Matematicko-fyzikálny časopis

Josef Novák

# Jisté Cremonovy kvadratické transformace v rovině a jejich užití

*Matematicko-fyzikálny časopis*, Vol. 14 (1964), No. 4, 265--276

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126415`

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 14, 4, 1964

# JISTÉ CREMONOVY KVADRATICKÉ TRANSFORMACE V ROVINĚ A JEJICH UŽITÍ

JOSEF NOVÁK, Praha

Složitost konstrukce často brání většímu využití kvadratických transformací v konstruktivní geometrii křivek. Článek se zabývá Cremonovými kvadratickými transformacemi v rovině, které vznikají středovým průmětem Cremonovy kvadratické transformace mezi dvěma různými rovinami a které se vyznačují jednoduchou konstrukcí odpovídajících útvarů. Odvození transformací vede rovněž k snadné konstrukci tečen transformovaných křivek. Je ukázána aplikace těchto transformací v konstrukci kuželoseček a racionálních kubik a kvartik.

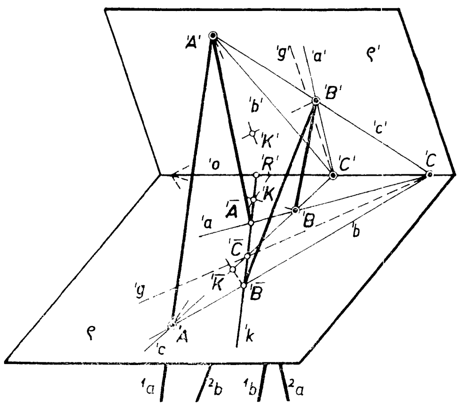
## I. OSOVÁ KVADRATICKÁ TRANSFORMACE

Vyjdeme ze známé Steinerovy konstrukce Cremonovy kvadratické transformace mezi dvěma různými rovinami $\varrho$ a $\varrho'$ v rozšířeném euklidovském prostoru (obr. 1). V ní jsou útvarům jedné roviny přiřazeny jejich síťové průměty ve druhé rovině. Bázi síťového promítání tvoří, mimo průmětnu (např. $\varrho'$), dvě mimoběžky $^1a$, $^1b$, které neprotínají průsečnici $'o$ rovin $\varrho$ a $\varrho'$. Síťový průmět $'K'$ bodu $'K$ sestrojíme nejvýhodněji jako průsečík stop rovin $\alpha \equiv ('K, {}^1a)$ a $\beta \equiv ('K, {}^1b)$ v rovině $\varrho'$. Hlavními body transformace jsou body $'A$, $'B$, $'C$ a $'A'$, $'B'$, $'C'$, kterým odpovídají stejnojmenné hlavní přímky druhé soustavy. Přitom je $'C \in {}'c'$ a $'C' \in {}'c$.

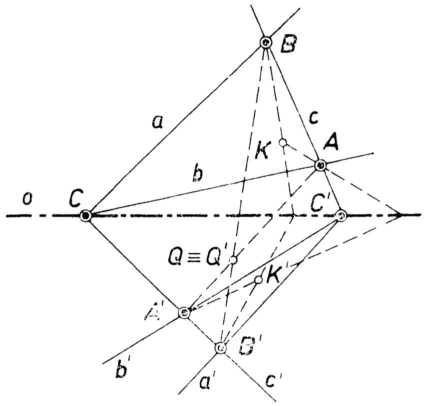
Základní konstrukce bodu $'K'$, který odpovídá danému bodu $'K$, ukazuje, že Steinerova konstrukce je založena pouze na incidenčních vztazích v rovinách $\varrho$ a $\varrho'$. Lze ji tedy zobrazit ve dvojstopním zobrazení se stopními rovinami $\varrho$ a $\varrho'$. Obrazem Steinerovy konstrukce je pak konstrukce Cremonovy kvadratické transformace v rovině (obrazy útvarů budeme nadále značit bez čárky vlevo nahoře). Neleží-li střed promítání na žádné z přímek $^1a$, $^1b$, snadno nahlédneme, že platí

**Věta 1.** *Mějme v rovině dvě dvojice různých bodů $A$, $A'$ a $B$, $B'$ a přímku $o$, která jimi neprochází. Dále nechť je $A \neq B$, $A' \neq B'$ a nechť přímky $c \equiv AB$, $c' \equiv A'B'$ protínají přímku $o$ v různých bodech $C'$ a $C$.*

*Příbuznost v této rovině, v níž každému bodu $K \not\equiv A, B, C$ jedné soustavy odpovídá bod druhé soustavy $K'$ tak, že spojnice $A'K'$ resp. $B'K'$ je incidentní s průsečíkem přímky $o$ se spojnicí $AK$ resp. $BK$, je Cremonova kvadratická transformace. Jejími hlavními body jsou trojice bodů $A, B, C$ a $A', B', C'$, kterým odpovídají stejnojmenné hlavní přímky $a' \equiv B'C'$, $b' \equiv A'C'$, $c'$ a $a \equiv BC$, $b \equiv AC$, $c$. Body přímky $o$ (s výjimkou hlavních bodů) a průsečík $Q \equiv Q'$ přímek $AA'$ a $BB'$ jsou samodružnými body transformace* (obr. 2).

