Svatopluk Bláha; Václav Peterka

Syntéza číslicových regulačních obvodů podle kritéria kvadratické regulační plochy

Kybernetika, Vol. 1 (1965), No. 2, (127)--143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/125210

KYBERNETIKA ČÍSLO 2, ROČNÍK 1/1965

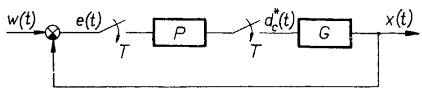
Syntéza číslicových regulačních obvodů podle kritéria kvadratické regulační plochy

SVATOPLUK BLÁHA, VÁCLAV PETERKA

V práci je odvozena metoda deterministické syntézy diskrétního korekčního členu pro regulační obvod se spojitou lineární regulovanou soustavou. Metoda využívá modifikovaného kritéria minima integrálu kvadrátu odchylky regulované veličiny. Velké překývnutí přechodové charakteristiky obvodu, ke kterému obvykle dochází při použití tohoto kritéria v obyčejném tvaru, je potlačeno zanedbáním kvadratické regulační plochy v první periodě vzorkování.

1. FORMULACE ÚLOHY

Mějme regulační obvod s číslicovým korekčním členem, jehož schéma je na obrázku 1. Jednotlivé symboly značí:



Obr. 1.

P číslicový korekční člen s přenosem $P(z)$;

G spojitou část regulačního obvodu tvořenou tvarovacím členem nultého řádu a regulovanou soustavou. O přenosu spojité části $G(z, \varepsilon)$ budeme předpokládat, že jeho póly leží vesměs uvnitř jednotkové kružnice s výjimkou pólu v bodě $z = 1$, který může být i násobný. Přenos budeme psát v tomto tvaru

$$G(z, \varepsilon) = \frac{B(z, \varepsilon)}{A(z)} = \frac{b_0(\varepsilon)\, z^n + b_1(\varepsilon)\, z^{n-1} + \ldots + b_n(\varepsilon)}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{1}$$

Polynomy $A(z)$ a $B(z, \varepsilon)$ jsou obecně stejného stupně, pokud se v obvodu nevyskytuje dopravní zpoždění. Dopravní zpoždění vylučujeme.

$x(t)$ regulovanou veličinu;

$w(t)$ řídicí veličinu. O jejím obrazu $W(z, \varepsilon)$ budeme předpokládat, že všechny jeho póly leží uvnitř jednotkové kružnice s výjimkou pólu v bodě $z = 1$, který může být i násobný.

$e(t)$ regulační odchylku definovanou vztahem $e(t) = w(t) - x(t)$, $E(z, \varepsilon)$ je její obraz;

$d_c^*(t)$ posloupnost výstupních hodnot číslicového korekčního členu. Její obraz značíme $D_c(z)$.

T periodu vzorkování.

Modifikovaná z-transformace používaná v tomto článku je na rozdíl od [3], [4], [5] definována vztahem

$$F(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + \varepsilon T) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k, \varepsilon] z^{-k}; \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq 1 .$$

Naším úkolem bude stanovit přenos číslicového korekčního členu tak, aby integrál čtverce regulační odchylky

$$Y = \int_0^{\infty} [\vartheta(t) e(t)]^2 \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

byl minimální. V integrálu je $\vartheta(t)$ váhová funkce tvaru

$$\vartheta(t) = 1(t - T)$$

podobně jako v práci [7].

Podle obr. 1 snadno odvodíme přenos korekčního členu:

$$P(z) = \frac{D(z)}{W(z, 0) - D(z) G(z, 0)}, \tag{3}$$

kde $D(z)$ označuje obraz hledaného výstupu korekčního členu. Je vidět, že tento přenos je určen, je-li znám obraz posloupnosti výstupních hodnot korekčního členu $D(z)$, neboť obraz $W(z, 0)$ i přenos $G(z, 0)$ jsou dány. Můžeme tedy hledat nikoliv přenos korekčního členu, ale obraz jeho výstupní posloupnosti hodnot $D(z)$. Řešení se tím poněkud zjednoduší.

