Èduard Tigranovič Avanesov

Об одном неопределенном уравнении

Matematický časopis, Vol. 22 (1972), No. 2, 115--122

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126316

Matematický časopis 22 (1972), No. 2

ОБ ОДНОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ УРАВНЕНИИ

Э. Т. АВАНЕСОВ, Кисловодск (СССР)

В предлагаемой статье исследуется неопределенное уравнение

$$ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4 = 8\,, \tag{1}$$

где a и c — целые положительные числа, b — любое целое число, включающее в себя как все уравнения вида $ax^4 - cy^4 = \sigma(\sigma = 1, 2, 4, 8)$, (см. [1]), так и уравнения вида $ax^4 + bx^2y^2 - cy^4 = 1, 2$ или 4 (см. [2] и [3]).

На основании известных результатов Бэйкера (см., например, [6]) для возможных целых решений (x, y) уравнения (1) справедлива оценка:

$$\max\,(|x|, |y|) < \exp\,[4^{\nu 2}H^{64\nu} + (\log 8)^k]\,,$$

где

$$\nu = \frac{128k^2}{k-5}\,, \quad k > 5\,, \quad H = \max\,(a, |2b|, c)\,.$$

Очевидно, что хотя последняя оценка и эффективна, но с конструктивной точки зрения возможность применения ее весьма ограничена, ибо указываемый перебор практически недостижим.

Рассматриваемый нами метод является обобщением метода работы [2], но он не дает пути для опеределения возможных решений, а позволяет только подсчитать число решений.

Без ограничения общности можно предположить, что форма $ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4$ неприводима. Для этого достаточно исключить случай, когда $в^2 + ac$ полный квадрат. Но в этом случае левая часть уравнения разлагается в произведение двух квадратичных форм $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, а решение уравнения сводится к решению следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = j, \\ f_2(x, y) = \dfrac{8}{j}, \end{cases}$$

где $j = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Указанные системы легко решаются. Таким образом, можно считать, что $b^2 + ac$ неполный квадрат.

Запишем уравнение (1) следующим образом:

$$(x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{-c})^2 - 2(-b + \sqrt{-ac})x^2y^2 = 8.$$

Очевидно, если (x, y) — решение уравнения (1), то числа

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{-c} + xy\sqrt{2(-b + \sqrt{-ac})}\right] \tag{2}$$

и

$$\eta' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{-c} - xy\sqrt{2(-b + \sqrt{-ac})}\right] \tag{2'}$$

являются целыми единицами некоторой области 8-го порядка.

В самом деле, $\eta\eta' = 1$ и $\eta - \eta' = xy\sqrt{-b + \sqrt{-ac}}$ — целые алгебраические числа, а следовательно, η и η' — целые алгебраические числа, как корни квадратного уравнения с целыми алгебраическими коэффициентами.

Таким образом, каждому решению уравнения (I) соответствует единица поля $R(\sqrt{a}, \sqrt{-c}, \sqrt{2\Theta})$, где $\Theta = -b - \sqrt{-ac}$, вида (2). Назовем такую единицу требуемой единицей. В качестве обратного утверждения справедливо следующее предложение:

Теорема 1. *Всякой требуемой единице соответствует либо решение уравнения* (1), *либо решение уравнения*

$$ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4 = 2. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть η-требуемая единица, тогда

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(m\sqrt{a} + n\sqrt{-c} + q\sqrt{2\Theta}),$$

и ввиду условия $\eta\eta' = 1$, получим:

$$\eta\eta' = \frac{1}{8}[am^2 - cn^2 + 2mn\sqrt{-ac} - 2q^2(-b + \sqrt{-ac})] = 1,$$

или

$$\begin{cases} am^2 + 2bq^2 - cn^2 = 8, \\ mn - q^2 = 0, \end{cases}$$

откуда $am^2 + 2bmn - cn^2 = 8$.

Отсюда следует, что или m и n взаимно просты, а это в соответствии с равенством $mn = q^2$ дает $m = \pm x^2$, $n = \pm y^2$, $q = xy$, т. е. $ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4 = 8$, или $(m, n) = 2$, но тогда $m = \pm 2x^2$, $n = \pm 2y^2$, $q = 2xy$ и $ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4 = 2$, что и требовалось доказать.

Итак, разыскание требуемых единиц и решение уравнений (I) и (3) — — задачи эквивалентные.

