Václav Polák

О преобразовании простых ломаных линий в плоскости

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 12 (1962), No. 3, 145--165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126325

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 12 1962 ČÍSLO 3

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОСТЫХ ЛОМАНЫХ ЛИНИЙ В ПЛОСКОСТИ

ВАЦЛАВ ПОЛАК, (VÁCLAV POLÁK) Брно

§ 1. Введение

Простая плоская ломаная линия $\boldsymbol{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ с собственными вершинами называется сечением односвязной области J из X в Y, если X, Y — две точки границы множества J и линия $\boldsymbol{P}$ лежит полностью — за исключением двух своих концов — в множестве J. В работе доказывается, что всяких два изогональных сечения множества J из X в Y могут быть переведены друг в друга конечным числом параллельных переносов сторон так, что при этих преобразованиях сохраняется свойство быть сечением и изогональность.

§ 2. Определения и вспомогательные теоремы

Пусть n — натуральное число и $\boldsymbol{P} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая n-ломаная линия, имеющая только собственные вершины. (Вершинами являются точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Собственной вершиной называется вершина, две соседние стороны которой лежат на разных прямых. Простой линией называется линия, непересекающаяся сама себя.) В дальнейшем мы будем предполагать, что ломаная линия имеет только собственные вершины. Для $i = 1, 2, \ldots, n$ пусть α_i — угол между векторами $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (в этом порядке, притом положительный смысл измерения углов мы берем против направления движения часовой стрелки, а из двух возможных углов между двумя векторами выбираем тот, который меньше 180°). Всегда имеет место $0 < |\alpha_i| < 180^\circ$. Для простого многоугольника тогда имеет место $\sum\limits_i \alpha_i = \pm 360^\circ$, где знаки зависят от его ориентировки.

Определение 1. Будем говорить, что простая n-ломаная линия является линией типа Ω, если $|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i| < 180^\circ$. О простой ломаной линии будем говорить, что она — типа Ω_∞, если она — типа Ω и оба ее крайних отрезка можно без ограничения одновременно продолжать без того, чтобы нарушалась простота.

Определение 2. Две простые ломаные линии $\mathbf{P} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$, $\mathbf{Q} = (B_0, B_1, \ldots, B_n, B_{n+1})$ назовем параллельными, если все векторы $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ попарно параллельны и одинаково направлены (для всех α_i, β_i имеет место $\alpha_i = \beta_i$).

Пусть $\mathbf{P} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая n-ломаная линия, $A_i (1 \leqq i \leqq n)$ — произвольная ее вершина, и $\mathbf{R} = (B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1})$ — такая линия типа Ω_γ, что векторы $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{B_kB_{k+1}}$ одинаково направлены и параллельны поочередно векторам $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Очевидно, существуют точки B_1', B_2', ..., B_k' такие, что линия $(A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1})$ параллельна $\mathbf{R}$, а линия $\mathbf{Q} = (A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1}, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая.)

Определение 3. Если простая линия $\mathbf{Q}$ получается из $\mathbf{P}$ описанным только что способом, то будем говорить, что линия $\mathbf{R}$ нами вложена в вершину A_i многоугольника $\mathbf{P}$. Это определение может быть распространено и на случай, когда A_i — несобственная вершина, т. е. точки A_{i-1}, A_i, A_{i+1} лежат на одной прямой. (Очевидно, существуют точки $B_1', B_2', \ldots, B_k', A_{i+1}'$ такие, что A_{i+1}' лежит на полупрямой $A_{i+2}A_{i+1}$, линия $(A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1}')$ параллельна $\mathbf{R}$ и линия $(A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1}', A_{i+2}, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая.)

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{P}$ *— простая ломаная линия типа* Ω. *Тогда существует простая ломаная линия* $\mathbf{R}$ *типа* Ω_γ, *параллельная* $\mathbf{P}$.

Доказательство проделаем полной индукцией по числу вершин. Для одноломаных линий утверждение, очевидно, выполнено. Так как всякая 2-ломаная линия типа Ω является линией типа Ω_γ, то наша лемма справедлива и для $n = 2$. Пусть $n \geqq 3$ — произвольное натуральное число и пусть лемма справедлива для всех k, $1 \leqq k < n$. Пусть $P = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ простая n-ломаная линия типа Ω. Пусть $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Потом линия $P' = (A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — типа Ω. По индукционному предположению построим линию R' параллельную P' и типа Ω_γ. Вложением линии $\mathbf{R}'$ во вторую вершину линии (B_0, B_1, B_2, B_3), у которой векторы $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{B_2B_3}$ одинаково направленные и параллельные поочередно векторам $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, построим некоторую линию $\mathbf{R}$. Если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, то рассмотрим последовательность $0, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Так как разность двух соседних членов этой последовательности (равно как и разность первого и последнего члена) отлична от нуля и лежит между числами $-180°$, $+180°$, то существует число i_0, $1 \leqq i_0 < n$ такое, что $|\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i| < 180°$, $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i| = |\sum_{i=i_0+1}^{n} \alpha_i| < 180°$ и по крайней мере одно из этих чисел отлично от нуля. Но это означает, что линии $\mathbf{P}_1 = (A_0, A_1, \ldots, A_{i_0}, A_{i_0+1})$, $\mathbf{P}_2 = (A_{i_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — типа Ω. Согласно индукционному предположению можно к ним построить линии $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ параллельные $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, типа Ω_∞. Эти линии вложим в обе вершины 2-ломаной линии $\mathbf{R}_3$, три стороны которой одинаково направлены и параллельны поочередно векторам $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_{i_0}A_{i_0+1}}$, $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ (по крайней мере одна из вершин линии $\mathbf{R}_3$ — несобственная). Искомая линия $\mathbf{R}$ построена.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— простой многоугольник,* V *— произвольная его вершина и пусть внутренний угол многоугольника* $\mathbf{R}$ *при вершине* V *— меньше* 180°. *Тогда произойдет по крайней мере один из следующих двух случаев: (i) существуют треугольник* (A, B, C) *и линии* $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ *типа* Ω_∞ *такие, что если их вложить в вершины* B, C, *то получится многоугольник* $\mathbf{S}$, *параллельный* $\mathbf{R}$ *(притом вершине* $V \in \mathbf{R}$ *соответствует* $A \in \mathbf{S}$*). (ii) Существует выпуклый четырехугольник* (A, B, C, D), *внутренняя часть которого содержит внутреннюю часть параллелограмма, определенного отрезками* AB, AD, *и существуют линии* $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ *типа* Ω_∞ *такие, что если их вложить в вершины* B, C, D, *то получится многоугольник* $\mathbf{S}$, *параллельный* $\mathbf{R}$ *(притом вершине* $V \in \mathbf{R}$ *соответствует* $A \in \mathbf{S}$*).*

Доказательство легко производится с помощью последовательности 0, α_1, $\alpha_1 + \alpha_2$, $\ldots$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (разность двух ее следующих друг за другом членов лежит между числами -180°, 180° и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 360^\circ$).

Определение 4. Пусть J — односвязная область в плоскости, X, Y — две точки ее границы и $\mathbf{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ — простая n-ломаная линия такая, что она полностью — за исключением двух своих концов — лежит в J. Тогда мы будем говорить, что $\mathbf{P}$ образует сечение области J из точки X в Y.

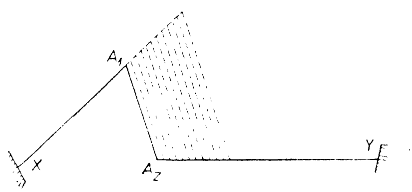

Рис. 1.

Определение 5. Пусть $\mathbf{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ — сечение области J из X в Y. Сечение $\mathbf{P}$ разбивает J на две связные области. Одну из них мы считаем положительной, вторую отрицательной. Выберем произвольную (отличную от нулевой и n-той) сторону сечения $\mathbf{P}$ (скажем, A_iA_{i+1}). Осуществим параллельный перенос прямой $p_i = A_iA_{i+1}$ в направлении, перпендикулярном ей, на расстояние $d > 0$ (см. рис. 1). Исходное положение прямой обозначим через $p_i^{(0)}$, конечное ее положение через $p_i^{(d)}$, а всякому промежуточному положению прямой при переносе поставим в соответствие число, представляющее величину переноса. Выберем этот перенос таким малым, чтобы для всякого $t \in [0, d]$ было определено сечение $(X, A_1, \ldots, A_{i-1}, p_{i-1} \cap p_i^{(t)}, p_i^{(t)} \cap p_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n, Y)$. Результатом этого процесса является преобразование сечения $\boldsymbol{P}$, называемое элементарным преобразованием сечения $\boldsymbol{P}$ или же элементарным переносом i-той стороны сечения $\boldsymbol{P}$ и обозначаемое либо через $\tau^{(i,d)}$, если мы имеем дело с переносом в положительную часть области J, либо через $\tau^{(i,-d)}$, если перенос происходит в отрицательную часть. Сечение $\boldsymbol{P}\tau^{(i,d)}$ является окончательным сечением, полученным с помощью описанного выше процесса (оно соответствует числу $t = d$). Вершины сечения $\boldsymbol{P}\tau^{(i,d)}$ обозначим через $A_j\tau^{(i,d)}$. Очевидно, для $i \neq j \neq i + 1$ имеем $A_j\tau^{(i,d)} \equiv A_j$. Тождественное преобразование (оно не переносит никакой стороны) мы будем также считать элементарным преобразованием.

