Mathematica Bohemica

E. Haouala

Topologie fine dans les espaces harmoniques

Mathematica Bohemica, Vol. 117 (1992), No. 1, 33–41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126239

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1992

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

TOPOLOGIE FINE DANS LES ESPACES HARMONIQUES

E. HAOUALA, Tunis

(Reçu le 28 Septembre 1989)

0. INTRODUCTION

Le problème suivant en théorie du potentiel était posé par J. Lukeš et I. Netuka [6, p. 318]: caractériser tous les espaces harmoniques pour lesquels la topologie fine coincide avec la topologie initiale. Sa motivation est l'article de J. Král et J. Lukeš [5] où les auteurs ont décri tous les espaces harmoniques dont les fonctions harmoniques peuvent être prolongées indéfiniment. Pour ces espaces la propriété ci-dessus est vérifiée.

Ce travail traite cette question. Dans une première section nous montrons qu'un espace $\mathcal{P}$-harmonique $(X^*, \mathcal{H})$ vérifiant l'égalité des deux topologies fine et initiale est nécessairement un espace de Brelot sur lequel l'axiome D est valable et tel que le plus grand sous-ensemble polaire $P = \{x \in X : \{x\} \text{ est polaire}\}$ est un sous-espace discret de X.

Utilisant un critére d'effilement, nous montrons dans une deuxième section qu'un espace $\mathcal{P}$-harmonique de Brelot $(X^*, \mathcal{H})$ vérifiant l'axiome D et où le seul semi-polaire est le vide vérifie l'égalité des topologies si et seulement si pour tout $x \in X$, $\liminf\limits_{y \to x} R_1^{\{y\}}$ est un potentiel non nul.

Dans toute la suite nous désignons par X un espace localement compact à base dénombrable connexe et par ${}^*\mathcal{H}$ un faisceau de fonctions hyperharmoniques sur X tel que $(X, {}^*\mathcal{H})$ soit un espace $\mathcal{P}$-harmonique au sens de constantinescu-Cornéa [1].

Nous dirons que $(X, {}^*\mathcal{H})$ vérifie la propriété (E) si la topologie fine sur X est égale à la topologie initiale de X.

1. Propriétés des espaces harmoniques vérifiant (E)

Dans cette section nous supposons que $(X,{}^*\mathcal{H})$ vérifie la propriété (E).

Noue commençons par énoncer quelques propriétés qui sont des conséquences immédiates de la continuité des fonctions hyperharmoniques réelles.

Proposition 1.1. *$(X,{}^*\mathcal{H})$ vérifie les propriétés suivantes:*

a. $(X,{}^*\mathcal{H})$ est un espace elliptique.

b. L'axiome D est valable sur X.

c. Soint $x \in X$. Si $\{x\}$ n'est pas polaire alors $R_1^{\{x\}}$ est un potentiel.

d. Pour tout sous-ensemble A de X, $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset b(A)$.

e. Soint V un ouvert relativement compact de X. Alors $\overset{\circ}{\overline{V}}$ est un ouvert régulier.

D é m o n s t r a t i o n. Soint A un ensemble absorbant non vide de X. Par définition A est fermé. D'après [1, p. 137], A est un ouvert fin, donc c'est un ouvert de X. Comme X est connexe, $A = X$

La continuité des potentiels finis implique que l'axiome D est valable sur X d'après [1, p. 228].

Soit $x \in X$. Supposons que $\{x\}$ n'est pas polaire. Alors $\hat{R}_1^{\{x\}}$ est un potentiel non nul. D'après [1, p. 232], l'axiome D implique que les semi-polaires sont polaires. Donc de (b) et du corollaire 6.3.6 dans [1] nous avons $\hat{R}_1^{\{x\}}(x) = 1$. Celà implique que $\hat{R}_1^{\{x\}} = R_1^{\{x\}}$.

