom.*

1. Nech F je nejaké vypuklé teleso, ktoré definuje vypuklú plochu Φ ako súhrn jeho hraničných bodov. Zostrojme stredom premietania S všetky polpriamky, ktorých začiatočné body sú v bode S a obsahujú vždy aspoň jeden bod telesa F. Súhrn bodov všetkých takto vzniknutých polpriamok označme P.

Definícia 1. *Súhrnu P bodov budeme hovoriť premietacie teleso plochy Φ.*

Veta 1. *Premietacie teleso P vypuklej plochy Φ je vypuklé.*

Za účelom dôkazu si zvoľme dva ľubovoľné, od seba rôzne body MN telesa P. Potom polpriamka SM musí byť určená nejakým bodom A telesa F a polpriamka SN nejakým bodom B telesa F. Pretože teleso F je vypuklé, každý bod úsečky AB prislúcha telesu F. Z toho priamo vyplýva, že aj každý bod úsečky MN prislúcha telesu P, ktoré je teda vypuklé.

Definícia 2. *Ak existuje hraničná vypuklá plocha* Π *telesa P, budeme jej hovoriť premietacia plocha vypuklej plochy Φ.*

Poznámka. Vypuklá plocha Π nemusí niekedy vôbec existovať, alebo aj keď existuje, nemusí mať spoločné body s plochou Φ. Napr. vypuklá plocha Π neexistuje nikdy, ak stred premietania S je vnútorným bodom telesa F. Plocha Π nemá spoločné body s plochou Φ napr. vtedy, ak teleso F je polpriestor a stred premietania S je jeho vonkajším bodom. Vtedy plocha Π je rovinou rovnobežnou s rovinou Φ.

Na podklade takto zavedených pojmov môžeme zaviesť pojem skutočného obrysu vypuklej plochy Φ.

Definícia 3. *Skutočným obrysom vypuklej plochy Φ pre stred premietania v bode S je prienik plochy Φ a jej premietacej plochy* Π.

Z poznámky k definícii 2 vyplýva, že skutočný obrys vypuklej plochy Φ môže mať veľmi rozmanitý tvar, resp. môže to byť aj prázdna množina. Ak napr. teleso P je kocka a stred premietania S je jedným jej vrcholom, skutočný obrys tvoria jej tri steny obsahujúce bod S. Skutočný obrys je prázdna množina vždy vtedy, ak stred premietania S je vnútorným bodom telesa F, alebo vtedy, ak premietacia plocha Π a plocha Φ majú prázdny prienik.

Zostrojme ďalej vypuklé teleso $\overline{P}$ a jeho hraničnú vypuklú plochu $\overline{\Pi}$ stredove symetrické k telesu P a ploche Π vzhľadom na stred premietania S. Potom môžeme zaviesť:

Definícia 4. *Zdanlivým obrysom vypuklej plochy Φ je súčet prienikov plôch* Π *a* $\overline{\Pi}$ *s rovinou* π.

Keby sme vzali do úvahy iba premietaciu plochu Π vypuklej plochy Φ a jej prienik s priemetňou π, dostali by sme *medzu vrhnutého tieňa* plochy Φ pri centrálnom osvetlení zo stredu v bode S.

Zdanlivý obrys vypuklej plochy môže mať veľmi rozličný tvar; závisí od vzájomnej polohy priemetne π a vypuklých telies P a $\overline{P}$. Ak teleso P nie je celým priestorom ani polpriestorom a ak priemetňa π obsahuje jeho vnútorné body, potom prienik plochy Π s priemetňou je vypuklá krivka. To isté platí aj o telese $\overline{P}$. Za uvedených predpokladov o telesách P a $\overline{P}$ môžu potom nastať celkove 3 typy zdanlivého obrysu vypuklej plochy: 1. dve vypuklé krivky (obidve telesá P a $\overline{P}$ majú s priemetňou spoločné vnútorné body), 2. jedna vypuklá krivka (práve jedno z telies P a $\overline{P}$ má s priemetňou spoločné vnútorné body), 3. prázdna množina (ani jedno z telies P a $\overline{P}$ nemá s priemetňou spoločné body).

2. Nech rovina τ je opornou rovinou premietacej plochy Π, ktorá obsahuje aspoň jeden jej bod T rôzny od bodu S. Potom ľahko dokážeme, že rovina τ obsahuje celú polpriamku ST. Predpokladajme naopak, že rovina τ obsahuje z polpriamky ST iba bod T. Potom polpriamka ST pretína rovinu τ v bode T a na polpriamke ST budú potom existovať body, ktoré ležia na jednej strane, a body, ktoré ležia na druhej strane roviny τ. Pretože celá polpriamka ST prislúcha ploche Π, nemohla by byť rovina τ jej opornou rovinou.