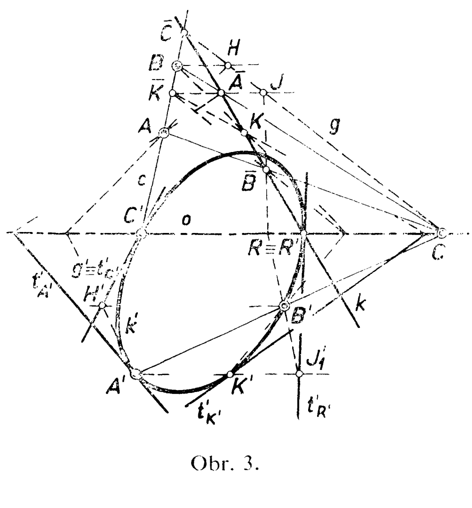


Obr. 1.



Obr. 2.

Tuto transformaci budeme nazývat *osovou kvadratickou transformací*, zkráceně **O**-*transformací*, a přímku $o$ nazveme její *osou*. Doehlemann k ní dospívá při vyšetřování samodružných elementů Cremonovy kvadratické transformace v rovině ([1], str. 41).



Obr. 3.

Připomeňme zde, že výsledky, které odvodíme pro jednu soustavu, platí zřejmě i pro druhou soustavu.

Na obr. 3 je ukázána jednoduchá lineární konstrukce bodů kuželosečky užitím **O**-transformace. Bodům přímky $k \not\ni A, B, C$ odpovídají body jednoduché kuželosečky $k'$, která prochází samodružným bodem $R' \equiv k \,.\, o$ a hlavními body $A', B', C'$. Ty odpovídají průsečíkům $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ přímky $k$ s hlavními přímkami $a, b, c$.

Prochází-li přímka $k$ po řadě jednotlivými hlavními body $A, B, C$, odpovídají jí složené kuželosečky $k' \equiv (a', A'R')$, $k' \equiv (b', B'R')$, $k' \equiv (c', C'K')$, kde $R' \equiv o \,.\, k$ a $K \in k$. Jak je vidět, je součástí složených kuželoseček vždy hlavní přímka. Nebudeme-li tuto součást uvažovat, potom přímce $k$ procházející hlavním bodem odpovídá přímka $k'$, která je incidentní se stejnojmenným hlavním bodem a obráceně. Hlavnímu bodu na přímce $k$ odpovídá průsečík odpovídající hlavní přímky s přímkou $k'$. Poznamenejme, že hlavní přímka se transformuje ve stejnojmenný hlavní bod druhé soustavy.

Uvedené zúžení pojmu odpovídajícího útvaru vede k jednojednoznačné příbuznosti mezi daným a transformovaným útvarem. V následující poznámce se zcela obecně umluvíme na tomto zúžení.

Poznámka 1. Nadále přiřadíme danému útvaru, který prochází hlavními body, útvar bez hlavních přímek odpovídajících příslušným hlavním bodům. Každému z nich pak odpovídají společné body odpovídající hlavní přímky s transformovanými tečnami útvaru v uvažovaném hlavním bodě a obráceně, jak plyne z transformace mezi rovinami $\varrho$ a $\varrho'$.

Odvození **O**-transformace z Cremonovy kvadratické transformace mezi dvěma rovinami se ukáže výhodným při vyšetřování tečen křivky $k'$, která odpovídá dané křivce $k$. Vyslovíme nejdříve větu o tečnách kuželosečky $k'$, která odpovídá v dané **O**-transformaci přímce $k$.

**Věta 2.** *Tečna $t'_{K'}$ kuželosečky $k'$ v jejím libovolném bodě $K' \not\equiv C'$, $R'$ prochází průsečíkem osy $o$ se spojnicí $K\bar{K}$. Přitom bod $\bar{K}$ je incidentní s hlavní přímkou $c$ a jeho spojnice $\bar{K}\bar{A}$ resp. $\bar{K}\bar{B}$ prochází průsečíkem osy $o$ se spojnicí $KA$ resp. $KB$.*

*Tečna kuželosečky v bodě $C'(R')$ odpovídá přímce $g \equiv C\bar{C}$ (přímce $g \equiv C\bar{C}$ za předpokladu, že body $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou zvoleny hlavními body nečárkované soustavy)* (obr. 3).

Stačí dokázat, že stejná věta platí v Cremonově kvadratické transformaci mezi dvěma rovinami, kterou jsme uvažovali zpočátku (obr. 1). Přímky ${}^1a$, ${}^1b$, $'k$ určují zborcenou kvadriku $\varkappa$, jejíž řez rovinou $\varrho'$ je kuželosečka $'k'$. Tečna této kuželosečky v bodě $'K'$ je průsečnicí roviny $\varrho'$ s tečnou rovinou zborcené kvadriky $\varkappa$ v bodě $'K'$. Tečná rovina je určena přímkami obou regulů, které procházejí bodem $'K'$, a jejich stopníky v rovině $\varrho$ jsou právě body $'K$ a $'\bar{K}$. Jejich spojnice je stopou tečné roviny, která protíná přímku $'o$ v bodě incidentním s hledanou tečnou. Tím je první část věty dokázána.

Tento důkaz nevede k cíli pro body $'C'$ a $'R'$, neboť přímky obou regulů kvadriky $\varkappa$, které jimi procházejí, protínají přímku $'o$. Nelze tudíž přímo stanovit stopy hledaných tečných rovin v rovině $\varrho'$. Tvrzení dokážeme nejdříve pro bod $'C'$. Všechny zborcené kvadriky, určené mimoběžkami ${}^1a$, ${}^1b$ a tečnou rovinou $\varrho$ s bodem dotyku $'\bar{C} \in {}'c$, mají podle Chaslesovy věty v bodech přímky $'c$ totožné tečné roviny. Zvolme tu zborcenou kvadriku, která prochází bodem $'C$. Pak ji rovina $\varrho'$ protíná ve složené kuželosečce, jejíž součástí je přímka $'g'$, která prochází bodem $'C'$ a odpovídá přímce $'g \equiv {}'\bar{C}\,{}'C$, což bylo dokázati. Na obr. 3 je přímka $g' \equiv t'_{C'}$ sestrojena pomocí bodu $H'$, který odpovídá bodu $H \in g$.