Определение 6. Пусть $\tau^{(i,d)}$ — произвольное элементарное преобразование сечения $\boldsymbol{P}$ и пусть $d > 0$. Тогда для всякого $t \in [0, d]$ однозначно определено элементарное преобразование $\tau^{(i,t)}$ сечения $\boldsymbol{P}$. Для $t = 0$ получаем тождественное преобразование, для $t = d$ — первоначальное преобразование $\tau^{(i,d)}$. Множество этих преобразований, упорядоченное естественным образом (однооднозначным соответствием $t \leftrightarrow \tau^{(i,t)}$) обозначим через $I(\tau^{(i,d)})$. Это множество однозначно определено преобразованием $\tau^{(i,d)}$, и оно образует непрерывный переход к этому преобразованию от тождественного преобразования. Вполне аналогичным способом дается определение множества $I(\tau^{(i,d)})$ для $d < 0$.

Определение 7. Пусть A_iA_{i+1} — произвольная сторона сечения $\boldsymbol{P}$. Тогда множество всех таких чисел $t \geqq 0$, что существует элементарное преобразование $\tau^{(i,t)}$ сечения $\boldsymbol{P}$, заполняет интервал $[0, T]$, где $T > 0$. Если T — конечное число, то преобразование сечения $\boldsymbol{P}$, которое получается параллельным переносом его i-той стороны на расстояние T в положительную часть области J, называется предельным преобразованием сечения $\boldsymbol{P}$ и обозначается через $\Pi_+^{(i)}$. Если для $\Pi_+^{(i)}$ определить множество $I(\Pi_+^{(i)})$ таким же образом, как это делалось выше, то это множество состоит — за исключением преобразования $\Pi_+^{(i)}$ — из одних только элементарных преобразований. Преобразование $\Pi_+^{(i)}$ определено однозначно. Аналогично определяется преобразование $\Pi_-^{(i)}$ и множество $I(\Pi_-^{(i)})$.

Пусть $\tau_1 = \tau^{(i,c)}$ — элементарное преобразование сечения $\boldsymbol{P}$, $\tau_2 = \tau^{(j,d)}$ — элементарное преобразование сечения $\boldsymbol{P}\tau_1$. Тогда можно определить произведение $\tau = \tau_1 . \tau_2$ этих преобразований. Множество $I(\tau)$ получится, если мы за множеством преобразований $I(\tau_1)$ поставим следующее множество, образуемое преобразованиями $\tau_1 . \tau^{(j,t)}$, где $\tau^{(j,t)} \in I(\tau_2)$ и эти преобразования упорядочены по параметру t (единственным общим элементом указанных множеств является $\tau_1 \equiv \tau_1 . \tau^{(j,o)}$). В дальнейшем под преобразованием τ сечения $\boldsymbol{P}$ мы будем понимать (если это не сможет привести к недоразумению) произведение конечного числа элементарных преобразований. О сечениях $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{P}\tau$ будем говорить, что их можно преобразовать друг в друга. Очевидно, оба сечения параллельны. Система преобразований $I(\tau)$ образует непрерывный переход преобразований сечения $\mathbf{P}$ от тождественного преобразования к преобразованию τ.

В работе содержится доказательство следующего утверждения:

Теорема. *Каждые два параллельные сечения $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ из X в Y односвязной области J можно преобразовать друг в друга (т. е. существует такая конечная последовательность $\{\mathbf{R}_i\}_{i=1}^{k}$ сечений из X в Y в области J, что $\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}$, $\mathbf{R}_k = \mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}_{i+1}$ получается из $\mathbf{R}_i$ элементарным переносом некоторой из его сторон).*

Для доказательства теоремы нам понадобится еще несколько рассуждений.

Пусть $(A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая ломаная линия типа Ω_r. Отрезки A_0A_1 и A_nA_{n+1} заменим соответственно полупрямыми $p = \overline{A_1A_0}$ и $q = \overline{A_nA_{n+1}}$. Последовательность множеств p, A_1A_2, $\ldots, A_{n-1}A_n$, q представляет двухсторонне бесконечную простую ломаную линию. Обозначим ее через $\mathbf{P}$. Линия $\mathbf{P}$ имеет n собственных вершин. Аналогично, как и для сечений, для линии $\mathbf{P}$ можно определить элементарный перенос некоторой ее стороны; можно также дать определение преобразования линии $\mathbf{P}$ как последовательности конечного числа таких переносов.

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{P} = (p, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, q)$ — простая двухсторонне бесконечная ломаная линия. Пусть прямые, на которых лежат полупрямые p, q, пересекаются (точку их пересечения обозначим через X). Пусть $\varepsilon > 0$ — такое число, что все собственные вершины линии P лежат внутри замкнутой круговой ε-окрестности $K(X, \varepsilon)$ точки X. Пусть $\mathbf{Q}$ — линия, получившаяся переносом линии $\mathbf{P}$ в направлении, параллельном p, на расстояние $d > 0$. Тогда существует преобразование τ линии $\mathbf{P}$ такое, что (а) $\mathbf{P}\tau = \mathbf{Q}$, (б) $\pi \in I(\tau) \Rightarrow$ все вершины $\mathbf{P}\pi$ лежат внутри $K(X\pi, \varepsilon)$.*

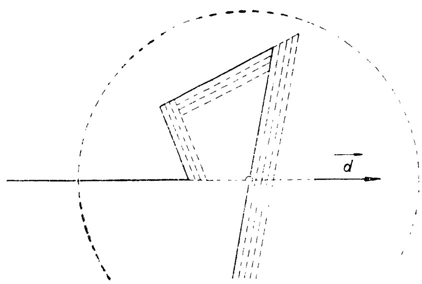

Рис. 2.

Доказательство произведем непосредственным построением преобразования τ. Сложением элементарных переносов сторон поочередно первой, второй и т. д. последней по направлениям, параллельным вектору переноса $\vec{d}$, легко найдется преобразование τ_1 со свойством (б) такое, что $\mathbf{P}\tau_1$ получается из $\mathbf{P}$ трансляцией на вектор $\vec{t}$, который одинаково направлен и параллелен вектору $\vec{d}$ и $0 < |\vec{t}| \leqq |\vec{d}|$ и такое, что имеет место: $\pi \in I(\tau_1) \Rightarrow \mathbf{P}\pi$ имеет вершины внутри $K(X, \varepsilon)$ (см. рис. 2). Сложением нескольких таких преобразований получим тогда преобразование τ.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{P}$ — *сечение области* J, A — *его вершина и* τ — *преобразование сечения* $\mathbf{P}$. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $\pi \in I(\tau)$ *замкнутая круговая* ε — *окрестность точки* $A\pi$ *лежит полностью в* J *и не содержит — за исключением участков внутренних частей соседних сторон — никакой другой точки сечения* $\mathbf{P}\pi$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{P}$ — *сечение области* J, A — *его вершина и* τ — *преобразование сечения* $\mathbf{P}$. *Пусть* ε — *число из предыдущей леммы для вершины* A *и преобразования* τ. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *линия типа* Ω_γ *такая, что ее можно вложить в вершину* A *и что все ее вершины лежат внутри* $K(A, \varepsilon)$. *Построим из сечений* $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}\tau$ *два новые сечения (взаимно параллельные)* $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ *вложением линии* $\mathbf{R}$ *в вершины* A, $A\tau$. *Тогда сечения* $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ *можно также преобразовать друг в друга.*

Лемма является очевидным следствием двух предыдущих лемм.