Soint $A \subset X$ et p un potentiel fini et strict. D'après [1, p. 127], $\hat{R}_p^A = p$ sur $\overset{\circ}{A}$. La continuité de p de $\hat{R}_p^A$ implique que l'égalité s'étend à $\overline{\overset{\circ}{A}}$.

La propriété (e) est une conséquence de (d). □

Corollaire 1.2. *Soit $x \in X$. Alors il existe une base de voisinages de x, formée par des ouverts réguliers.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $(V_n)_n$ une suite d'ouverts relativement compacts qui est une base de voisinages de x. D'après (1.1.e), la suite $(\overset{\circ}{\overline{V}}_n)_n$ satisfait l'assertion. □

Proposition 1.3. *Soit A un sous-ensemble polaire de X. Alors A est un sous-espace discret de X.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit A un sous-ensemble polaire de X et $x \in A$, alors $A \setminus \{x\}$ est polaire. D'après [1, p. 143] A et $A \setminus \{x\}$ sont finement fermés, donc ils sont fermés et par suite $\{x\}$ est ouvert dans A. □

Proposition 1.4. *L'ensemble*

$$P := \{x \in X : \{x\} \text{ est polaire}\}.$$

est polaire.

Démonstration. D'après [1, p. 144], une réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire. Ici, l'espace X est à base dénombrable. Il nous suffit donc de montrer que P un sous-espace discret de X. A cet effet nous montrons que toute suite convergente dans P est stationnaire. Soit $(x_n)_n$ une suite de P convergente vers $x \in P$. L'ensemble $A := \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est réunion dénombrable des $\{x_n\}$ qui sont polaires. Donc A est polaire et par suite A est finement fermé. L'égalité des topologies fine et initiale implique que A est un fermé de X. On en déduit que $x \in A$, donc la suite $(x_n)_n$ est stationnaire. □

Remarque 1.5. Soint V un ouvert relativement compact de X tel que $\partial V \subset X \setminus P$. Alors V est régulier. En effet: L'ensemble des points irréguliers, qui est un semi-polaire contenu dans $X \setminus P$, est vide.

Théorème 1.6. *$(X, {}^*\mathcal{H})$ est un espace de Brelot.*

Démonstration. D'après (1.2), il reste à montrer que la propriété de convergence de Brelot est satisfaite.

Soit $(h_n)_n$ une suite croissante de fonctions harmoniques positives sur X telle que, $h := \sup h_n$ soit finie en un point $x_0 \in X$. La fonction h est hyperharmonique. D'après (1.1.a) on a X est elliptique donc

$$\overline{[h < \infty]} = X$$

et

$$A := [h = \infty] \subset P.$$

Soit $x \in P$. D'après (1.2) et (1.4), il existe un ouvert régulier V voisinage de x tel que $V \cap P = \{x\}$. La continuité de h sur ∂V implique que:

$$h(x) = \sup_n h_n(x) = \sup_n H_V h_n(x) = H_V h(x) < \infty.$$

On en déduit que $A = \emptyset$ et par suite que h est harmonique. □

2. Caractérisation des espaces harmoniques vérifiant (E)

Dans ce qui suit, nous supposons que l'espace $\mathcal{P}$-harmonique $(X, {}^*\mathcal{H})$ est de Brelot et que pour tout $y \in X$, $R_1^{\{y\}}$ est un potentiel continu. Cette hypothèse implique que les points ne sont pas semi-polaires. En particulier, d'après [1, p. 154], si $\mathcal{T}$ est une famille de fonctions hyperharmonique alors $\inf_{s \in \mathcal{T}} s$ est hyperharmonique. Celà donne que toute fonction hyperharmonique positive u est finie si elle est finie en un point. En effet: $\inf_n \frac{1}{n} u$ est une fonction hyperharmonique positive qui s'annule en un point. Comme l'espace est elliptique elle est identiquement nulle. Donc $[u = \infty]$ est vide.