Zaměníme-li přímky $'k$, $'c$ a s nimi dvojice bodů $'\bar{A}$, $'\bar{B}$ a $'A$, $'B$, pak přímce $'k_1 \equiv 'c$ odpovídá při změněných hlavních bodech $'A_1 \equiv '\bar{A}$, $'B_1 \equiv '\bar{B}$ kuželosečka $'k'_1$, která je totožná s kuželosečkou $'k'$. Tečna kuželosečky $'k'_1$ v bodě $'C'_1 \equiv 'R'$ je tedy totožná s tečnou kuželosečky $'k'$ v bodě $'K'$. Tím je dokázána závěrečná část věty. Na obr. 3 je tečna $t'_{R'}$ sestrojena pomocí bodu $J'_1$, který odpovídá bodu $J \in g$.

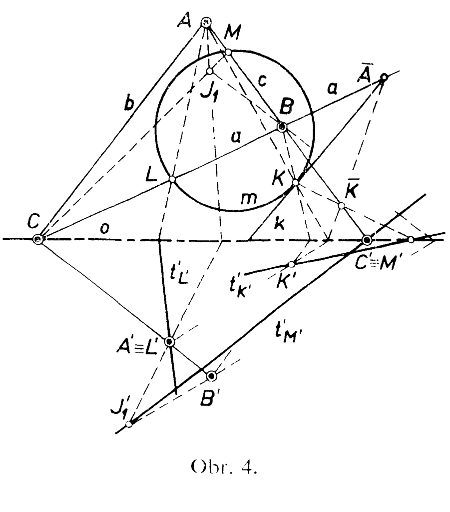
**Poznámka 2.** Leží-li samodružný bod $Q$ na ose $o$ a přímka $k$ jím prochází, tzn. $Q \equiv R$, pak tečnou kuželosečky $k'$ v bodě $R'$ je přímka $k$. V tomto případě tečná rovina zborcené kvadriky v bodě $'R'$ je totiž promítací rovinou a její průsečnice s rovinami $\varrho$ a $\varrho'$ v průmětu splývají.

S pomocí věty 2 lze sestrojit tečny křivky $m'$, která odpovídá v **O**-transformaci křivce $m$. Tečně $k \not\ni A, B, C$ v regulárním bodě $K$ křivky $m$ odpovídá kuželosečka $k'$, která se dotýká v bodě $K'$ křivky $m'$ ([2], str. 620). Hledaná tečna $t'_{K'}$ křivky $m'$ v bodě $K'$ je pak totožná s tečnou kuželosečky $k'$ v bodě $K'$, kterou sestrojíme známým způsobem. Dále odpovídá tečně $k$, která prochází jedním hlavním bodem, různým od bodu dotyku $K$, tečna $t'_{K'} \equiv k'$ křivky $m'$. Dotýká-li se křivka $m$ hlavní přímky, pak tečny křivky $m'$ v odpovídajícím hlavním bodě sestrojíme na základě poznámky 1. Nalezené výsledky shrneme ve větě

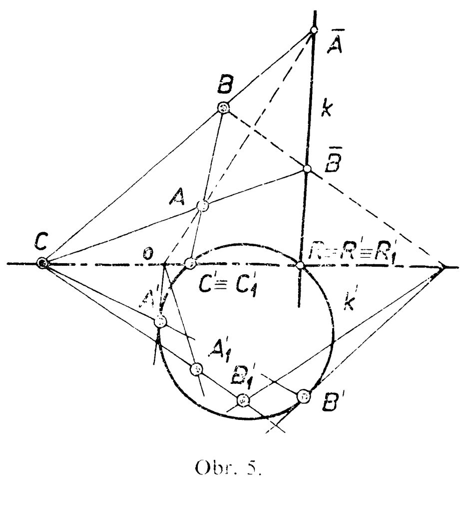
**Věta 3.** *Tečna $t'_{K'}$ křivky $m'$ v bodě $K'$ je tečnou kuželosečky $k'$ nebo přímkou $k'$, která odpovídá tečně $k \not\ni a, b, c$ křivky $m$ v jejím regulárním bodě $K \not\equiv A, B, C$.*

*Je-li tečna $k \equiv x$ hlavní přímkou a bod $K \equiv Y$ hlavním bodem, dotýká se hlavní přímka $y'$ v hlavním bodě $X'$ křivky $m'$. Je-li bod $K$ různý od hlavního bodu, dotýká se křivka $m'$ v hlavním bodě $X'$ přímky, která odpovídá spojnici bodu $K$ s protilehlým hlavním bodem $X$.*

Na obr. 4 jsou sestrojeny tečny v hlavních bodech $A' \equiv L'$, $C' \equiv M'$ a v obecném bodě $K'$ křivky $m'$, která odpovídá v dané **O**-transformaci kružnici $m$.




Obr. 4.




Obr. 5.