§ 3. Доказательство теоремы и следствие

Для доказательства нашей теоремы нам нужно еще некоторым способом охарактеризовать пару сечений $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ области J из X в Y. Будем говорить, что сечения $\mathbf{P} = (X = A_0, A_1, \ldots, A_r, A_{r+1} = Y)$, $\mathbf{Q} = (X = B_0, B_1, \ldots, B_s, B_{s+1} = Y)$ области J из X в Y хорошо расположены, если точка B_1 лежит между X, A_1 (значит, векторы $\overrightarrow{XA_1}$, $\overrightarrow{XB_1}$ одинаково направлены и параллельны), если либо точка B_s лежит между A_r, Y либо A_r — между B_s, Y (значит, векторы $\overrightarrow{A_rY}$, $\overrightarrow{B_sY}$ одинаково направлены и параллельны) и если множество $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ кроме общих частей нулевых и последних сторон содержит только конечное число точек, из которых никакая не является вершиной. Каждая из этих точек Z является, очевидно, точкой пересечения одной стороны из $\mathbf{P}$ (скажем, i-той) и одной стороны из $\mathbf{Q}$ (скажем, j-той) и, очевидно, Z лежит внутри обоих отрезков A_iA_{i+1}, B_jB_{j+1}. Точке Z поставим в соответствие упорядоченную пару (i, j). Множество таких пар обозначим через $\mathfrak{M}$. Определим $\mathfrak{N} = \{(i, j) : (i, j) \in \mathfrak{M}, i = 0\}$, $\mathfrak{S} = \{(i, j) : (i, j) \in \mathfrak{M}$ и либо $i = r$ либо $j = s\}$. Из простоты линий $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и их определения хорошего расположения сразу же вытекают следующие утверждения: Множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ либо не пересекаются, либо имеют по большей мере общую пару $(0, s)$. Множество $\mathfrak{S}$ либо пусто либо содержит только пары, для которых либо сплошь $i = r$ либо сплошь $j = s$ (причем эти две возможности исключают друг друга). Имеет место $(i, 0) \notin \mathfrak{M}$. Если $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — параллельные сечения, то $(i, i) \notin \mathfrak{M}$ для каждого i.

Доказательство теоремы (см. рис. 3) проведем полной индукцией по числу вершин. Для $n = 2$ теорема, очевидно, справедлива. Пусть $n > 2$ — произвольное натуральное число и пусть теорема справедлива для всех p-ломаных сечений, где $2 \leqq p < n$. Рассмотрим два параллельные n-ломаные сечения $\mathbf{P}$,

Q области J из точки X в Y. Без ограничения общности можно предполагать, что **P**, **Q** хорошо расположены (этого можно добиться, преобразовав предварительно некоторое из сечений).

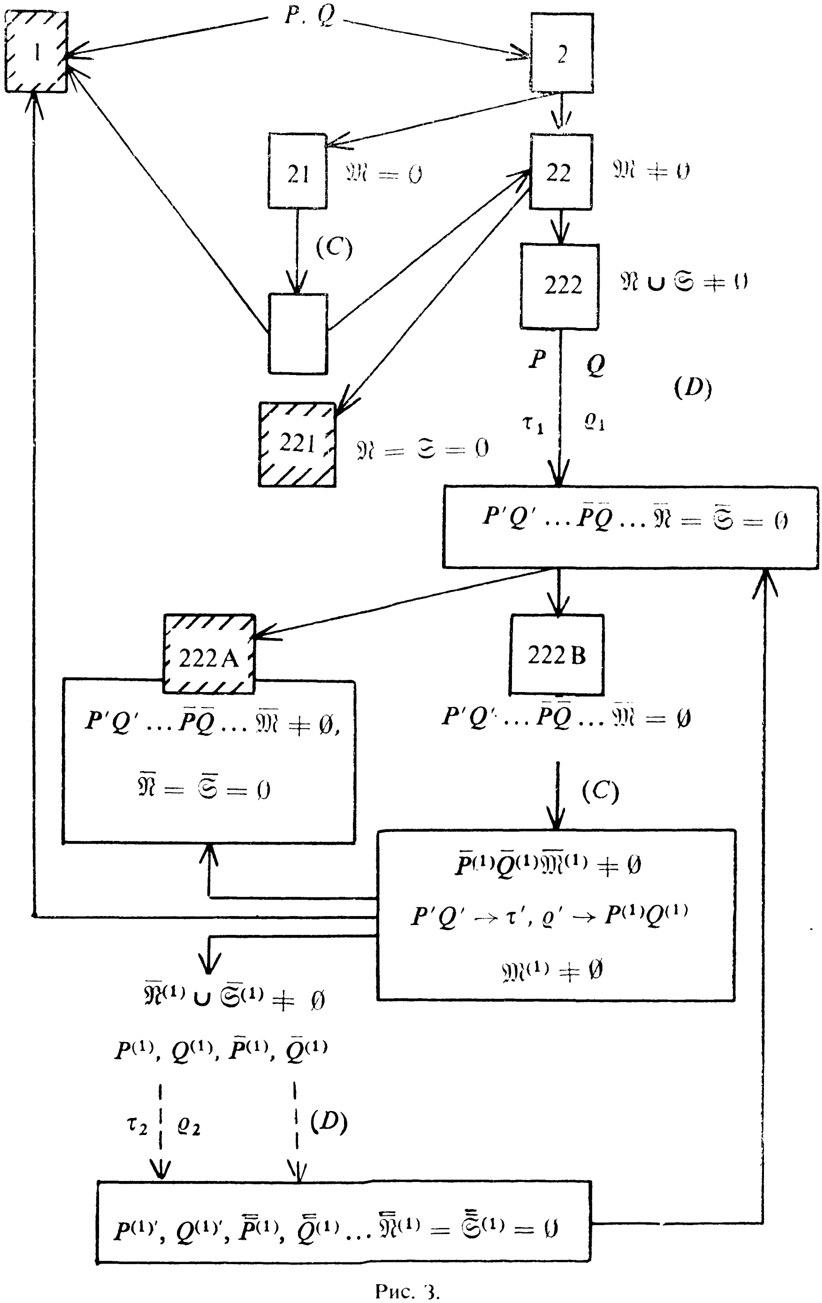

Рис. 3.

1. Пусть $(0, n) \in \mathfrak{M}$. Точка A_n должна тогда, очевидно, лежать между точками B_n, Y. Обозначим через Z точку, соответствующую паре $(0, n)$. Будем различать случаи β_1, β_2 в зависимости от того, лежат или нет B_2, Y в одной и той же полуплоскости, определенной прямой XZ (поскольку Z лежит между Y, B_n, то точка Y не лежит на этой прямой). Независимо от этого разделения различим случаи β^1, β^2 в зависимости от того, лежат или нет B_{n-1}, X в одной и той же полуплоскости, определенной прямой YZ (поскольку точка Z лежит между X, A_1, то точка X не лежит на этой прямой). Если одновременно произойдет случай β_1 и β^1, обозначим этот случай через β_1^1. Аналогично могут быть различены остальные 3 случая β_1^2, β_2^1, β_2^2 (см. рис. 4—7). Все эти четыре случая мы разрешим с помощью следующих двух утверждений, справедливых при наших индукционных предположениях (доказательство этих утверждений проделаем позже):

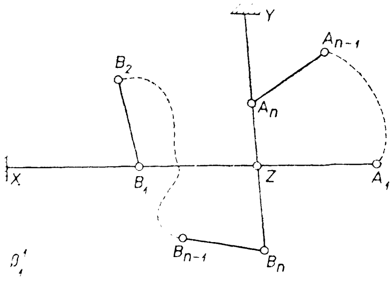

Рис. 4.

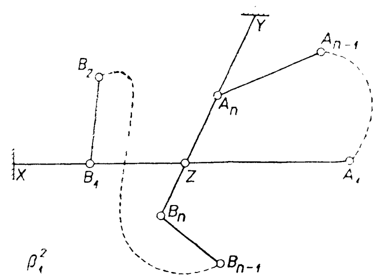

Рис. 5.

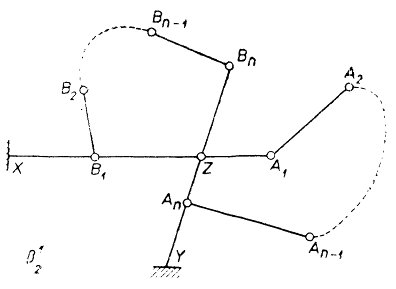

Рис. 6.

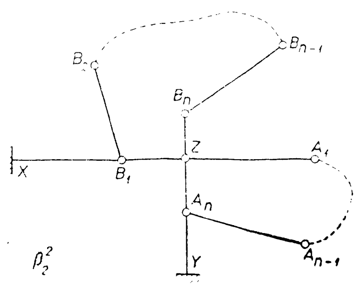

Рис. 7.

(A) Пусть (X, Z, Y) — сечение области J из X в Y, линия $\boldsymbol{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ — сечение области J из X в Y такое, что A_1 лежит между X, Z и Z между A_n, Y (см. рис. 8). Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует преобразование τ сечения $\boldsymbol{P}$ такое, что $\boldsymbol{P}\tau$ имеет все вершины внутри круговой ε-окрестности точки Z.

(B) Пусть (X, Z, Y) — сечение области J из X в Y. Пусть сечение $\boldsymbol{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ области J из X в Y — такое, что A_1 лежит между X, Z; Z — между A_n, Y и либо (u) точки A_1, A_{n-1} лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой YZ (рис. 9) либо (v) точки A_2, A_n лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой XZ (рис. 10). Тогда существует преобразование τ сечения $\boldsymbol{P}$ такое, что $A_n\tau$ лежит между Y, Z.