Číslicový korekční člen musí být navržen tak, aby integrál (2) měl minimální hodnotu, to znamená, aby byl uzavřený obvod stabilní. Z tohoto důvodu musí obraz $D(z)$ splňovat následující podmínky:

1. všechny jeho póly musí ležet uvnitř jednotkové kružnice s výjimkou pólu v bodě $z = 1$;
2. ustálená hodnota $d^*(t)$ pro $t \to \infty$ musí být taková, aby platilo $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$.

Zavedeme-li si označení

$$D(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{-i}, \tag{4}$$

musí limita $\lim_{k \to \infty} d_k = d_\infty$ nabývat takové hodnoty, aby platilo

$$e(\infty) = \lim_{z \to 1} (z - 1) E(z, \varepsilon) = 0, \tag{5}$$

přičemž obraz odchylky $E(z, \varepsilon)$ vypočteme takto:

$$E(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) - D(z, \varepsilon) G(z, \varepsilon). \tag{6}$$

Vyjádříme-li si obrazy $E(z, \varepsilon)$, $W(z, \varepsilon)$ a $D(z)$ pomocí obrazů jejich diferencí ($\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]$), dostaneme

$$\begin{aligned} E(z, \varepsilon) &= (z - 1)^{-1} \Delta E(z, \varepsilon), \\ W(z, \varepsilon) &= (z - 1)^{-1} \Delta W(z, \varepsilon), \\ D(z) &= (z - 1)^{-1} \Delta D(z). \end{aligned} \tag{7}$$

Dosadíme výrazy (7) do rovnice (5) a limitujeme:

$$e(\infty) = \Delta E(1; \varepsilon) = \lim_{z \to 1} \Delta W(z, \varepsilon) - \lim_{z \to 1} \Delta D(z) \lim_{z \to 1} G(z, \varepsilon) = 0.$$

Odtud pro $\varepsilon = 0$ dostaneme

$$\lim_{z \to 1} \Delta D(z) = \lim_{z \to 1} \frac{\Delta W(z, 0)}{G(z, 0)} = d_\infty. \tag{8}$$

Je-li obraz $G(z, \varepsilon)$ stabilní, musí mít d_∞ konečnou hodnotu.

2. ODVOZENÍ VÝCHOZÍHO VZTAHU

Integrál (2) pro váhovou funkci $\vartheta(t) = \mathbf{1}(t - T)$ přepíšeme s novým označením $f(t) = \vartheta(t) e(t)$:

$$Y = \int_0^\infty [\vartheta(t) e(t)]^2 \, dt = \int_0^\infty f^2(t) \, dt. \tag{9}$$

Vypočteme nejdříve integrál čtverce odchylky mezi sousedními okamžiky vzorkování kT a $(k + 1) T$.

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f^2(t) \, dt = T \int_0^1 f^2[k, \varepsilon] \, d\varepsilon, \tag{10}$$
$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \infty.$$

Sečteme výrazy (10) pro všechna $k \geqq 0$ a po záměně pořadí sčítání a integrace dostaneme vztah pro integrál (9)

$$Y = T \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} f^2[k, \varepsilon] \, d\varepsilon. \tag{11}$$

 Je-li $F(z, \varepsilon)$ obrazem odchylky $f[k, \varepsilon]$, platí podle věty o zpětné transformaci:

$$f[k, \varepsilon] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z, \varepsilon)\, z^{k-1}\, \mathrm{d}z\,, \tag{12}$$

kde Γ značí integrační cestu v kladném smyslu po jednotkové kružnici (nadále již integrační cestu nebudeme označovat). Bude tedy platit:

$$T \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} f^2[k, \varepsilon]\, \mathrm{d}\varepsilon = T \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} f[k, \varepsilon]\, \frac{1}{2\pi j} \oint F(z, \varepsilon)\, z^{k-1}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\varepsilon =$$

$$= T \int_0^1 \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} \oint F(z, \varepsilon) f[k, \varepsilon]\, z^k \frac{\mathrm{d}z}{z}\, \mathrm{d}\varepsilon =$$

$$= T \int_0^1 \frac{1}{2\pi j} \oint F(z, \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} f[k, \varepsilon]\, z^k \frac{\mathrm{d}z}{z}\, \mathrm{d}\varepsilon$$