Důležitou úlohu zastává kuželosečka, která odpovídá nevlastní přímce. Nazveme ji *úběžnicovou kuželosečkou*. Budeme se zabývat jen případy, kdy tato kuželosečka bude *jednoduchá*, tzn. hlavní body soustavy opačné k soustavě úběžnicové kuželosečky jsou vlastní.

**Věta 4.** *V* **O**-*transformaci je úběžnicová kuželosečka buď parabolou, jestliže spojnice stejnojmenných hlavních bodů mají společný nevlastní bod, nebo hyperbolou. Osa paraboly resp. asymptota hyperboly prochází nevlastním bodem osy* $o$.

Důkaz: Průsečík $R$, osy $o$ s nevlastní přímkou $u$ je bod samodružný, kterým prochází tedy i úběžnicová kuželosečka $u'$. Je-li $R \equiv Q$, kde $Q \equiv AA' . BB'$, pak podle poznámky 2 je nevlastní přímka $u$ tečnou kuželosečky $u'$, která je tudíž parabolou.

Při aplikacích **O**-transformace se často řeší

**Úloha 1.** Jsou dány tři body $A$, $B$, $C$, které neleží v přímce a přímka $k$, která jimi neprochází. Sestrojte **O**-transformaci s hlavními body $A$, $B$, $C$ tak, aby přímce $k$ odpovídala kružnice $k'$.

Řešení (obr. 5): Zvolme bod $C'$ tak, aby přímky $A\bar{A}$ a $B\bar{B}$ neprotínaly úsečku $C'R'$, kde $R' \equiv k . CC'$. Dále zvolme hlavní body $A'_1$, $B'_1$ podle předpokladů z věty 1. Přímce $k$ pak odpovídá kuželosečka $k'_1$. Ta prochází body $C'$ a $R'$ a dotýká se v bodech $A'_1$, $B'_1$ přímek, které odpovídají spojnicím $A\bar{A}$ a $B\bar{B}$. Kuželosečce $k'_1$ můžeme přiřadit v jisté středové kolineaci, jejíž osu zvolíme v ose $o$, libovolnou kružnici $k'$, která prochází samodružnými body $C' \equiv C'_1$ a $R'$. Pak tečnám kuželosečky $k'_1$ v bodech $A'_1$, $B'_1$ odpovídají tečny kružnice $k'$ v bodech $A'$, $B'$. Přitom spojnice $A'B'$ musí procházet bodem $C$. Zvolíme-li body $A'$, $B'$, $C'$ za hlavní body druhé soustavy, odpovídá přímce $k$ kružnice $k'$.

V následujících příkladech ukážeme užití **O**-transformace v řešení úloh o kuželosečkách.

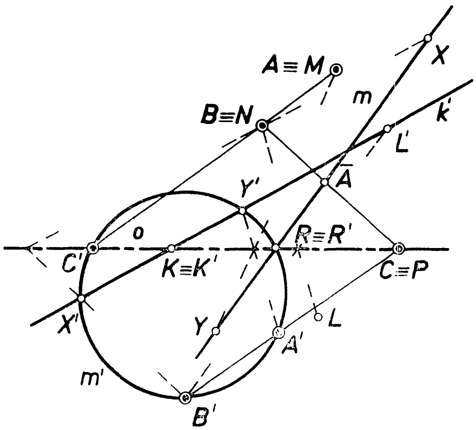
**Úloha 2.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $m$ a jednoduché kuželosečky $k$, která je určena pěti body $K$, $L$, $M$, $N$, $P$.

Řešení (obr. 6): Užijeme takové **O**-transformace, aby přímce $m$ odpovídala kružnice $m'$ a kuželosečce $k$ přímka $k'$. Vzájemná poloha kružnice $m'$ a přímky $k'$ řeší úlohu.

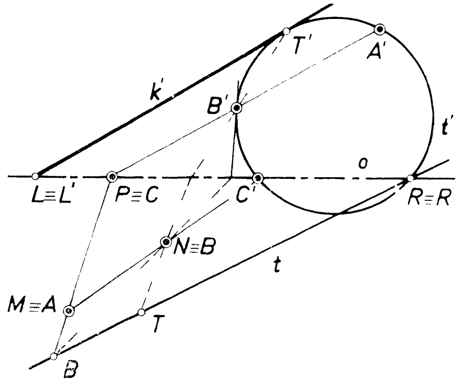
Tři body kuželosečky $k$ zvolíme za hlavní body $A \equiv M$, $B \equiv N$, $C \equiv P$. Body $C$ a $K$ proložíme osu $o$, přičemž dbáme na podmínku, aby spojnice $A\bar{A}$ neprotínala úsečku $C'R'$, kde $R' \equiv o . m$ a $\bar{A} \equiv a . m$. Další provedení je zřejmé z obrázku. Přímka $m$ protíná kuželosečku $k$ v bodech $X$ a $Y$.

**Úloha 3.** Kuželosečka $k$ je určena tečnou $t$ a čtyřmi body $L$, $M$, $N$, $P$. Sestrojte dotykový bod kuželosečky $k$ na tečně $t$.

Řešení (obr. 7): V **O**-transformaci přiřadíme přímce $t$ kružnici $t'$ a kuželosečce $k$ přímku $k'$. Přímka $k'$ musí být tečnou kružnice $t'$. Jejímu dotykovému bodu $T'$ odpovídá hledaný bod $T$. Na obrázku je provedeno jen jedno řešení.




Obr. 6.




Obr. 7.