Решим сначала случай β_1^1. Согласно (B) существует преобразование τ_1 сечения $\boldsymbol{Q}$ такое, что $B_n\tau_1$ лежит между Y, Z. Согласно (A) существует преобразование τ_2 сечения $\boldsymbol{P}$ такое, что $B_n\tau_1$ лежит между точками $A_n\tau_2$, Y. Значит, существует $\pi \in I(\tau_2)$ такое, что $A_n\pi = B_n\tau_1$ и по предположению сечения $\boldsymbol{P}\pi$, $\boldsymbol{Q}\tau_1$ можно перевест идруг в друга. (Эти сечения имеют общую n-тую сторону. Следовательно, рассматриваем $(n - 1)$ — ломаные сечения $\boldsymbol{P}' = (X, A_1\pi, \ldots, A_{n-1}\pi, A_n\pi)$, $\boldsymbol{Q}' = (X, B_1\tau_1, \ldots, B_{n-1}\tau_1, A_n\pi)$ односвязной области $J' = J - \overline{Y(A_n\tau)}$.)

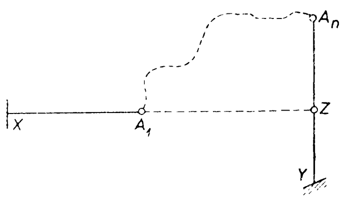

Рис. 8.

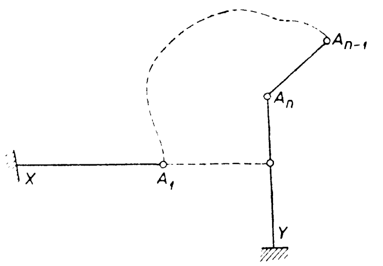

Рис. 9.

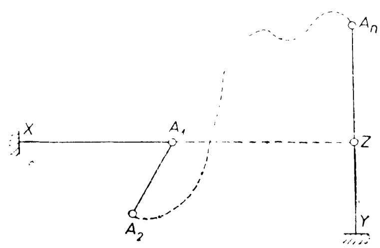

Рис. 10.

Аналогично можно поступать и в случаях β_1^2 β_2^2. То же самое относится и к оставшемуся случаю β_2^1, только сечения $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ поменяются ролями. (Для сечения $\boldsymbol{P}$ используем утверждение (B), а для сечения $\boldsymbol{Q}$ — утверждение (A). Найдем преобразования τ_1, τ_2 такие, что $A_1\tau_1 = B_1\tau_2$ и эти сечения тогда согласно предположению можно перевести друг в друга.) Тем самым случай 1 разрешен.

2. Пусть не произойдет случай 1, т. е. $(0, n) \notin \mathfrak{M}$.

21. Пусть $\mathfrak{M} = 0$. Тогда существуют преобразования τ, ϱ такие, что $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}\tau$, $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q}\varrho$ хорошо расположены и такие, что их множество $\mathfrak{M}'$ — непустое. Дело в том, что при наших индукционных предположениях имеет место следующее общее утверждение:

(C) Пусть $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ — два сечения (по большей мере n-ломанные, $3 \leqq n$) области J из X в Y такие, что они хорошо расположены и их $\mathfrak{M} = 0$. Тогда существуют преобразования τ, ϱ такие, что сечения $\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{P}\tau$, $\boldsymbol{Q}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\varrho$ хорошо расположены и $\mathfrak{M}^{(1)} \neq 0$. (Преобразования τ, ρ легко построить таким образом, что соответствующие элементарные преобразования осуществляем в направлении внутрь многоугольника, образуемого сечениями **P**, **Q** — см. рис. 11.)

22. Пусть $\mathfrak{M} \neq 0$.

221. Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{S} = 0$. Так как $\mathfrak{M} \neq 0$, то существуют числа i, j такие, что $1 \leqq i < n$, $1 \leqq j < n$, $(i, j) \in \mathfrak{M}$. Паре (i, j) соответствует некоторая точка Z — точка пересечения i-той и j-той стороны. Согласно предположению точка Z лежит внутри обеих. Без ограничения общности можно предполагать, что (i, j) — та пара, которая имеет из всех пар множества $\mathfrak{M}$ минимальный второй компонент и точка Z — ближайшая к точке B_j (из всех возможных точек пересечения отрезка $\overline{B_j B_{j+1}}$ с сечением **P**). Очевидно, $i \neq j$. Различим два случая α и β, для $i > j$ и $i < j$ соответственно.

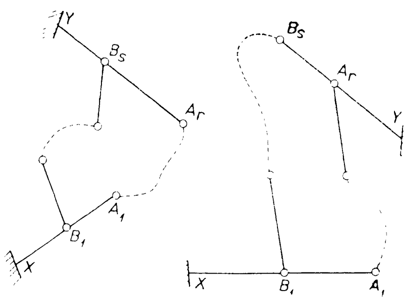

Рис. 11.

221 α. Пусть $i > j$ (рис. 12). Докажем сначала, что линия $(A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i, A_{i+1})$ — типа Ω: Из свойств пары (i, j) следует, что линия $(B_1, B_2, \ldots, B_j, Z)$ не имеет с сечением **P**, кроме точек B_1, Z никакой другой общей точки. Отсюда следует, что отрезки $\overline{B_1 B_2}, \overline{B_2 B_3}, \ldots, \overline{B_{j-1} B_j}, \overline{B_j Z}, \overline{Z A_i}, \overline{A_i A_{i-1}}, \ldots, \overline{A_2 A_1}, \overline{A_1 B_1}$

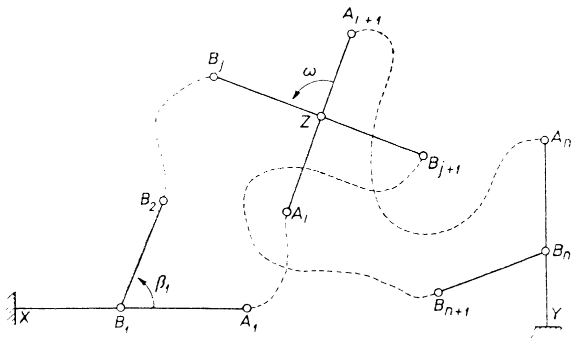

Рис. 12.

образуют простой многоугольник (обозначим его через T). Очевидно, он полностью лежит и со своей внутренней части в множестве J. Внутренний угол многоугольника T при вершине Z — меньше $180°$. (Пусть этот угол больше $180°$. Тогда точки $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n, Y$ лежат внутри многоугольника T. Отсюда $Y \in J$ — противоречие.) Для многоугольника T имеет место $-360° =$

$$= \sum_{k=1}^{j} \alpha_k + \sum_{k=j+1}^{i} \alpha_k + \omega + \sum_{k=2}^{j} (-\beta_k) \pm (180^\circ \mp \beta_1),$$ где ω, $0 < |\omega| < 180^\circ$ — угол, указанный на рис. 12 (без ограничения общности можно предполагать, что $0 < \omega < 180^\circ$ и в равенстве имеет место верхний знак. Поскольку **P**, **Q** — сечения параллельные, то справедливо $\sum_{k=1}^{j} \alpha_k = \sum_{k=1}^{j} \beta_k$ и после подстановки в верхнее уравнение получим $\sum_{k=j+1}^{i} \alpha_k = 180^\circ - \omega$. Тем самым доказано, что линия $(A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i, A_{i+1})$ — типа Ω (параллельную с ней линию типа Ω, обозначим через **R**).

Из свойств пары (i, j) вытекает, что линия $(X, B_1, \ldots, B_j, Z, A_{i+1}, \ldots, A_n, Y)$ является сечением области J из X в Y. Это сечение обозначим через **P**. Построим из сечения **P** сечение $\mathbf{P}_1$ вложением линии **R** в вершину Z сечения **P**. Сечения **P**, $\mathbf{P}_1$ параллельны и имеют общую n-тую сторону. Следовательно, согласно предположениям существует преобразование τ_1 такое, что $\mathbf{P}\tau_1 = \mathbf{P}_1$. Сечение $\mathbf{P}_1$ параллельно **Q** и имеет с ним общую нулевую сторону. Значит, существует преобразование τ_2 такое, что $\mathbf{P}_1\tau_2 = \mathbf{Q}$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2$, и мы готовы.

221 β. Пусть $i < j$. Пусть (i', j') — та пара (рис. 13), которая имеет из всех пар множества $\mathfrak{M}$ минимальный первый компонент и точка Z', соответствующая этой паре, является ближайшей к точке $A_{i'}$ (из всех возможных точек

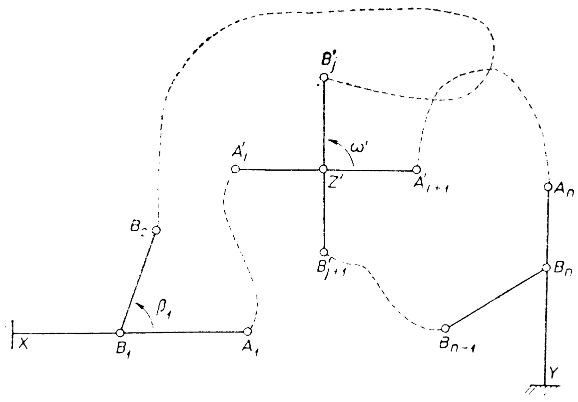

Рис. 13.