Predpokladajme, že zdanlivý obrys m^s plochy Φ vznikol ako rez premietacej plochy Π s rovinou π. Nech ďalej krivka k na ploche Φ má spoločný aspoň jeden bod K s jej skutočným obrysom. Potom aj krivka k^s musí mať s obrysom m^s spoločný bod K^s.

Nech τ je oporná rovina plochy Π (a teda aj plochy Φ) v bode K. Potom priesečnica t rovín τ a π musí byť opornou priamkou krivky m^s aj krivky k^s.

Tvrdenie vyplýva z toho, že krivky m^s aj k^s sú krivkami telesa P, pre ktoré je rovina τ opornou rovinou.

Za týchto predpokladov môžeme vysloviť:

Veta 2. *Ak plocha* Π *má v bode* K *jedinú opornú rovinu* τ *a krivka* k^s *má v bode* K^s *obyčajnú tangentu, potom touto tangentou je priesečnica* t *roviny* τ *s rovinou* π.

D ô k a z, Predpokladajme naopak, že krivka k^s má v bode K^s tangentu t' rôznu od priamky t. Potom by museli na krivke k^s v okolí bodu K^s existovať body na jednej aj druhej strane od priamky t, čo nie je možné, lebo priamka t je opornou priamkou krivky k^s.

Vetu by sme mohli snadno rozšíriť aj na ten prípad, ak zdanlivý obrys sa skladá z dvoch vypuklých kriviek, resp. ak zdanlivým obrysom je prienik plochy Π s rovinou π.

Veta 3. *Ak krivka* k^s *má v bode* K^s *jedinú opornú priamku* t, *potom aj krivka* m^s *má v bode* K^s *jedinú opornú priamku* t.

D ô k a z. Predpokladajme, že krivka m^s má v bode K^s opornú priamku t' rôznu od priamky t. Potom priamka t' by musela byť opornou priamkou aj krivky k^s, čo odporuje predpokladu.

Konštrukciu zdanlivého obrysu plochy Φ môžeme previesť napr. takto: Bodom S zostrojíme ľubovoľný sväzok rovín Σ a vyberieme z rovín sväzku len tie, ktoré majú s plochou Φ spoločný aspoň jeden bod. Nech ϱ je jedna taká rovina. Spoločné body roviny ϱ a plochy Φ môžu vytvoriť: 1. dvojrozmerný vypuklý útvar, 2. vypuklú krivku, 3. vypuklú časť priamky, 4. jeden bod.

V prvom prípade dostávame pre krivku zdanlivého obrysu jednu alebo najviac dve vypuklé časti priamky. V druhom prípade sostrojíme z bodu S oporné priamky k danej vypuklej krivke (môžu byť najviac dve) a dostávame tak pre krivku zdanlivého obrysu najviac dva body. V treťom prípade dostávame opäť najviac dve vypuklé časti priamky a v štvrtom prípade jeden bod.

Ak uvažujeme o *paralelnom premietaní* v smere s, ktorý nie je rovnobežný s priemetňou π, potom premietacie teleso P je určené navzájom rovnobežnými priamkami určenými vždy bodmi telesa F. Premietacia plocha Π je potom tiež vytvorená priamkami navzájom rovnobežnými a pretína teda priemetňu π v jednej vypuklej krivke m^s.

3. Majme dve vypuklé plochy ${}^1\Phi\, {}^2\Phi$ (definované vypuklými telesami ${}^1F\, {}^2F$) a bod O. Pod súčtovou plochou $\Phi = {}^1\Phi + {}^2\Phi$ rozumieme hranicu množiny F, ktorej body dostaneme takto: Nech ${}^1A$ je ľubovoľný bod telesa ${}^1F$, ${}^2A$ ľubovoľný bod telesa ${}^2F$. Môžu nastať dva prípady:

a) body $O\,{}^1A\,{}^2A$ ležia na jednej priamke p; potom bodom telesa F bude ten bod A na priamke p, o ktorom platí $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O^1A} + \overrightarrow{O^2A}$;

b) body $O\,{}^1A\,{}^2A$ neležia na jednej priamke; potom bodom telesa F bude štvrtý vrchol A rovnobežníka $O\,{}^1A\,{}^2AA$ v rovine určenej bodmi $O\,{}^1A\,{}^2A$.