## 2. STŘEDOVÁ KVADRATICKÁ TRANSFORMACE

K dalšímu zjednodušení konstrukce Cremonovy kvadratické transformace v rovině dojde, jestliže střed promítání ve dvojstopním zobrazení Steinerovy konstrukce zvolíme na jedné z mimoběžek $^1a$, $^1b$, např. na $^1a$. Potom body $A$ a $A'$ splývají v jediný bod $S$ a platí následující věta

**Věta 5.** *Mějme v rovině body $S$, $B$, $B'$, které neleží v přímce a přímku $o$, která žádným z nich neprochází. Průsečíky spojnic $SB \equiv c$ a $SB' \equiv c'$ s přímkou $o$ označíme $C'$ a $C$.*

*Příbuznost v této rovině, v níž každému bodu $K \not\equiv S, B, C$ jedné soustavy, odpovídá bod druhé soustavy $K'$ tak, že spojnice $KK'$ prochází bodem $S$ a spojnice $B'K'$ je incidentní s průsečíkem přímky $o$ se spojnicí $BK$, je Cremonova kvadratická transformace v rovině. Jejími hlavními body jsou trojice bodů $A$, $B$, $C$ a $A'$, $B'$, $C'$, kterým odpovídají stejnojmenné hlavní přímky $a' \equiv B'C'$, $b' \equiv A'C'$, $c'$ a $a \equiv BC$, $b \equiv AC$, $c$ a obráceně. Přímky $o$ a $s \equiv BB'$ a přímky incidentní s bodem $S$ (s výjimkou hlavních přímek) jsou samodružné. Rovněž body přímek $o$ a $s$ jsou samodružné* (obr. 8).

Uvedenou transformaci budeme nazývat *středovou kvadratickou transformací*, zkráceně **S**-*transformací*. Bod $S$ nazveme jejím *středem* a přímku $o$ její *osou*.

Věty 2 a 3 o tečnách zůstávají v platnosti i v **S**-transformaci, neboť střed promítání nehrál v důkazech těchto vět žádnou úlohu.

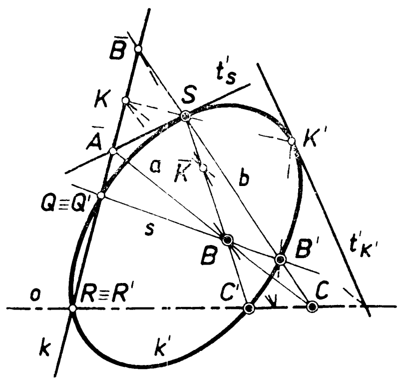
Na obr. 8 je sestrojena kuželosečka $k'$, která v dané **S**-transformaci odpovídá přímce $k$, jež neprochází žádným hlavním bodem. Podle věty 2 jsou sestrojeny tečny $t'_S$ a $t'_{K'}$ kuželosečky $k'$.

Jsou-li hlavní body jedné soustavy vlastní, pak úběžnicová kuželosečka druhé soustavy je jednoduchá. Musí procházet samodružnými nevlastními body, které podle věty 5 leží pouze na přímkách $o$ a $s$.

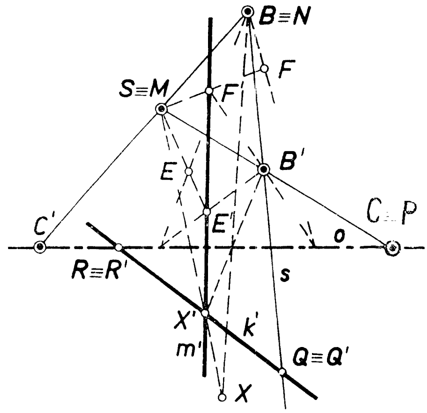
**Věta 6.** *Úběžnicová kuželosečka v* **S**-*transformaci je parabolou, mají-li s a o společný nevlastní bod; v opačném případě je hyperbolou.*

**Úloha 4.** Kuželosečky $k \equiv (M, N, P, Q, R)$ a $m \equiv (M, N, P, E, F)$ mají tři společné body. Sestrojte jejich čtvrtý průsečík $X$.

Řešení (obr. 9): Společné body $M$, $N$, $P$, zvolíme za hlavní body S-transformace. Kuželosečkám $k$ a $m$ v této transformaci odpovídají přímky $k'$ a $m'$. Jejich průsečíku $X'$ odpovídá hledaný bod $X$.



Obr. 8.



Obr. 9.

Na několika příkladech jsme ukázali, jak řešit pomocí **O**- a **S**-transformací – tedy jednotnou metodou – různorodé úlohy o kuželosečkách, které by jinak vyžadovaly hlubší znalosti projektivní geometrie.

Zabývejme se nyní aplikacemi zkoumaných transformací v konstrukci racionálních kubik a kvartik.

Je známé, že kuželosečce v Cremonově kvadratické transformaci odpovídá podle incidence s hlavními body buď přímka nebo kuželosečka nebo kubika s dvojnásobným bodem nebo kvartika se 3 dvojnásobnými body ([1], str. 9).

**Úloha 5.** Sestrojte kubiku, která je určena dvojnásobným bodem $S$ s tečnami $t$, $v$ a čtyřmi body $K$, $L$, $M$, $N$.