пересечения отрезка $A_{i'}A_{i'+1}$ с сечением **Q**). Очевидно, $i' \leqq i, j \leqq j'$. Аналогичным способом, как это делалось выше, докажем, что линия $(B_{i'}, B_{i'+1}, \ldots, B_{j'}, B_{j'+1})$ — типа Ω (параллельную с ней линию типа Ω_∞ обозначим через **R′**). Из свойств пары (i', j') вытекает, что линия $(X, A_1, \ldots, A_{i'}, Z', B_{j'+1}, \ldots, B_n, Y)$ является сечением множества J из X в Y (обозначим его через **Q**). Построим из сечения $\mathbf{Q}$ сечение $\mathbf{Q}_1$ вложением линии $\boldsymbol{R}'$ в вершину Z' сечения $\mathbf{Q}$. Сечения $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$ параллельны и имеют общую n-тую сторону. Согласно предположению существует преобразование τ_1 такое, что $\mathbf{Q}\tau_1 = \mathbf{Q}_1$. Сечения $\boldsymbol{P}$, $\mathbf{Q}_1$ параллельны и имеют общую нулевую сторону. Следовательно, существует преобразование τ_2 такое, что $\mathbf{Q}_1\tau_2 = \boldsymbol{P}$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2$, и мы готовы.

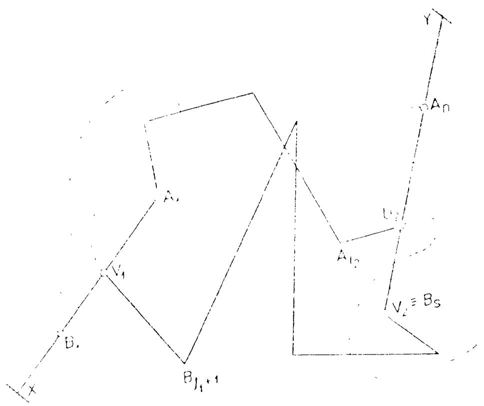

Рис. 14.

222. Пусть $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{S} \neq 0$. При наших индукционных предположениях справедливо следующее общее утверждение (доказательство приведем позже):

(D) Пусть $\boldsymbol{P}$, $\mathbf{Q}$ — два сечения (по большей мере n-ломаные) области J из X в Y такие, что они хорошо расположены и $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{S} \neq 0$. Тогда существуют сечения $\bar{\boldsymbol{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ из X в Y, линии $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ (не все 1-ломаные) типа Ω, и преобразования τ, ϱ такие, что $\bar{\boldsymbol{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ хорошо расположены, $\bar{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$, $\bar{\mathfrak{N}} = \bar{\mathfrak{S}} = 0$ (см. рис. 14, нумерацию сторон в $\bar{\boldsymbol{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ оставим как в $\boldsymbol{P}$, $\mathbf{Q}$), вложением линий $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ в первые и в последние вершины сечений $\bar{\boldsymbol{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ получим сечения, $\boldsymbol{P}'$, $\mathbf{Q}'$, параллельные $\boldsymbol{P}$ и имеет место $\boldsymbol{P}\tau = \boldsymbol{P}'$, $\mathbf{Q}\varrho = \mathbf{Q}'$.

Хотя бы у одного из сечений $\bar{\boldsymbol{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ число вершин по сравнению с сечениями $\boldsymbol{P}$, $\mathbf{Q}$ уменьшилось. На основании леммы 5 достаточно теперь ограничиться исследованием сечений $\bar{\boldsymbol{P}} = (X, A_1, \ldots, A_{i_2}, U_2, Y)$, $\bar{\mathbf{Q}} = (X, V_1, B_{j_1+1}, \ldots, B_{j_2}, V_2, Y)$ (рис. 14).

222A. Пусть $\mathfrak{M} \neq 0$. Тогда существуют числа i, j, $1 \leqq i \leqq i_2$, $j_1 \leqq j \leqq i_2$ такие, что $(i, j) \in \mathfrak{M}$. Паре (i, j) соответствует некоторая точка Z — точка пересечения i-той стороны из $\boldsymbol{P}$ и j-той стороны из $\mathbf{Q}$. Согласно предположению точка Z лежит внутри обеих сторон. Без ограничения общности можно предполагать, что (i, j) — та пара, которая имеет из всех пар множества $\mathfrak{M}$ минимальный второй компонент и точка Z — к точке B_j (в случае $j = j_1$ к точке V_1) ближайшая (из всех возможных точек пересечения j-той стороны с сечением $\boldsymbol{P}$). Вследствие параллельности сечений $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ будет $i \neq j$. Различим два случая: $i > j$ или $i < j$. Вполне аналогично тому, как мы это делали в случаях 221 α, β можно найти преобразование, переводящее $\boldsymbol{P}'$ в $\boldsymbol{Q}'$.

222В. Пусть $\mathfrak{M} = 0$. Согласно утверждению (С) можно преобразованиями перевести $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ в $\bar{\boldsymbol{P}}^{(1)}, \bar{\boldsymbol{Q}}^{(1)}$, для которых $\mathfrak{M}^{(1)} \neq 0$. (С помощью леммы 5 переведем $\boldsymbol{P}', \boldsymbol{Q}'$ преобразованиями τ', ϱ' в $\boldsymbol{P}^{(1)}, \boldsymbol{Q}^{(1)}$, которые получатся из $\bar{\boldsymbol{P}}^{(1)}$, $\bar{\boldsymbol{Q}}^{(1)}$ вложением линий $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ в соответствующие вершины.) Если $\mathfrak{N}^{(1)} \cap \mathfrak{S}^{(1)} \neq 0$, то $(0, n) \in \mathfrak{M}^{(1)}$ и для пары сечений $\boldsymbol{P}^{(1)}, \boldsymbol{Q}^{(1)}$ происходит случай I, который нами уже полностью разрешен. Пусть $\mathfrak{N}^{(1)} \cap \mathfrak{S}^{(1)} = 0$. Если $\mathfrak{N}^{(1)} = \mathfrak{S}^{(1)} = 0$, то сечения $\bar{\boldsymbol{P}}^{(1)}, \bar{\boldsymbol{Q}}^{(1)}$ и соответствующие им сечения $\boldsymbol{P}^{(1)}, \boldsymbol{Q}^{(1)}$ имеют те же свойства, что и сечения $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}', \boldsymbol{Q}'$ в случае 222А. Этот случай уже полностью разрешен. Пусть $\mathfrak{N}^{(1)} \cup \mathfrak{S}^{(1)} \neq 0$. Тогда согласно ($D$) можно построить сечения $\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}^{(1)}, \bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}^{(1)}$, для которых $\bar{\bar{\mathfrak{N}}}^{(1)} = \bar{\bar{\mathfrak{S}}}^{(1)} = 0$, вложением некоторых линий в соответствующие вершины построить сечения $\boldsymbol{P}^{(1)\prime}, \boldsymbol{Q}^{(1)\prime}$, параллельные $\boldsymbol{P}$ и некоторыми преобразованиями τ_2, ϱ_2 перевести $\boldsymbol{P}^{(1)}, \boldsymbol{Q}^{(1)}$ в $\boldsymbol{P}^{(1)\prime}, \boldsymbol{Q}^{(1)\prime}$. Притом хотя бы у одного из сечений $\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}^{(1)}, \bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}^{(1)}$ число сторон по сравнению с сечениями $\bar{\boldsymbol{P}}^{(1)}, \bar{\boldsymbol{Q}}^{(1)}$ уменьшилось. Рассуждения 222А, В, проведенные нами для сечений $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}', \boldsymbol{Q}'$, повторим теперь для сечений $\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}^{(1)}, \bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}^{(1)}$, $\boldsymbol{P}^{(1)\prime}, \boldsymbol{Q}^{(1)\prime}$. Так как мы имеем дело с конечным числом сторон, а операцией (D) число сторон уменьшается, то после несколькократного повторения этих операций мы достигнем цели.

Для того, чтобы закончить доказательство, нам остается еще доказать справедливость утверждений (А), (В) и (D).

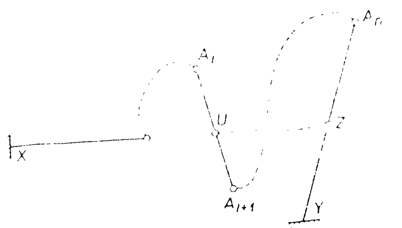

Рис. 15.