Proposition 2.1. *Pour tout $A \subset X$ on a $A \subset b(A)$. En particulier si F est un fermé alors $\hat{R}_p^F = R_p^F$ pour tout potentiel p.*

Démonstration. Soit p un potentiel strict. D'après [1, p. 168], $b(A) = \{x \in X : \hat{R}_p^A(x) = p(x)\}$. Soit $y \in A$. Nous avons

$$p \geqslant R_p^A \geqslant R_p^{\{y\}}.$$

Comme la fonction $R_p^{\{y\}} = p(y) R_1^{\{y\}}$ est continue nous obtenons

$$p \geqslant \hat{R}_p^A \geqslant R_p^{\{y\}}.$$

Donc $p(y) = \hat{R}_p^A(y)$, ce qui montre que $y \in b(A)$. Soit F un fermé. Ce qui précède nous donne $\hat{R}_p^F = p$ sur F, donc $\hat{R}_p^F \geqslant R_p^F$. L'autre ingalité étant toujours vérifiée nous obtenons alors l'égalité. □

Proposition 2.2. *L'axiome D est valable sur X si et seulement si pour tout $y \in X$ les potentiels à support $\{y\}$ sont proportionnels.*

Démonstration. Supposons que l'axiome D est vérifié. Soit $y \in X$ et p un potentiel harmonique sur $X \setminus \{y\}$ tel que $p(y) = 1$. Soit $(F_n)_n$ une suite de voisinages fermés de y avec $\bigcap_n F_n = \{y\}$. D'après (2.1) et [1, p. 195] nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_p^{F_n} = p.$$

D'après [1, p. 195] nous obtenons

$$p = R_p^{\cap F_n} = R_p^{\{y\}} = R_1^{\{y\}}.$$

L'implication inverse découle du théorème 25.3 dans [2]. □

Remarque 2.3. L'example suivant montre qu'il existe des espaces $\mathcal{P}$-harmoniques de Brelot vérifiant l'axiome D et pour lesquels le seul semi polaire est le vide, pourtant la topologie fine est différente de la topologie initiale.

Soit X la partie de $\mathbf{R}^2$

$$X : [0,1[\times\{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^{-n}\} \times [0, 2^{-n}].$$

Posons

$$\begin{aligned} y_n &= (2^{-n}, 2^{-n}),\ y = (0,0), \\ z_n &= (2^{-n}, 0). \end{aligned}$$

Pour tout ouvert $U \subset X$, soit $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions réelles h sur U ayant les propriérés suivantes:

a. Si I est un intervalle ouvert:

$$I \subset U \setminus \big(\{y_n : n \geqslant 1\} \cup \{z_n, n \geqslant 1\}\big)$$

alors $h_{|I}$ est linéaire affine.

b. Si $y_n \in U$ alors h est constante dans un voisinage de y_n.

c. Si $y \in U$ alors h est constante dans un voisinage de y.

d. Si $z_n \in U$ alors pour tout ε, $0 < \varepsilon < 2^{-(n+1)}$, si $x_1 = (2^{-n} - \varepsilon, 0)$, $x_2 = (2^{-n} + \varepsilon, 0)$ et $x_3 = (2^{-n}, \varepsilon)$ on s

$$h(z_n) = 4^{-n} h(x_3) + \frac{1}{2}(1 - 4^{-n})\big(h(x_1) + h(x_2)\big).$$

Nous obtenons ainsi un bon espace $\mathcal{P}$-harmonique de Brelot. Soit $x = (x_1, x_2) \in X \setminus \{y\}$ et U un ouvert relativement compact et connexe contenant x de la forme suivante:

$$\begin{aligned} &U =]x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_2[\times\{0\} \cup \{x_1\}\times]0, \varepsilon_3[\ \text{ avec } 0 < \varepsilon_i < 1/2^n \ \text{ si } \ x = z_n \\ &U \subset \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[\times \{0\} \ \text{ si } \ \frac{1}{2^{n+1}} < x_1 < \frac{1}{2^n} \ \text{ et } \ x_2 = 0. \\ &U \subset \{1/2^n\}\times]0, 1/2^n] \ \text{ si } \ x_1 = 1/2^n \ \text{ et } \ x_2 > 0 \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in U$. Fixons les autres points de ∂U et faisons tendre α vers x de façons a avoir des ouverts U_α de la même forme que U. Il est facile à voir que