Пусть $\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}[u\sqrt{a} + v\sqrt{-c} + w\sqrt{2(-b + \sqrt{-ac})}]$ — требуемая единица. Докажем следующую лемму:

Лемма. *Никакая нечетная положительная степень требуемой единицы при* $w \neq 1$ *не может быть требуемой единицей.*

Доказательство. Вместе с η будем расматривать сопряженные единицы:

$$\eta' = \frac{1}{2\sqrt{2}}[u\sqrt{a} + v\sqrt{-c} - w\sqrt{2(-b + \sqrt{-ac})}],$$

$$\eta'' = \frac{1}{2\sqrt{2}}[u\sqrt{a} - v\sqrt{-c} + w\sqrt{2(-b - \sqrt{-ac})}],$$

$$\eta''' = \frac{1}{2\sqrt{2}}[u\sqrt{a} - v\sqrt{-c} - w\sqrt{2(-b - \sqrt{-ac})}].$$

При этом, очевидно, выполняется равенство $\eta\eta' = \eta''\eta''' = 1$.

Пусть

$$\eta^k = \frac{1}{2\sqrt{2}}[m\sqrt{a} + n\sqrt{-c} - q\sqrt{2(-b + \sqrt{-ac})}],$$

соответственно определяются и степени сопряженных единиц.

Так как

$$\eta^k - \eta'^k = q\sqrt{-b + \sqrt{-ac}}, \quad \eta''^k + \eta'''^k = q\sqrt{-b - \sqrt{-ac}},$$

то

$$(4)\quad \frac{\eta^k - \eta'^k}{\eta - \eta'} = \frac{q\sqrt{-b + \sqrt{-ac}}}{w\sqrt{-b + \sqrt{-ac}}} = \frac{q}{w} = \frac{q\sqrt{-b - \sqrt{-ac}}}{w\sqrt{-b - \sqrt{-ac}}} = \frac{\eta''^k - \eta'''^k}{\eta'' - \eta'''}.$$

Известные формулы Варинга

$$A^{2t+1} + B^{2t+1} = (A + B)^{2t+1} + \sum_{\nu=1}^{t} \frac{(2t+1)(2t-\nu)!}{\nu(\nu-1)!(2t-2\nu+1)!} \times$$

$$\times (-1)^{\nu}(AB)^{\nu}(A+B)^{2t-2\nu+1}$$

представим в следующем виде

$$A^k + B^k = (A+B)^k + \sum_{\nu=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\nu} \frac{k(k-\nu-1)!}{\nu(\nu-1)!(k-2\nu)!} (AB)^{\nu}(A+B)^{k-2\nu}.$$

Полагая $A = \eta$, $B = -\eta'$, получим, разделив обе части на $\eta - \eta'$:

$$\frac{\eta^k - \eta'^k}{\eta - \eta'} = k(\eta\eta')^{\frac{k-1}{2}} + \frac{k(k+1)(k-1)}{3!2^2} (\eta\eta')^{\frac{k-3}{2}} (\eta-\eta')^2 +$$

$$+ \frac{k(k+1)(k-1)(k+3)(k-3)}{5!\,2^4} (\eta\eta')^{\frac{k-5}{2}} (\eta-\eta')^4 + \ldots$$

Аналогичным будет и представление $\dfrac{\eta''^k - \eta'''^k}{\eta'' - \eta'''}$.

Используя (4), найдем:

$$(5)\qquad \frac{k(k^2-1)}{3!\,2^2} (\eta\eta')^{\frac{k-3}{2}} [(\eta-\eta')^2 - (\eta''-\eta''')^2] + \frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{5!\,2^4} \times$$

$$\times (\eta\eta')^{\frac{k-5}{2}} [(\eta-\eta')^4 - (\eta''-\eta''')^4] + \ldots = 0.$$

Разделим обе части (5) на

$$(\eta-\eta')^2 - (\eta''-\eta''')^2 = 2w^2\sqrt{-ac} \neq 0,$$

тогда

$$\frac{k(k^2-1)}{3!\,2^2} (\eta\eta')^{\frac{k-3}{2}} + \frac{k(k^2-1)(k^2-9)[(\eta-\eta')^4 - (\eta''-\eta''')^4]}{5!\,2^4[(\eta-\eta')^2 - (\eta''-\eta''')^2]} \times$$

$$\times (\eta\eta')^{\frac{k-5}{2}} + \ldots = 0,$$

или

$$(6)\qquad \frac{k(k^2-1)}{3!\,2^2} - \frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{5!\,2^4} 2bw^2 + \frac{k(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)}{7!\,2^6} \times$$

$$\times (3b^2 - ac)w^4 + \ldots = 0.$$

Пусть $p > 3$ — простой делитель числа w и первый член (6) делится точно на p^{π}.