Доказательство утверждения (А):

1. Пусть внутри отрезка $\overline{A_1 Z}$ существует хотя бы одна точка сечения $\boldsymbol{P}$ (рис. 15). Пусть U — та из этих точек, которая находится ближе всего к точке A_1. Без ограничения общности можно предполагать, что U лежит внутри некоторой стороны (скажем, i-той). Легко докажется, что линии $(X, A_1, \ldots, A_i, A_{i+1})$, $\boldsymbol{P}_1 = (X, U, A_{i+1}, \ldots, A_n, Y)$ — типа Ω (параллельные им достаточно малые линии типа Ω, обозначим через $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$). Линию $\boldsymbol{R}_2$ вложим в вершину Z сечения (X, Z, Y). Таким образом, мы получим сечение параллельное $\bar{\boldsymbol{P}}_1$ и поскольку число его вершин — меньше n, его можно образовать из $\boldsymbol{P}_1$ преобразованием (обозначим его через τ_2). Образуем из сечений $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\tau_2$ сечения $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, параллельные $\mathbf{P}$ так, что вложим в вершины U, $U\tau_2$ линию $\mathbf{R}_1$. Согласно лемме 5 существует τ_2 такое, что $\mathbf{P}_1\tau_2 = \mathbf{P}_2$. По предположениям существует τ_1 такое, что $\mathbf{P}\tau_1 = \mathbf{P}_1$. Преобразование $\tau_1\tau_2$ решает наш случай.

2. Пусть внутри отрезка A_1Z не лежит никакая точка сечения $\mathbf{P}$.

21. Пусть точки A_{n-1}, X лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой A_nY (рис. 9). Тогда на полупрямой YA_n существуют кроме отрезка A_nY еще другие точки сечения $\mathbf{P}$ (хотя бы одна). В случае необходимости можно заранее проведенным достаточно малым элементарным преобразованием добиться того, чтобы никакая из этих точек не была вершиной. Ближайшую к точке A_n из этих точек обозначим через U. Существует число i, $1 \leq i < n-1$ такое, что U лежит внутри стороны A_iA_{i+1}. Легко докажется, что линия $(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n, Y)$ — типа Ω (параллельную ей достаточно малую линию типа Ω_∞ обозначим через $\mathbf{R}$). Так как линия $\mathbf{P}_1 = (X, A_1, \ldots, A_i, U, Y)$ — типа Ω, то мы поступаем так же, как в 1: Линию $\mathbf{P}_1$ „стянем" в окрестность точки Z (преобразованием τ_2), в вершины U, $U\tau_2$ линий $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\tau_2$ вложим $\mathbf{R}$ (сечения $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$), согласно лемме 5 существует τ_2 такое, что $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\tau_2$ и согласно индукционным предположениям существует τ_1 такое, что $\mathbf{P}\tau_1 = \mathbf{P}_1$.

22. Мы используем подобные приемы и в том случае, когда точки A_{n-1}, X лежат в одной и той же полуплоскости, определенной прямой A_nY, но точки

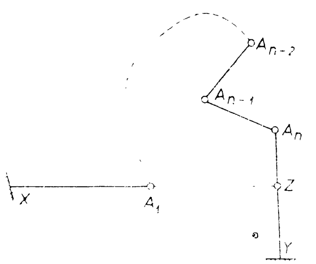

Рис. 16.

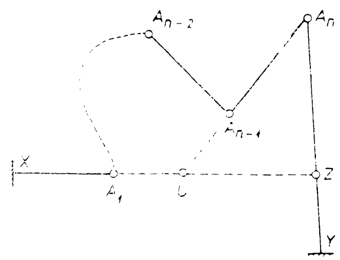

Рис. 17.

A_{n-2}, Y лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой $A_{n-1}A_n$ (рис. 16, 17).

23. Пусть внутренние углы простого многоугольника $(A_1, A_2, \ldots, A_n, Z)$ при вершинах A_1, Z, A_n, A_{n-1} меньше 180°. Осуществим предельное преобразование $\Pi^{(n-1)}$ в направлении вектора $\overrightarrow{A_nY}$. Если $A_n\Pi^{(n-1)}$ лежит на отрезке A_nZ, то произойдет один из случаев, изображенных на рис. 18, 19, 20, 21, 22, которые легко решаются. Если же $A_n\Pi^{(n-1)}$ не лежит на отрезке A_nZ, то существует $\tau \in J(\Pi^{(n-1)})$ такое, что $A_n\tau$ лежит между Y, Z и прямая XA_1 пересечет внутреннюю часть стороны $(A_{n-1}A_n)\tau$, что опять таки можно легко решить, так как $(X, A_1, \dots, A_n)$ — типа Ω. Доказательство утверждения (А) закончено.

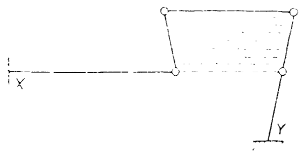

Рис. 18.

Доказательство утверждения (В).

Решим сначала случай (u). На полупрямой YA_n лежит кроме отрезка A_nY

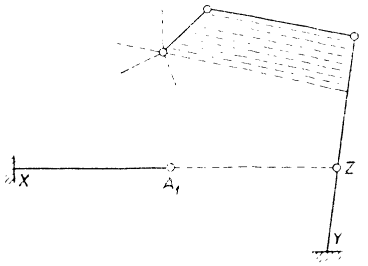

Рис. 19.

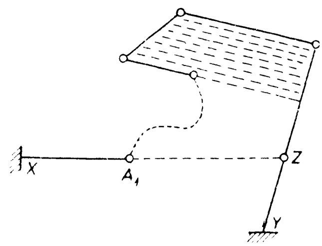

Рис. 20.

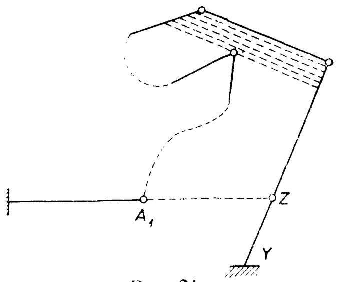

Рис. 21.

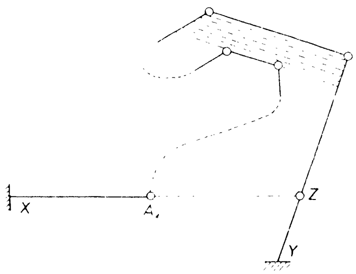

Рис. 22.

еще хотя бы одна другая точка сечения **P**. Без ограничения общности можно предполагать, что таких точек только конечное число и никакая из них не является вершиной. Пусть U — та из них, которая является ближайшей к A_n. Существует i, $1 \leqq i \leqq n-2$ такое, что U лежит между A_i, A_{i+1}. Очевидно, $(U, A_n, A_{n-1}, \dots, A_{i+1})$ — простой многоугольник, внутренний угол которого при вершине U — меньше $180°$. Согласно лемме 2 могут произойти два случая. Либо существует число i', $i < i' < n$ и треугольник (U, B, C) такие, что $B \in UA_{i+1}$, $C \in UA_n$, $\overrightarrow{BC}$ — одинаково направлен и параллелен вектору $\overrightarrow{A_{i'}A_{i'+1}}$ (рис. 23) и линии $(A_i, A_{i+1}, \dots, A_{i'}, A_{i'+1})$, $(A_{i'}, A_{i'+1}, \dots, A_n, Y)$ — типа Ω, либо существует выпуклый четырехугольник (U, B, C, D) и числа i', j', $i < i' < j' < n$ такие, что $B \in UA_{i+1}$, $D \in UA_n$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены и параллельны $\overrightarrow{A_{i'}A_{i'+1}}, \overrightarrow{A_{j'}A_{j'+1}}$, четырехугольник (U, B, C, D) содержит внутреннюю часть параллелограмма, определенного отрезками UB, UD (рис. 24) и линии $(A_i, A_{i+1}, \dots, A_{i'}, A_{i'+1}), (A_{i'}, A_{i'+1}, \dots, A_{j'}, A_{j'+1}), (A_{j'}, A_{j'+1}, \dots, A_n, Y)$ — типа Ω. Очевидно, точки соответственно B, C и B, C, D

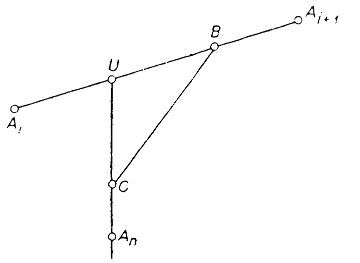

Рис. 23.

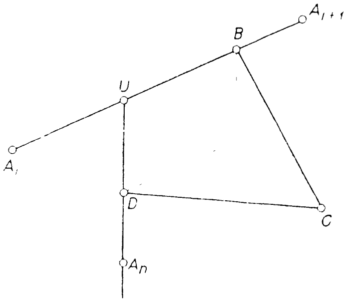

Рис. 24.