Veta 4. *Súčtová plocha Φ dvoch vypuklých plôch ${}^1\Phi\,{}^2\Phi$ je vypuklá.*

D ô k a z. Nech F je množina súčtov bodov vypuklých telies ${}^1F\,{}^2F$ pre počiatok sčítania v bode O. Nech AB sú dva ľubovoľné body množiny F a nech bod A vznikol ako súčet bodov ${}^1A \in {}^1F$, ${}^2A \in {}^2F$ a bod B ako súčet bodov ${}^1B \in {}^1F$, ${}^2B \in {}^2F$. Zostrojme teraz množinu M bodov, ktoré vzniknú ako súčty bodov ${}^1N^x\,{}^2N^y$, kde bod ${}^1N^x$ je ľubovoľný bod úsečky ${}^1A\,{}^1B$ a bod ${}^2N^y$ ľubovoľný bod úsečky ${}^2A\,{}^2B$. Posuňme za tým účelom úsečku ${}^2A\,{}^2B$ do takej polohy, aby bod ${}^2A$ splynul s bodom A; bod ${}^2B$ sa dostane potom do polohy ${}^2B'$ (zodpovedajúce body posunutej úsečky ${}^2A\,{}^2B$ budeme označovať čiarkou). Potom súčtom napr. bodu ${}^2N^y$ so všetkými bodmi úsečky ${}^1A\,{}^1B$ bude úsečka, ktorá vznikne z úsečky ${}^1A\,{}^1B$ takým posunutím, aby bod ${}^1A$ splynul s bodom ${}^2N^{y\prime}$. Množinu M dostaneme teda tak, že budeme posúvať úsečkou ${}^1A\,{}^1B$ tak, aby bod ${}^1A$ postupne splynul so všetkými bodmi úsečky ${}^2A'\,{}^2B'$. Množina M je teda rovnobežníkom, pre ktorý je úsečka AB uhlopriečkou. Pretože úsečka ${}^1A\,{}^1B$ prislúcha telesu ${}^1F$ a úsečka ${}^2A\,{}^2B$ telesu ${}^2F$, musí celý rovnobežník M a teda aj jeho uhlopriečka AB prislúchať telesu F a teleso F je potom vypuklé.

Podobným spôsobom definujeme sčítanie dvoch vypuklých kriviek v jednej rovine a práve tak dokážeme, že ich súčtom je opäť vypuklá krivka.

Veta 5. *Nech* ${}^1m^s\,{}^2m^s$ sú vypuklé *krivky zdanlivých obrysov vypuklých plôch ${}^1\Phi\,{}^2\Phi$ pre paralelné premietanie, ktorého smer nie je rovnobežný s priemetňou π; potom zdanlivým obrysom súčtovej plochy $\Phi = {}^1\Phi + {}^2\Phi$ je súčtová krivka m^s kriviek ${}^1m^s\,{}^2m^s$.*

D ô k a z. Predovšetkým dokážeme, že premietacie teleso P plochy Φ je súčtom premietacích telies ${}^1P\,{}^2P$ plôch ${}^1\Phi\,{}^2\Phi$. Skutočne, nech bodom A telesa F prechádza priamka a rovnobežná so smerom premietania s. Bod A nech vznikol ako súčet bodov ${}^1A\,{}^2A$ telies ${}^1F\,{}^2F$. Priamky ${}^1a\,{}^2a$ nech prechádzajú bodmi ${}^1A\,{}^2A$ rovnobežne so smerom s. Potom priamku a môžeme dostať napr. ako súčet bodu ${}^2A$ s bodmi priamky ${}^1a$. Zároveň ľahko nahliadneme, že súčtom bodov telies ${}^1P\,{}^2P$ môžeme dostať práve len body telesa P.

Premietnime ďalej bod O v smere s do roviny π do bodu O^s. Nech telesá ${}^1P\,{}^2PP$ pretínajú rovinu π vo vypuklých útvaroch ${}^1M^s\,{}^2M^s\,M^s$, ktorých hraničné krivky sú ${}^1m^s\,{}^2m^s\,m^s$. Zvoľme si ľubovoľný bod M^{xs} vypuklého útvaru M^s a zostrojme ním rovnobežku m^x so smerom s. Priamka m^x musí mať s telesom F spoločný aspoň jeden bod M^x; bod M^x nech vznikol ako súčet bodov ${}^1M^x\,{}^2M^x$ telies ${}^1F\,{}^2F$. Rovnobežník $O\,{}^1M^x\,{}^2M^x\,M^x$ sa premieta v smere s do roviny π ako rovnobežník $O^s\,{}^1M^{xs}\,{}^2M^{xs}\,M^{xs}$, pričom body ${}^1M^{xs}\,{}^2M^{xs}$ prislúchajú vypuklým útvarom ${}^1M^s\,{}^2M^s$. Zároveň je zrejmé, že sčítaním vypuklých útvarov ${}^1M^s\,{}^2M^s$ dostaneme práve len body vypuklého útvaru M^s. Z toho už tvrdenie našej vety vyplýva priamo.

Došlo do redakcie 15. marca 1953.

О КОНТУРЕ ВОГНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ВАЦЛАВ МЕДЕК

Выводы

Содержанием работы является — с дефиниторической точки зрения — уточнение понятия контура поверхности, применяемого в начертательной геометрии.