Řešení (obr. 10): V S-transformaci, pro níž dvojnásobný bod $S$ je středem, body $K$, $L$ hlavními body $K \equiv B$, $L \equiv C$, spojnice $LM$ osou $o$ a přímka $s \equiv BB'$

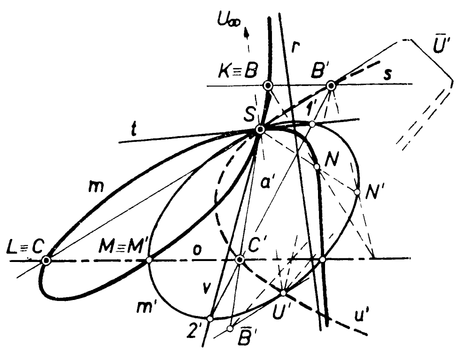
je zvolena rovnoběžně s $o$. dané kubice $m$ odpovídá kuželosečka $m'$. Ta prochází body $S$, $M'$, $N'$, $1'$, $2'$, kde body $1'$ a $2'$ jsou průsečíky tečen $t$ a $v$ s hlavní přímkou $a'$.

Konstrukce bodů a tečen kubiky je zřejmá, obrátíme proto svou pozornost na asymptotu kubiky. Pro vyšetření vzájemné polohy nevlastní přímky $u$ a kubiky $m$ sestrojíme úběžnicovou kuželosečku $u'$. Jelikož je osa $o$ rovnoběžná s přímkou $s$, je podle věty 6 úběžnicová kuželosečka $u'$ parabolou, která prochází body $S$, $B'$ $C'$. Její tečnu v některém z těchto bodů sestrojíme podle věty 2.

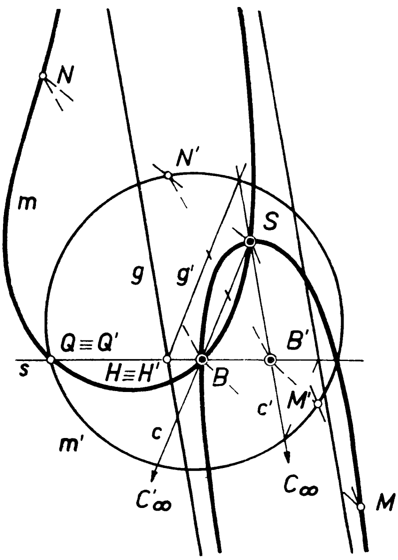
Úběžnicová parabola protíná kuželosečku $m'$ v dalším bodě $U'$, kterému odpovídá nevlastní bod $U_\infty$ kubiky $m$. Tečnu kubiky v tomto bodě, tj. asymptotu $r$, sestrojíme podle věty 3.

Jestliže osa $o$ nebo přímka samodružných bodů $s$ zkoumaných transformací bude nevlastní, pak kružnici odpovídá křivka, která prochází kruhovými body, neboť tyto body jsou samodružné. Podle incidence kružnice s hlavními body jí odpovídá buď kružnice nebo cirkulární kubika nebo cirkulární kvartika.

V teorii synteze mechanismů má významné místo tzv. Burmesterova křivka. Úlohy, které se v této souvislosti ([3], str. 226–242) řeší různými transformacemi, mají snadné řešení S-transformací. Burmesterova křivka je totiž přímou nebo kosou




Obr. 10.




Obr. 11.

strofoidou, tedy cirkulární kubikou, jejíž tečny ve dvojnásobném bodě jsou k sobě kolmé. Odpovídá jí tedy v S-transformaci kružnice $m'$, jejíž průměr je hlavní přímkou $a'$.

**Úloha 6.** Burmesterova křivka je určena dvojnásobným bodem $S$ s tečnami $t$, $v$ a dvěma body $P$, $Q$. Sestrojte její třetí průsečík s přímkou $PQ$.

Řešení: V S-transformaci se středem v dvojnásobném bodě $S$, nevlastní osou $o$ a přímkou samodružných bodů $s \equiv PQ$, odpovídá dané křivce $m$ kružnice $m' \equiv$

$\equiv (S, P, Q)$. Hlavní bod $B$ na přímce $s$ je hledaným průsečíkem. Přitom je přímka $SB$ rovnoběžná s průměrem kružnice $m'$, jehož koncové body leží na tečnách $t$ a $v$.

**Úloha 7.** Sestrojte cirkulární kvartiku, která je určena dvojnásobnými body $S$, $B$, $C$, a body $M$, $N$, $Q$.

Řešení (obr. 11): Určíme S-transformaci středem $S$, nevlastní osou $o$, hlavními body $B$, $C$, a přímkou $s \equiv BQ$. Daná kvartika $m$ se touto transformací transformuje v kružnici $m'$. Tato kružnice prochází body $M'$, $N'$, $Q'$, které odpovídají bodům $M$, $N$, $Q$.

Užitím této transformace snadno sestrojíme body a tečny kvartiky. Asymptotám kvartiky odpovídají spojnice bodu $C'_x$ s průsečíky přímky $c'$ s kružnicí $m'$. Přitom se tyto odpovídající přímky (na obr. 11 přímky $g$ a $g'$) protínají na přímce $s$.

Podle předchozí úlohy lze sestrojit trisekantu ([4], str. 231), která je určena středem $W$ a asymptotou $g$. Odtud pak plyne konstrukce trisekanty $m$ jako odpovídající křivky ke kružnici $m'$ o středu $O'$ a poloměru $r$ v následující S-transformaci: Hlavní body $S$ a $B'$ jsou souměrně položené podle $O'$, přičemž $\overline{SO'} = r/\sqrt{2}$, hlavní přímka $c$ je kolmá na $c'$ a s ní incidentní hlavní bod $B$ splňuje podmínku $\overline{SB} = 2r$. Osa transformace je nevlastní přímka.