можно выбирать так, чтобы линия соответственно $\boldsymbol{P}_1 = (X, A_1, \dots, A_i, B, C, Y)$ и $(X, A_1, \dots, A_i, B, C, D, Y)$ была сечением. Обозначим через $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ ($\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3$) линии типа Ω_Y, параллельные указанным линиям. Легко докажется, что линия $(X, A_1, \dots, A_i, A_{i+1})$ — типа Ω (параллельную ей линию типа Ω_Y обозначим через $\boldsymbol{R}$).

Будем строить сначала преобразование τ для случая A_iA_{i+1} XA_1. Очевидно, существует 3-ломаное (4-ломаное) сечение $\boldsymbol{Q} = (X, V', B', C', Y)$ ($\boldsymbol{Q} = (X, V', B', C', D', Y)$) такое, что векторы $\overrightarrow{XV'}, \overrightarrow{V'B'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'Y}$ ($\overrightarrow{XV'}, \overrightarrow{V'B'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'D'}$

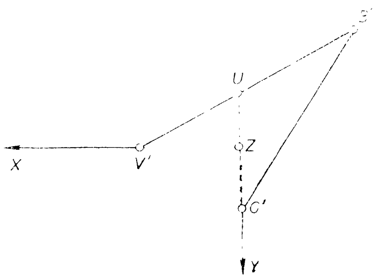

Рис. 25.

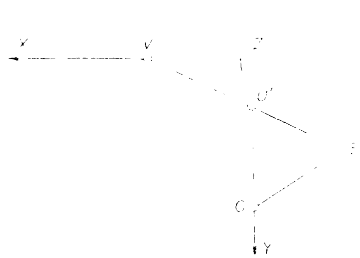

Рис. 26.

$\overrightarrow{D'Y}$) одинаково направлены и параллельны векторам $\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{UB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CY}$ ($\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{UB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DY}$), точка $C'(D')$ лежит внутри отрезка ZY, прямая YZ пересечет в обоих случаях отрезок $V'B'$ в внутренней точке (обозначим его через U') (рис. 25, 26, 27, 28).

Вложим теперь линию $\mathbf{R}$ (достаточно малую) в вершину V' сечений $\mathbf{Q}$ и (X, V', U', Y). Новые сечения обозначим через $\bar{\mathbf{P}}_3, \bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$. Обозначим дальше через $\mathbf{P}_1$ сечение $(X, A_1, \ldots, A_i, U, Y)$ (рис. 29). Так как $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_1, \bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$ параллельны и число их сторон меньше n, то согласно предположениям существует пре-

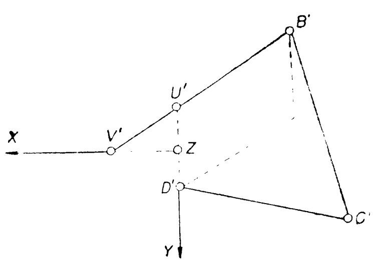

Рис. 27.

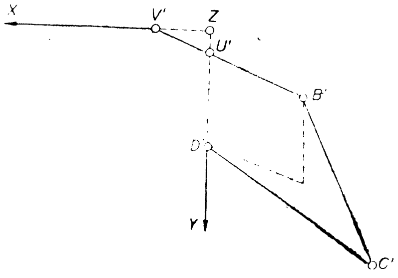

Рис. 28.

образование $\bar{\bar{\tau}}_2$ сечения $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_1$ такое, что $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_1\bar{\bar{\tau}}_2 = \bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$. Дальше, очевидно, что $U\bar{\bar{\tau}}_2 = U'$. Вершины B, C (B, C, D) сечения $\mathbf{P}_1$ можно выбрать так, чтобы они находились внутри $K(U, \varepsilon)$, где ε — число, соответствующее по лемме 4 вершине U и преобразованию $\bar{\bar{\tau}}_2$. Построим сечение $\mathbf{P}_2$ (рис. 30), параллельное $\bar{\mathbf{P}}_1$ так, что в вершину U' сечения $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$ вложим линию, параллельную (A_i, B, C, Y) $((A_i, B, C, D, Y))$ и такую, что нововложенные вершины лежат внутри $K(U', \varepsilon)$. Из леммы 5 вытекает существование преобразования τ_2 такого, что $\bar{\mathbf{P}}_1\tau_2 = \bar{\mathbf{P}}_2$. Далее видно, что существует преобразование τ_3 такое, что $\mathbf{P}_2\tau_3 = \mathbf{P}_3$ (рис. 30). Построим теперь из сечений $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$ новые сечения $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_3$ так, что в соответствую-

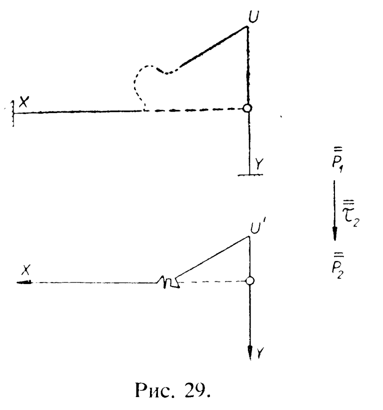

Рис. 29.

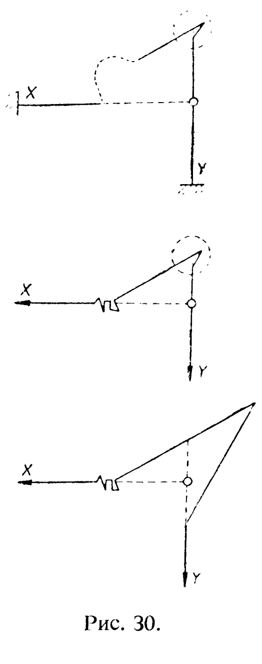

Рис. 30.

щие вершины сечений $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3$ вложим линии $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ ($\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$) (рис. 31). Очевидно, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3$ параллельны $\mathbf{P}$ и согласно лемме 5 существует преобразование $\tau_2\tau_3$ такое, что $\mathbf{P}_1\tau_2\tau_3 = \mathbf{P}_3$. Так как сечения $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1$ имеют общую нулевую сторону, то по предположениям существует преобразование τ_1 такое, что $\mathbf{P}\tau_1 = \mathbf{P}_1$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3$, и мы готовы. Аналогично поступаем в случае $A_iA_{i+1} \parallel XA_1$.

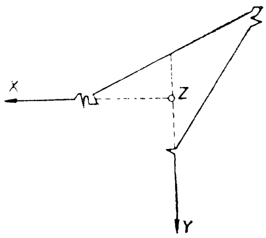

Рис. 31.

Решим теперь случай (г). На полупрямой XZ лежит кроме стороны XA_1 и точки Z еще другие точки сечения $\mathbf{P}$. Элементарным преобразованием можно добиться того, что этих точек будет только конечное число и никакая из них не будет вершиной. Пусть V — ближайшая из этих точек к точке A_1. Очевидно, V лежит между A_1, Z и существует число i, $1 < i < n$ такое, что V лежит внутри A_iA_{i+1}.

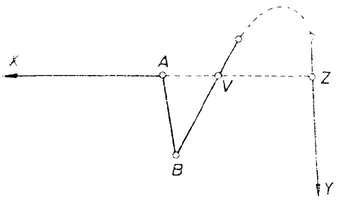

Рис. 32.

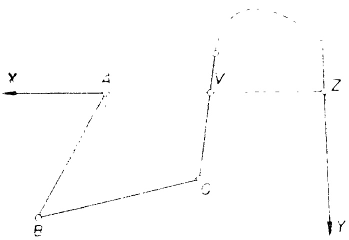

Рис. 33.

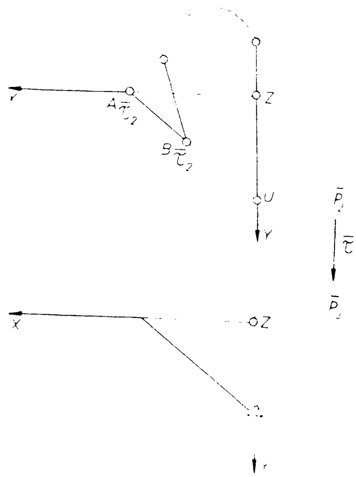
Рис. 34.

Простой многоугольник $(V, A_1, \dots, A_i)$ имеет угол при вершине V меньше $180°$. Согласно лемме 2 существует число i', $1 \leq i' < i$ (числа i', j', $1 \leq i' < j' < i$) и треугольник (A, B, V) (выпуклый четырехугольник (A, B, C, V)) со свойствами, указанными в лемме 2 (рис. 32, 33). Построим сечение $\mathbf{P}_1 = (X, V, A_{i+1}, \dots, A_n, Y)$. Это сечение мы „стянем" в достаточно малую окрестность точки Z (преобразованием $\overleftarrow{\tau}_2$). В соответствующие вершины сечений $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1\tau_2$ вложим треугольник (четырехугольник). Новые сечения обозначим через $\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2$. Согласно лемме 5 существует преобразование τ_2 такое, что $\bar{\mathbf{P}}_2 = \bar{\mathbf{P}}_1\tau_2$. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям в случае (u), построим преобразование τ (см. рис. 34—37). Утверждение (В) доказано.