$$\lim_{\alpha \to x} H_{U_\alpha} 1_{\{\alpha\}}(x) = 1.$$

Soit s une fonction surharmonique positive sur X. Alors

$$s(x) \geqslant H_{U_\alpha} s(x) \geqslant s(\alpha) H_{U_\alpha} 1_{\{\alpha\}}(x).$$

Celà donne

$$s(x) \geqslant \limsup_{\alpha \to X} s(\alpha).$$

Donc s est continue sur $X \setminus \{x\}$. En particulier si s est un potentiel de support $\{x\}$ avec $s(x) = 1$ alors $s \geqslant R_1^{\{x\}}$, d'autre part d'après [1, p. 195], $s \leqslant \lambda R_1^{\{x\}}$ pour tout $\lambda > 1$ donc $s \leqslant R_1^{\{x\}}$ d'où l'égalité.

Soit p un potentiel de support $\{y\}$. Alors p est constant sur $\{1/2^n\} \times [0, 1/2^n]$ et vaut $p(z_n)$. La condition (d) implique alors que p est linéaire sur $]0,1[\times\{0\}$. Par suite $\lim_{\substack{x \to y \\ x \neq y}} p(x)$ existe. Soit $U_n = \{(x_1, x_2) \in X : x_1 < 1/2^n\}$. Nous avons

$$p(y) \geqslant H_{U_n} p(y) = p(1/2^n) H_{U_n} 1 = p(1/2^n).$$

Donc

$$p(y) \geqslant \lim_{\substack{x \to y \\ x \neq y}} p(x) = \limsup_{x \to y} p(x).$$

On en déduit que p est continu et comme précedemment $p = p(y) R_1^{\{y\}}$. Donc les potentiels à support ponctuel sont proportionnels, par suite l'axiome D est valable sur X.

Un calsul simple montre que pour cet espace

$$R_1^{\{y_n\}}(y) = \frac{2}{2^n + 3}.$$

Donc

$$\sum_{n \geqslant 3} R_1^{\{y_n\}}(y) < 1.$$

Celà implique que $\{y_n, n \geqslant 3\}$ est effilé au point y. Par conséquent $X \setminus \{y_n, n \geqslant 3\}$ est un voisinage fin de y qui n'est pas un voisinage pour la topologie sur X induite par celle de $\mathbf{R}^2$.

Pour le reste de cette section nous supposons que l'axiome D est vérifié sur X.

Proposition 2.4. *Soit $x \in X$. Alors $\liminf_{y \to x} R_1^{\{y\}} = \alpha R_1^{\{x\}}$, où $\alpha \in [0, 1]$.*

Démonstration. D'après [1, p. 154] et du fait que le vide est le seul semi-polaire de X, on a

$$\lim_{y \to x} \widehat{\inf} R_1^{\{y\}} = \liminf_{y \to x} R_1^{\{y\}}.$$

Donc $p = \liminf_{y \to x} R_1^{\{y\}}$ est un potentiel. Il existe une suite $(y_n)_n$ convergente vers x telle que $R_1^{\{y\}}$ converge simplement vers p, sur un sous-ensemble dense de $X \setminus \{x\}$. D'après [4, p. 297 et 298], p est un potentiel de support $\{x\}$. Comme les potentiels à support ponctuel sont proportionnels, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $p = \alpha R_1^{\{x\}}$. Pour montrer que $\alpha \in [0,1]$, remarquons que $p(x) = \liminf_{y \to x} R_1^{\{y\}}(x) \leqslant 1$. Soit $z \in X$, $z \neq x$. Pour $y \neq X$ on a