Очевидно, только один из множителей числителя 1 члена делится на p^{π}; тогда 2, 3 и другие члены делятся, по крайней мере, на $p^{\pi+1}$, что невозможно.

Если $p = 3$, то 1 член делится точно на $3^{\pi-1}$, а остальные делятся на $3^{\pi+1}$ и т. д.

Наконец, пусть $p = 2$. Тогда числитель первой дроби $k(k^2 - 1)$ делится на 2^{π}, где $\pi \geqslant 3$, а вся первая дробь делится на $2^{\pi-3}$. Покажем, что общий член (6), равный

$$(7) \qquad \frac{k(k^2-1)\ldots[k^2-(2j-1)^2]}{(2j+1)!\,2^{2j}} \; \frac{[(\eta-\eta')^{2j}-(\eta''-\eta''')^{2j}]}{(\eta-\eta')^2-(\eta''-\eta''')^2} =$$

$$= \frac{k(k^2-1)\ldots[k^2-(2j-1)^2]}{(2j+1)!\,2^{2j}} \; w^{2j-2}\varphi(a, b, c), \;\; (j \geqslant 2)$$

делится, по крайней мере, на $2^{\pi-2}$.

Числитель (7) делится, по крайней мере, на $2^{\pi} \cdot 2^{3(j-1)} = 2^{\pi+3j-3}$. Число 2 входит множителем в $(2j+1)!$ самое большее в степени $2j-1$. Отсюда общий член (7) делится, по крайней мере, на $2^{\pi+3j-3-(2j-1)-2j+2j-2} = 2^{\pi+j-4} \geqslant 2^{\pi-2}$.

Таким образом, все члены суммы, кроме первого, делятся на $2^{\pi-2}$, а первый делится только на $2^{\pi-3}$; следовательно, вся сумма не делится на $2^{\pi-2}$, и равенство (6) невозможно. Итак, единственность требуемой единицы доказана для случая $w \neq 1$. Если $w = 1$, то такая требуемая единица соответствует решению $x = y = 1$; очевидно, при этом выполняется условие $a + 2b - c = 8$. С помощью леммы докажем основную теорему:

Теорема 2. *В поле $R(\sqrt{a}, \sqrt{-c}, \sqrt{2\Theta})$ существует, вообще говоря, не более одной требуемой единицы.*

Доказательство. Так как $b^2 + ac$ неполный квадрат, то число $\Theta = -b + \sqrt{-ac}$ не может быть полным квадратом числа мнимого квадратичного поля $R(\sqrt{-ac})$. Значит, поле $R(\sqrt{2\Theta})$ — 4 степени, а так как оно содержит подполе $R(\sqrt{-ac})$, то оно будет чисто мнимым полем. В силу известной теоремы Дирихле, чисто мнимое поле 4 степени имеет одну основную единицу, а любая единица этого поля есть степень основной единицы, умноженной на степень особенной единицы, если последняя принадлежит полю.

Группа Галуа уравнения $f(x, 1) = ax^4 + 2bx^2 - c = 0$ есть группа

8-го порядка. В самом деле, дискриминант D уравнения $f(x, 1) = 0$ равен $D = -256ac(b^2 + ac)^2 < 0$ и не может быть точным квадратом. Кроме того, кубическая резольвента, определяющая группу Галуа уравнения $f(x, 1) = 0$, имеет вид:

$$g(z) = a^2z^3 - 2abz^2 + 4acz - 8bc$$

и содержит рациональный корень $z = 2b/a$; значит, (см. [4], стр. 141—143) группа Галуа многочлена $f(x, 1)$ сопряжена группе B_4' восьмого порядка. Так как поле $R(\sqrt{2\Theta})$ четвертой степени, то для него (см. [5], стр. 308—309) возможны следующие особенные единицы:

$$e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad e^{\frac{\pi}{2} i}, \quad e^{\frac{2}{5}\pi i}, \quad e^{\frac{\pi}{4} i} \quad \text{и} \quad e^{\frac{\pi}{6} i}.$$

Но поле $R(e^{\frac{2}{5}\pi i})$ определяет область 4 степени с циклической группой Галуа, а $R(e^{\frac{\pi}{4} i})$ и $R(e^{\frac{\pi}{6} i})$ соответствуют областям с четверной группой Галуа.

Следовательно, полю $R(\sqrt{2\Theta})$ могут принадлежать следующие особенные единицы: $i = e^{\frac{\pi}{2} i}$ и $I = e^{\frac{2}{3}\pi i}$. Так как рассматриваемая единица η обладает свойством $\eta\eta' = 1$, то можно подобрать такую единицу, что любая единица такого вида есть степень одной единицы, независимо от наличия в поле особенных единиц. Эту единицу называют относительно-основной.