a v konečném tvaru

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} T \int_0^1 f^2[k, \varepsilon]\, \mathrm{d}\varepsilon = \frac{T}{2\pi j} \oint \int_0^1 F(z, \varepsilon)\, F(z^{-1}, \varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon \frac{\mathrm{d}z}{z}\,, \tag{13}$$

neboť podle definičního vztahu modifikované z-transformace je

$$\sum_{k=0}^{\infty} f[k, \varepsilon]\, z^k = F(z^{-1}, \varepsilon)\,.$$

Ze vztahu (9) je vidět, že

$$F(z, \varepsilon) = E(z, \varepsilon) - e_0(\varepsilon) \tag{14a}$$

a

$$F(z^{-1}, \varepsilon) = E(z^{-1}, \varepsilon) - e_0(\varepsilon)\,. \tag{14b}$$

Po dosazení těchto výrazů do rovnice (13) dostaneme výchozí vztah pro odvození metody:

$$Y = \frac{T}{2\pi j} \oint \int_0^1 [E(z, \varepsilon) - e_0(\varepsilon)]\, [E(z^{-1}, \varepsilon) - e_0(\varepsilon)]\, \mathrm{d}\varepsilon \frac{\mathrm{d}z}{z}\,. \tag{15}$$

V následujícím oddílu budeme zpočátku předpokládat, že tento integrál konverguje a podmínky konvergence odvodíme dodatečně.

3. ODVOZENÍ PODMÍNKOVÉ ROVNICE PRO OPTIMÁLNÍ PRŮBĚH

Obraz odchylky bude podle obr. 1 (podobně jako vztah (6)) roven

$$E(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) - G(z, \varepsilon)\, D_c(z) \tag{16a}$$

a obdobně

(16b) $$E(z^{-1}, \varepsilon) = W(z^{-1}, \varepsilon) - G(z^{-1}, \varepsilon)\, D_c(z^{-1})\,.$$

Obraz vstupu $D_c(z)$ do spojité části budeme definovat takto:

(17) $$D_c(z) = D(z) + \lambda\, H(z)\,,$$
$$H(z) = (z - 1)^k\, H_0(z)\,,$$

kde $D(z)$ je obraz hledané optimální výstupní funkce číslicového korekčního členu, při níž je integrál (2) minimální, λ je Lagrangeův koeficient a $H(z)$ je obraz přídavné funkce $h[i]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$. Funkce $H(z)$ má v bodě $z = 1$ nulový bod, jehož násobnost je shodná s násobností pólu přenosu $G(z, \varepsilon)$ v bodě $z = 1$. Funkce $H_0(z)$ nechť je racionální funkcí a budeme o ní předpokládat, že :

1. všechny její póly leží uvnitř jednotkové kružnice, což znamená, že

$$\lim_{i \to \infty} h[i] = 0\,,$$

2. její funkční hodnota pro $i = 0$ je

(18) $$h_0 = 0\,.$$

(Tyto požadavky na vlastnosti funkce $H_0(z)$ jsou zdůvodněny na konci tohoto oddílu.)

Požadovaná vlastnost hledané optimální funkce $d[i]$, vyjádřená vztahem (5), nebude přičtením takto definované funkce $h[i]$ porušena.

Má-li být $D(z)$ obrazem optimálního výstupu korekčního členu, musí integrál (2), který je pro určitou funkci $H(z)$ funkcí λ (to plyne z integrálu (15) po dosazení vztahů (16) a (17)), nabývat minimální hodnoty při $\lambda = 0$ a podmínka pro minimum nesmí záviset na funkci $H(z)$.

Pro zjednodušení zápisu si zavedeme označení

$$F(z) = F\,; \qquad F(z^{-1}) = \bar{F}\,;$$
$$G(z, \varepsilon) = G(\varepsilon)\,; \quad G(z^{-1}, \varepsilon) = \bar{G}(\varepsilon)$$

a podobně pro ostatní funkce. Rovnice (16) si přepíšeme s novým označením a dosadíme vztah (17):

(19) $$E(\varepsilon) = W(\varepsilon) - G(\varepsilon)\,[D + \lambda H]\,,$$
$$\bar{E}(\varepsilon) = \bar{W}(\varepsilon) - \bar{G}(\varepsilon)\,[\bar{D} + \lambda \bar{H}]\,.$$