$$\begin{aligned} R_1^{\{x\}}(z) &\geqslant R^{\{y\}}_{R_1^{\{x\}}}(z) \\ &= R_1^{\{x\}}(y) R_1^{\{y\}}(z) \end{aligned}$$

donc

$$R_1^{\{y\}}(z) \leqslant \frac{1}{R_1^{\{x\}}(y)} R_1^{\{x\}}(z).$$

D'où

$$p(z) \leqslant \limsup_{y \to x} R_1^{\{y\}}(z) \leqslant R_1^{\{x\}}(z).$$

On conclut que $p \leqslant R_1^{\{x\}}$, c'est à dire que $\alpha \in [0,1]$. □

L'idée de la démonstration du résultat suivant sur l'effilement est celle de la démonstration du critère de Wiener dans [3, p. 528].

Théorème 2.5. *Si $A \subset X$ est effilé en un point $x \in \bar{A}$, alors* $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} R_1^{\{y\}} = 0$.

Démonstration. D'après (2.1) $x \in \bar{A} \setminus A$. Supposons que $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} R_1^{\{y\}} \neq 0$. Utilisant (2.4) nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que A est une suite de points y_n, $n \in \mathbb{N}$, deux à deux distincts qui convergent vers x et tels qu'il existe $c > 0$ vérifiant $R_1^{\{y_n\}} \geqslant c R_1^{\{x\}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après [2, p. 460], il existe un potentiel p tel que $p(x) < \infty$ et $\lim_{n \to \infty} p(y_n) = \infty$. Notons par G la fonctions de Green sur X et soit μ la mesure pour laquelle

$$R_p^A = \int G(.,z)\mu(dz).$$

Posons $\mu_n = 1_{\{y_n\}}\mu$. Alors $\mu_n = \lambda_n \varepsilon_{y_n}$ pour un réel $\lambda_n > 0$. Comme R_p^A est harmonique sur A, nous avons $\mu = \sum_n \mu_n = \sum_n \lambda_n \varepsilon_{y_n}$. Celà donne

$$R_p^A = \sum_n \lambda_n G(., y_n).$$

Donc $R_p^A = \sum_n \alpha_n R_p^{\{y_n\}}$ où $\alpha_n = \dfrac{\lambda_n G(y_n, y_n)}{p(y_n)}$. Comme dans la démonstration de (2.4) nous avons

$$R_1^{\{y_n\}}(z) R_1^{\{z\}}(x) \leqslant R_1^{\{y_n\}}(x).$$

Donc, pour $z \in A$

$$R_1^{\{y_n\}}(z) \leqslant \frac{1}{c} R_1^{\{y_n\}}(x).$$

Nous obtenons sur A

$$\begin{aligned} R_p^A &= \alpha_n R_p^{\{y_n\}} + \sum_{j \neq n} \alpha_j R_p^{\{y_j\}} \\ &\leqslant \alpha_n R_p^{\{y_n\}} + \frac{1}{c} \sum_j \alpha_j R_p^{\{y_j\}}(x) \\ &= \alpha_n R_p^{\{y_n\}} + \frac{1}{c} R_p^A(x). \end{aligned}$$

Celà implique que pour $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \alpha_n R_p^{\{y_n\}}(y_n) &\geqslant R_p^A(y_n) - \frac{1}{c} R_p^A(x) \\ &= p(y_n) - \frac{1}{c} R_p^A(x). \end{aligned}$$