Доказательство утверждения (D): Пусть $\mathfrak{N} \neq 0$. Это означает, что внутри отрезка $\overline{A_1 B_1}$ существует непустое множество точек, принадлежащих сечению **Q**. Пусть Z — та из этих точек, которая находится ближе всего к точке B_1. Очевидно, существует число l, $1 < l$, такое, что Z лежит внутри l-той стороны сечения **Q**. Очевидно, точки B_1, $B_2, \ldots, B_l$, Z образуют простой многоугольник (обозначим его **T**), который полностью лежит в J (рис. 38). Внутренние углы многоугольника **T** при вершинах B_1, Z, очевидно — меньше $180°$. Дальше, легко видеть, что линия $(X, B_1, \ldots, B_l, B_{l+1})$ — типа Ω (параллельную ей линию типа Ω_{γ} обозначим **R**). Если вложить линию **R** в вершину Z сечения

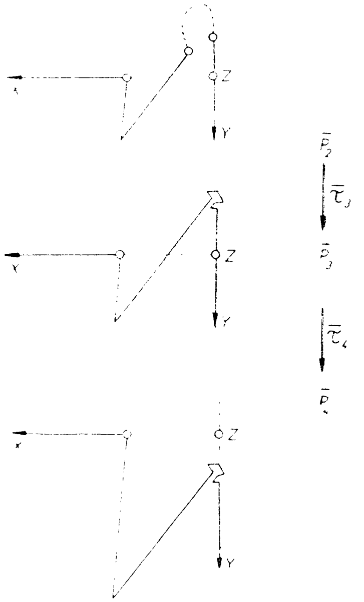

Рис. 35.

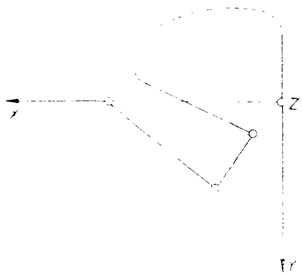

Рис. 36.

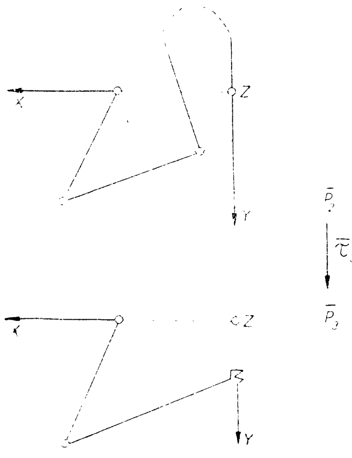

Рис. 37.

$\mathbf{Q}^{(1)} = (X, Z, B_{l+1}, B_{l+2}, \ldots, Y)$, то получим сечение (обозначим его $\mathbf{Q}_1$), параллельное **Q**, которое имеет с **Q** общую последнюю сторону — значит, их можно преобразованием перевести друг в друга. Пара **P**, $\mathbf{Q}^{(1)}$ хорошо расположена, $\mathfrak{M}^{(1)} \subset \mathfrak{M}$, но $(0, l) \notin \mathfrak{N}^{(1)}$. Так продолжаем до тех пор, пока из $\mathfrak{N}$ и Ξ не будут удалены все элементы. Тем самым мы построим сечения $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$.

Доказательство утверждения (D) закончено, и тем самым и доказательство нашей теоремы.

Следствие. *Пусть* $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ *— два параллельных простых плоских многоугольника. Тогда существует конечная последовательность* $\{\mathbf{R}_i\}_{i=1}^{k}$ *простых многоугольников такая, что* $\mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_k \equiv \mathbf{R}'$ *и* $\mathbf{R}_{i+1}$ *получается из* $\mathbf{R}_i$ *элементарным переносом некоторой его стороны (т. е.* $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ *можно преобразовать друг в друга).**

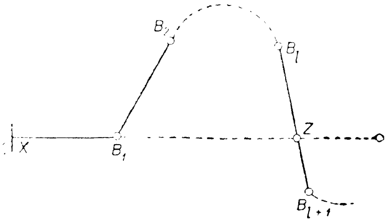

Рис. 38

Доказательство. Пусть соответствующие друг другу стороны простых многоугольников $\mathbf{R} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $\mathbf{R}' = (A_1', A_2', \ldots, A_n')$ параллельны и одинаково направлены, внутренний угол при вершине A_1 — меньше $180°$ и $A_1' \equiv A_1$. К многоугольнику $\mathbf{R}$ для вершины A_1 построим по лемме 2 параллельный ему многоугольник $\mathbf{S}$ со свойствами, указанными в лемме. Предположим, что $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ расположены так, что выполняется $A_1 \equiv A$, где $A \in \mathbf{S}$ — вершина, соответствующая вершине $A_1 \in \mathbf{R}$. Пусть $\mathbf{K}_1$ — окружность, которая в своей внутренней части содержит все три многоугольника $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{R}'$. Пусть $\mathbf{K}_1^\circ$ ($\mathbf{R}^\circ$, $\mathbf{S}^\circ$, $\mathbf{R}'^\circ$) означает внутреннюю часть окружности $\mathbf{K}_1$ (многоугольников $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{R}'$) и пусть $\bar{\mathbf{R}}^\circ$, $\bar{\mathbf{S}}^\circ$, $\bar{\mathbf{R}}'^\circ$ — замыкания этих внутренних частей.

Рассмотрим пару многоугольников $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$. Множество $\mathbf{K}_1^\circ - (\bar{\mathbf{R}}^\circ \cup \bar{\mathbf{S}}^\circ)$ открыто и оно состоит из конечного числа связных компонентов. Обозначим через $\mathcal{J}_1$ тот из этих компонентов, для которого окружность $\mathbf{K}_1$ является частью его границы. Очевидно, $\mathcal{J}_1$ — вдвойне связная область. Из свойства многоугольника $\mathbf{S}$ следует, что точка A_1 лежит на его границе. Очевидно, существует простая ломаная линия $\mathbf{P}$, соединяющая точку A_1 с произвольной наперед выбранной точкой окружности $\mathbf{K}_1$ и такая, что за исключением этих концов лежит полностью внутри $\mathcal{J}_1$. Дальше, очевидно, существует окружность $\mathbf{K}_2$ с центром A_1 такая, что полностью лежит внутри $\mathbf{K}_1$ и множество $\bar{\mathbf{K}}_2$ не содержит кроме участков внутренних частей обеих соседних сторон многоугольников $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ и участка внутренней части стороны линии $\mathbf{P}$, никаких других точек линий $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ (точки пересечения окружности $\mathbf{K}_2$ со сторонами A_1A_2, A_1A_n обозначим через X, Y). Обозначим $\mathcal{J} = \mathbf{K}_1 - (\bar{\mathbf{K}}_2 \cup \mathbf{P})$. Очевидно, $\mathcal{J}$ — односвязная область, X, Y — две различные точки ее границы и $\mathbf{R}_1 = (X, A_2, \ldots, A_n, Y)$, $\mathbf{S}_1 = (X, B_2, \ldots, B_n, Y)$ — два параллельных сечения множества $\mathcal{J}$ из X в Y. Согласно нашей теореме, $\mathbf{R}_1$ можно преобразовать в $\mathbf{S}_1$. Указанное

* См. V. Polák: O jisté transformaci jednoduchých rovinných mnohoúhelníků. Matematicko-fyzikálny časopis SAV X, 2, 1960, 81–98.

преобразование является также преобразованием τ_1 многоугольника $\boldsymbol{R}$ и имеет место $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}\tau_1$. Вполне аналогичным способом построим преобразование τ_2 такое, что $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{S}\tau_2$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2$, и мы готовы. Утверждение доказано.

Поступило 11. 1. 1960 г.

Katedra matematiky
Přírodovědecké fakulty
Masarykovy university
v Brně

ON A CERTAIN TRANSFORMATION OF SIMPLE POLYGONAL LINEX IN THE PLANE

Václav Polák

Summary

In the (Euclidean) plane let J be a simple connected region and let X Y be two points on its boundary, further $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ two parallel cuts of the region J going from X to Y (that means $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{Q}$ are two simple polygonal lines joining the points X and Y entirely lying in J except their two ends X, Y and $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ have the same number of vertices and corresponding oriented sides are concured parallel).

Let us make a parallel transformation of an arbitrary side of the cut $\boldsymbol{L}$ in J from X to Y so, that all polygonal lines formed during this transformation are parallel simple and all are cuts of J from X to Y. The resulting cut we denote $\boldsymbol{L}_\tau$, the respective transformation τ is said to be elementary transformation of $\boldsymbol{L}$.

It is proved that it is olways possible to transform $\boldsymbol{P}$ into $\boldsymbol{Q}$ by means of a finite number of elementary transformations.