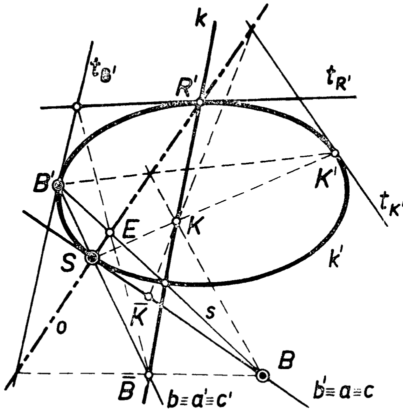
S-transformace tvoří část tzv. Maclaurinových transformací, které zavedl P. H. Schoute ([4], str. 87). Následující odstavec je věnován zbývajícím Maclaurinovým transformacím, které lze charakterizovat jako S-transformace se středem incidentním s osou. K nim patří i tzv. Kotelnikovova transformace, používaná v teorii synteze mechanismů ([3], str. 51).

## 3. SINGULÁRNÍ STŘEDOVÁ KVADRATICKÁ TRANSFORMACE

Nechť přímka báze síťového promítání, na níž jsme zvolili střed promítání dvojstopního zobrazení, protíná přímku $'o$ a není incidentní s rovinami $\varrho$ a $\varrho'$. Síťovým promítáním je i v tomto případě indukována Cremonova kvadratická transformace mezi rovinami $\varrho$ a $\varrho'$. Jejími hlavními body jsou stopníky přímek $^1a$, $^1b$, (tj. $'A \equiv 'A'$ a $'B$, $'B'$), které jsou základními body homaloidních sítí kuželoseček v $\varrho$ a $\varrho'$. Třetím základním prvkem sítě v rovině $\varrho$ ($\varrho'$) je hlavní přímka $'b$, ($'b'$), která je tečnou homaloidů v hlavním bodě $'A$ ($'A'$). Uvažovaná transformace má pak dva splývající hlavní body $'A \equiv 'C$ ($'A' \equiv 'C'$) ([1], str. 30, 31). Jejím průmětem je Cremonova kvadratická transformace v rovině, která má charakter S-transformace se středem na ose $o$.

**Věta 7.** *Mějme v rovině body $S$, $B$, $B'$, které neleží v přímce, a přímku $o$, která prochází právě bodem $S$.*

*Příbuznost v této rovině, v níž každému bodu $K \neq S$, $B$ jedné soustavy odpovídá* *bod $K'$ druhé soustavy podle předpisu* **S**-*transformace, je Cremonova kvadratická transformace se dvěma splývajícími hlavními body v obou soustavách. Hlavní body transformace jsou $S \equiv A \equiv C$, $B$ a $S \equiv A' \equiv C'$, $B'$. Jim odpovídají stejnojmenné hlavní přímky $SB' \equiv a' \equiv c'$, $SB \equiv b'$ a $a \equiv c \equiv b'$, $b \equiv a'$ a obráceně odpovídají hlavním přímkám stejnojmenné hlavní body. Přímky $o$ a $s \equiv BB'$ a přímky incidentní s bodem $S$ (s výjimkou hlavních přímek) jsou samodružné. Rovněž body přímek $o$ a $s$ jsou samodružné* (obr. 12).



Obr. 12.

Tuto transformaci nazveme *singulární středovou kvadratickou transformací* – zkráceně **I**-*transformací*.

Každé přímce $k \not\ni S$, $B$ odpovídá v **I**-transformaci jednojednoznačně jednoduchá kuželosečka $k'$, která prochází hlavním bodem $B'$, bodem $R' \equiv o \,.\, k$ a dotýká se v bodě $S$ přímky $b'$.

Snadno se dokáže, že konstrukce tečen kuželosečky $k'$ je pro body $K' \neq S$, $R'$ stejná jako ve větě 2 (s použitím bodů $B$, $\bar{B}$). V bodě $'R'$ je tečna kuželosečky $'k'$ průsečnicí tečné roviny $\tau$ zborcené kvadriky $\varkappa \equiv ({}^1a, {}^1b, {}'k)$ s rovinou $\varrho'$. Rovina $\tau$ je určena dvěma površkami různých soustav, jejichž průměty jsou $k$ a $o$. Průmět průsečnice roviny $\tau$ s rovinou $\beta \equiv ({}^1b, {}'\bar{B})$ je přímka $E\bar{B}$ (kde $E \equiv o \,.\, BB'$), jejíž průsečík s tečnou $t_{B'}$ je incidentní s hledanou tečnou $t_{R'}$ (obr. 12).

Všimněme si křivek, které odpovídají v **I**-transformaci kuželosečkám.

Jednoduché kuželosečce $m \ni S$, $B$, která se nedotýká hlavní přímky $b$, odpovídá jednoduchá kuželosečka $m' \ni S$, $B'$, která se dotýká v bodě $S$ kuželosečky $m$. V důkazu tohoto tvrzení je podstatné, že tečná rovina $\tau$ zborcené kvadriky $\varkappa \equiv ({}^1a, {}^1b, {}'m)$ v bodě $'A$ je promítací rovinou. Podle předpokladu je $\tau \not\ni {}'B'$ a řezem kvadriky $\varkappa$ rovinou $\varrho'$ je tedy jednoduchá kuželosečka $'m'$.