Odchylka v intervalu $0 \leqq t \leqq T$ bude vzhledem k rovnicím (19), (18) a (1):

(20) $$e_0(\varepsilon) = w_0(\varepsilon) - b_0(\varepsilon)\, d_0\,.$$

Podmínka pro minimum, jak jsme již uvedli, je

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\, Y(\lambda) = 0$$

a protože jde o derivaci podle parametru, můžeme derivaci převést pod integrál

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} Y(\lambda) = \frac{T}{2\pi j} \oint \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} [E(\varepsilon) - e_0(\varepsilon)] [\bar{E}(\varepsilon) - e_0(\varepsilon)] \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Po dosazení (19) a limitování $\lambda \to 0$ dostaneme podmínku pro minimum ve tvaru

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} Y(\lambda) = \frac{T}{2\pi j} \oint \int_0^1 \{G(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)\, D\bar{H} + G(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)\, \bar{D}H -$$

$$- W(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)\, \bar{H} - \bar{W}(\varepsilon)\, G(\varepsilon)\, H + [G(\varepsilon)\, H + \bar{G}(\varepsilon)\, \bar{H}]\, e_0(\varepsilon)\} \,\mathrm{d}\varepsilon \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$$

a upravíme ji dále takto

$$\oint T \int_0^1 [G(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)\, D - W(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon) + e_0(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)]\, \bar{H} +$$

(21) $$+ [G(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)\, \bar{D} - \bar{W}(\varepsilon)\, G(\varepsilon) + e_0(\varepsilon)\, G(\varepsilon)]\, H \,\mathrm{d}\varepsilon \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0.$$

Tuto rovnici zapíšeme jednodušeji

(22) $$\oint I_1(z) \frac{\mathrm{d}z}{z} + \oint I_2(z) \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0,$$

kde

(23) $$I_1(z) = T \int_0^1 [G(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)\, D - W(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon) + e_0(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)]\, \bar{H} \,\mathrm{d}\varepsilon,$$

$$I_2(z) = T \int_0^1 [G(\varepsilon)\, \bar{G}(\varepsilon)\, \bar{D} - \bar{W}(\varepsilon)\, G(\varepsilon) + e_0(\varepsilon)\, G(\varepsilon)]\, H \,\mathrm{d}\varepsilon.$$

Integrand $I_2(z)$ přejde pouhou záměnou z za z^{-1} a naopak, na integrand $I_1(z)$. Zavedeme tedy substituci

(24) $$z = \zeta^{-1}; \ \mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{z^2} \mathrm{d}z$$

a odtud dále plyne

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -z\, \mathrm{d}\zeta = -\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Po substituci bude mít integrál $I_2(z)$ stejný tvar jako $I_1(z)$, pouze s jiným označením integrační proměnné. Protože na označení nezáleží, zaměníme ζ za z^{-1} a napíšeme rovnici (22) takto

(25) $$\oint I(z) \frac{\mathrm{d}z}{z} - \oint I(z^{-1}) \frac{\mathrm{d}z^{-1}}{z^{-1}} = 0.$$

Poněvadž integrační cestou je jednotková kružnice, je možno, jak lze snadno ukázat, přepsat rovnici (25) do tohoto tvaru

$$\oint I(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{z} - \oint I(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0\,.$$

Odtud po změně orientace integrační cesty u jednoho z integrálů ihned plyne, že

$$\oint I(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0\,,$$

kde $I(z)$ je libovolný z výrazů $I_1(z)$ a $I_2(z)$. Zvolíme z nich $I_1(z)$. Podmínku pro minimální hodnotu integrálu (2) můžeme nyní vyjádřit v konečném tvaru:

$$\oint T \int_0^1 [G(\varepsilon)\,\bar{G}(\varepsilon)\,D - W(\varepsilon)\,\bar{G}(\varepsilon) + e_0(\varepsilon)\,\bar{G}(\varepsilon)]\,\bar{H}\,\mathrm{d}\varepsilon\,\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0\,. \tag{26}$$