Если $2a$ — неполный квадрат, то квадрат требуемой единицы η будет нечетной степенью относительно-основной единицы этого поля, т. е.

$$\eta^2 = \left(\frac{\alpha + \beta\sqrt{2a\Theta}}{2\sqrt{2a}}\right)^2 = \varepsilon_0^{2k+1},$$

где α, β — целые числа соответствующих полей.

Очевидно, можно считать, что если η — требуемая единица, то $\eta = \eta_0^{2k+1}$, где

$$\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma + \delta\sqrt{2\Theta}).$$

Все требуемые единицы $\eta_j = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma_j + \delta_j\sqrt{2\Theta})$ являются нечетными степенями η_0, при этом легко видеть, что все δ_j делятся на δ.

Выделим в δ наибольший целый рациональный множитель d, так что $\delta = d\tau_1$. Тогда все δ_j делятся на $q = dN(\tau_1)$, т. е. требуемые единицы принадлежат кольцу $0(g\sqrt{2\Theta})$. Если для основной единицы этого кольца

$\eta_0^{k_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma_{k_1} + q\tau_2\sqrt{2\Theta})$ коэффициент τ_2 — рациональный, то все требуемые единицы будут степенями $\eta_0^{k_1}$ и по лемме $\eta_0^{k_1}$ — единственная требуемая единица. Если же τ_2 — иррационально, то процесс повторяем еще раз и т. д.

В том случае, когда построенный алгорифм повышения продолжается до бесконечности, то требуемых единиц нет и уравнение не имеет решений.

Если же алгорифм остановится, то это может произойти либо потому, что мы придем к требуемой единице и тогда по лемме других требуемых единиц нет, либо потому, что на некотором шаге $N(\tau_{2j}) = \pm 1$.

А это возможно лишь тогда, когда

$$\eta_j = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma_j + Q\tau_{2j}\sqrt{2\Theta}),$$

где $\tau_{2j} = 1$, i или $\tau_{2j} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $Q \neq 1$ единственность такой требуемой единицы устанавливается аналогично лемме. Если же $Q = 1$, то получим исключение. Итак, окончательно получаем теорему.

Теорема 3. *Если $2a$ неполный квадрат и форма $ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4$ неприводима, неопределенное уравнение $ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4 = 8$ может иметь, за конечным числом исключений, не более одного целого положительного решения.*

Эти исключения таковы:

1) полю $R(\sqrt{a}, \sqrt{-c}, \sqrt{2\Theta})$ принадлежит единица $\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma + \sqrt{2\Theta})$

(при этом $a + 2b - c = 8$),

2) полю $R(\sqrt{a}, \sqrt{-c}, \sqrt{2\Theta})$ принадлежит единица $\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma + i\sqrt{2\Theta})$

(при $ac = S^2$),

3) указанному полю принадлежит единица $\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma + I\sqrt{2\Theta})$, либо единица $\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\gamma + I^2\sqrt{2\Theta})$, где $I = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (в этом случае $ac - 3S^2$).

ЛИТЕРАТУРА

[1] ФАДЕЕВ, Д. К.: Об уравнении $ax^4 - by^4 = \sigma$; $\sigma = 1, 2, 4, 8$. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, *28*, 1939, 141—145.
[2] ПОДСЫПАНИН, В. Д.: Об уравнении $ax^4 + bx^2y^2 - cy^4 = 1$. Матем. сб. *18* (60), вып. 1, 1946, 105—114.
[3] ПОДСЫПАНИН, В. Д.: Об одном неопределенном уравнении 4 степени. Уч. зап. Ленингр. гос. нед. ин-та им. А. И. Герцена, *86*, 1949, 195—216.
[4] ПОСТНИКОВ, М. М.: Теория Галуа. 1963.
[5] ПОДСЫПАНИН, В. Д.: Об одном неопределенном уравнении. ИАН СССР, *5*, 1941, 305—324.
[6] BAKER, A.: The Diophantine equation $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. J. London Math. Soc., *43*, 1968, 1—9.

Поступило 7. 1. 1969

Кафедра математики
Пятигорского фармацевтического института
Пятигорск, СССР

ON AN INDETERMINATE EQUATION

E. T. Avanesov

Summary

This article deals with the diophantine equation

$$ax^4 + 2bx^2y^2 - cy^4 = 8\,.$$

Our method is the generalization of the famous Podsypanin method. We state that this equation in general may have no more than one integer positive solution.