Jednoduchá kuželosečka $m$, která prochází hlavním bodem $B$ (resp. hlavním bodem $S$ a má v něm tečnu $t \neq b$), se transformuje v kubiku $m'$ o tečně $b'$ s bodem dotyku $S$ a o dvojnásobném bodě $B'$ (resp. o dvojnásobném bodě $S$ s tečnami $b'$ a $t'$). Dotýká-li se jednoduchá kuželosečka $m \not\ni B$ hlavní přímky $b$ v bodě $S$, odpovídá jí jednoduchá kuželosečka $m' \not\ni B'$, která se dotýká hlavní přímky $b'$ v bodě $S$. Tvrzení plynou z toho, že $'m'$ je řezem zborcené plochy 3. stupně $\varkappa \equiv ({}^1a, {}^1b, {}'m)$ rovinou $\varrho'$. Ve druhém případě je podle předpokladu spojnice $'A'\,'B'$ tvořící přímkou plochy $\varkappa$, jejíž řez rovinou $\varrho'$ se tedy rozpadá ve zmíněnou přímku a kuželosečku $'m'$.

Konečně se jednoduchá kuželosečka $m \not\ni S$, $B$ transformuje v racionální kvartiku $m'$, která má v bodě $S$ dvojnásobný bod se splývajícími tečnami v hlavní přímce $b'$ ([1]; str. 31, 32).

Jednoduchá kuželosečka $m$ se tedy transformuje v **I**-transformaci stejně jako v **O**- a **S**-transformaci podle incidence s hlavními body; přitom podmínka dotyku kuželosečky $m$ s hlavní přímkou $b$ v bodě $S$ odpovídá podmínce incidence se dvěma hlavními body. Bod $S$ kuželosečky $m$ je samodružný, jestliže je dotykovým bodem tečny $t \mathrel{\#} b$; je-li $t \equiv b$, transformuje se v průsečík ($\mathrel{\#} S$) odpovídající kuželosečky $m'$ resp. odpovídající přímky $m'$ s hlavní přímkou $a'$. V případě $t \equiv b$ nelze tedy bod $S$ transformovat podle poznámky 1.

Tečnu křivky $m'$, která odpovídá jednoduché kuželosečce $m$, v bodě $K' \mathrel{\#} S$ sestrojíme podle věty 3, což plyne z transformace mezi rovinami $\varrho$ a $\varrho'$. Tečnami v bodě $S$ jsme se již zabývali výše.

Ukazuje se, že **I**-transformace jsou velmi produktivní. Jimi se totiž kružnice transformuje v řadu významných racionálních kubik a kvartik. Jak známo, můžeme tímto způsobem sestrojit např. Descartův list, Diokleovu kisoidu, strofoidu atd. ([4], str. 89 a další). K nim můžeme připojit bez obtíží i další křivky. Uveďme např. kappa křivku a Külpovu konchoidu.

Kappa křivka $m'$ odpovídá kružnici $m$ v této **I**-transformaci: Hlavní přímky $b$, $b'$ jsou sdruženými průměry kružnice $m$, jedna jejich symetrála je osou $o$ a jejich nevlastní body jsou hlavními body $B'_\infty$, $B_\infty$. V bodě $S$ má kappa křivka dotykový uzel s tečnou $b'$.

Külpova konchoida ([4], str. 200) odpovídá kružnici $m$ v následující **I**-transformaci: Hlavní body $S$ a $B'$ jsou nevlastními body sdružených průměrů kružnice $m$, hlavní bod $B$ je středem kružnice $m$ a osa $o$ je rovnoběžnou tečnou kružnice $m$ s hlavní přímkou $c$.

Poznámka 3. Případem, kdy střed promítání dvojstopního zobrazení neleží na přímce báze síťového promítání, která protíná přímku $'o$, se nebudeme zabývat, neboť nevede k novému typu kvadratické transformace, ale ke složení **I**-transformace se středovou kolineací.

## LITERATURA


[1] Doehlemann K., *Geometrische Transformationen II*, Sammlung Schubert XXVIII, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig 1908.

[2] Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie*, Nakladatelství JČMF, Praha 1948.

[3] Геронимус Я. Л., *Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1962.

[4] Loria G. *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I*, B. G. Teubner, Leipzig—Berlin 1910.



Došlo 8. 7. 1963.



*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie strojní fakulty Českého vysokého učení technického, Praha*

# ÜBER GEWISSE QUADRATISCHE CREMONATRANSFORMATIONEN IN DER EBENE UND IHRE ANWENDUNGEN

Josef Novák

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden quadratische Cremonatransformationen in der Ebene, sogenannte **O-**, **S-** und **I-Transformationen**, die als Abbildung quadratisch verwandter Spurfelder eines Netzes nach dem Zweispurenprinzip erzeugt werden, behandelt. Im Falle der **O-** bzw. **S-**Transformation trifft keine der Brennlinien des Netzes die Schnittgerade der Spurebenen und das Abbildungszentrum liegt auf keiner bzw. einer Brennlinie. Schließlich trifft im Falle der **I-**Transformation die Brennlinie, welche mit dem Abbildungszentrum inzident ist, die Schnittgerade der Spurebenen. Dies führt zu einer Transformation mit zwei zusammenfallenden Hauptpunkten in beiden Feldern.

Die Einfachheit der Konstruktionen läßt breite Anwendungsmöglichkeiten dieser Transformationen zu. So werden vorerst Anwendungen an Kegelschnitten gezeigt, wobei die Einheitlichkeit der Lösungsmethode mannigfaltiger Aufgaben hervortritt, und weiter werden dann rationale Kurven 3. und 4. Grades, speziell zirkuläre Kurven dieser Art, behandelt.