Pour n suffisemment grand, nous savons que $p(y_n) - \frac{1}{c} R_p^A(x) \geqslant 1$, donc

$$\alpha_n R_p^{\{y_n\}} \geqslant R_1^{\{y_n\}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum R_1^{\{y_n\}}(x) &\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} R_1^{\{y_n\}}(x) + \sum_{n \geqslant n_0} \alpha_n R_p^{\{y_n\}}(x) \\ &\leqslant n_0 + R_p^A(x) \\ &\leqslant n_0 + p(x) < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que $R_1^{\{y_n\}}(x) \geqslant c$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Théorème 2.6. *$(X, {}^*\mathcal{H})$ vérifie la propriété (E) si et seulement si pour tout $x \in X$, $\liminf_{y \to x} R_1^{\{y\}} \neq 0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $(X, {}^*\mathcal{H})$ vérifie (E) et qu'il existe $x \in X$ et une suite $(y_n)_n$ convergente vers x telle que

$$\liminf_{n \to \infty} R_1^{\{y_n\}} = 0.$$

Soit θ un réel, $\theta < 1$. Il existe une sous-suite $(y_{n_k})_k$ telle que

$$R_1^{\{y_{n_k}\}}(x) \leqslant \frac{\theta}{2^k}.$$

Pour cette sous-suite nous obtenons:

$$\sum_{1}^{\infty} R_p^{\{y_{n_k}\}}(x) \leqslant \theta < 1.$$

Donc l'ensemble $A = \{y_{n_k} : k \in \mathbf{N}\}$ est effilé en x. Par suite $X \setminus A$ est un voisinage fin de x qui n'est pas un voisinage de x, en contradiction avec l'hypothèse.

Inversement. Supposons que pour tout $x \in X$, $\liminf_{y \to x} R_1^{\{y\}} \neq 0$. Le théorème précédent nous donne que $\bar{A} \subset b(A)$ pour tout $A \subset X$. En particulier si A est ouvert fin alors $\overline{\complement A} = b(\complement A)$. D'autre part $\complement A$ est un fermé fin donc $\complement A = b(\complement A)$. Nous obtenons $\overset{\circ}{A} = A$, donc A est un ouvert de X. □

Remarques 2.7.

1. Une condition suffisante pour qu'un espace $\mathcal{P}$-harmonique de Brelot vérifie la propriété (E) est que l'application

$$X \times X \to \mathbf{R} : (x, y) \mapsto R_1^{\{y\}}(x)$$

soit continue.

2. Dans [7] il a été démonter que sur l'espace X: le "Sierpiński gasket" qui est un ensemble fractal de dimension de Hausdorff $\log_2 3$ il y a une structure harmonique canonique (la seule qui est invariante par les symétries de X). Pour cette structure les points ne sont pas polaires et la topologie fine est la topologie initiale (héritée de $\mathbf{R}^2$). Si on enlève un point x_0 le reste $X' = X \setminus \{x_0\}$ est $\mathcal{P}$-harmonique et l'application $(x, y) \mapsto {}^{X'}R_1^{\{y\}}(x)$ est continue.

Cet example montre que la question de caractériser l'espace topologique X pour lequel la topologie fine associée à $(X, {}^*\mathcal{H})$ coincide avec la topologie initiale est assez délicate, et reste encore un problème ouvert.

References

[1] *C. Constantinescu, A. Cornea*: Potential theory on harmonic spaces, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[2] *R. M. Herve*: Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier *12* (1962), 415–571.

[3] *H. Huber*: Winer's criterion in potential theory with applications to nilpotent Lie groups, Math. Z. *190* (1985), 527–542.

[4] *K. Janssen*: On the existence of green function for harmonic spaces, Math. Ann. *208* (1974), 295–303.

[5] *J. Král, J. Lukeš*: Indefinite harmonic continuation, Časopis pro pěstování matematiky *98* (1973), 87–94, Praha.

[6] *J. Lukeš, I. Netuka*: Potential theory Copenhagen 1979., Lecture Notes in Mathematics, Problem section, vol. 787, pp. 316–319.

[7] *V. Metz*: Brownsche Bewegung auf dem Sierpiński gasket aus potential theorischer Sicht, Diplomarbeit Uni. Bielefeld (1988).

L'addresse de l'auteur: Faculté des Sciences de Tunis, Département de Mathématiques, 1060 Tunis, Tunisie.