Všechny operace a úvahy použité v tomto oddílu mají smysl jen tehdy, konverguje-li integrál (15) nebo integrál (13), což je totéž. Integrál (13) bude konvergovat, budou-li póly funkce $F(z, \varepsilon)$ ležet uvnitř jednotkové kružnice. Podle vztahů (14), (16) a (18) je

$$F(\varepsilon) = W(\varepsilon) - G(\varepsilon)\,[D + \lambda(z-1)^k\,H_0] - e_0(\varepsilon)\,. \tag{27}$$

O funkcích $W(z, \varepsilon)$, $G(z, \varepsilon)$ a $D(z)$ jsme předpokládali, že jejich póly leží uvnitř jednotkové kružnice s výjimkou pólů v bodě $z = 1$. Funkce $H_0(z)$ má póly pouze uvnitř jednotkové kružnice. Konvergence integrálu (13) bude záviset tedy pouze na pólu funkce $F(z, \varepsilon)$ v bodě $z = 1$; ostatní póly ji nenarušují.

Bude-li mít přenos $G(z, \varepsilon)$ k-násobný pól v bodě $z = 1$, plyne z rovnice (26), že funkci $D(z)$ musíme stanovit tak, aby obsahovala k-násobný nulový bod v $z = 1$. Bude-li tento požadavek splněn, vykrátí se póly v bodě $z = 1$ funkce $G(z, \varepsilon)$.

Z rovnice (8) plyne, že funkce $D(z)$ musí obsahovat pól v $z = 1$ takové násobnosti jako je násobnost tohoto pólu v obraze $W(z, \varepsilon)$, má-li být ustálená odchylka $e(\infty) = 0$.

Závěrem můžeme shrnout: obraz odchylky nebude obsahovat pól v bodě $z = 1$, a v důsledku toho integrály (13) a (15) a tedy i integrály (21) a (26) budou konvergovat, budou-li splněny následující podmínky pro hledanou funkci $D(z)$:

1. Funkce $D(z)$ má v bodě $z = 1$ nulový bod stejné násobnosti jako je násobnost pólu v $z = 1$ přenosu $G(z, \varepsilon)$.
2. Funkce $D(z)$ má v bodě $z = 1$ pól stejné násobnosti jako je násobnost tohoto pólu v obrazu $W(z, \varepsilon)$. (Ve výsledném vztahu pro obraz $D(z)$ se nuly a póly v bodě $z = 1$ krátí.)

4. VÝPOČET OPTIMÁLNÍHO PRŮBĚHU AKČNÍ VELIČINY

Podmínkovou rovnici (26) upravíme zavedením označení

$$D = \frac{D_1}{D_2}\,; \quad W(\varepsilon) = \frac{U(\varepsilon)}{V} \tag{28}$$

 a s použitím označení podle vztahu (1)

$$G(\varepsilon) = \frac{B(\varepsilon)}{A}\,; \quad \bar{G}(\varepsilon) = \frac{\bar{B}(\varepsilon)}{\bar{A}}$$

dostaneme

$$(29) \quad \oint \left[\frac{T\int_0^1 B(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon}{A\bar{A}}\, D - \frac{T\int_0^1 U(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon}{V\bar{A}} + \frac{T\int_0^1 e_0(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon}{\bar{A}} \right] \bar{H}\,\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0\,.$$

Označme si ještě

$$(30) \qquad T\int_0^1 B(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = a_n\bar{S} = a_n \sum_{i=-n}^{+n} s_{n+i} z^{-i}\,,$$

$$(31) \qquad T\int_0^1 U(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \bar{J}\,.$$

$$(32) \quad T\int_0^1 e_0(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = T\int_0^1 w_0(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon - d_0 T\int_0^1 b_0(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \bar{L} - d_0\bar{M}\,.$$

V rovnici (32) jsme použili vztahu (20). Výrazy (30) až (32) budou po integraci obsahovat výraz $1/T$, který se vykrátí.

Rovnici (29) přepíšeme s označením podle vztahů (28) a (30) až (32):

$$(33) \qquad \oint \left[\frac{a_n\bar{S}D_1}{A\bar{A}D_2} - \frac{\bar{J}}{V\bar{A}} + \frac{\bar{L} - d_0\bar{M}}{\bar{A}} \right] \bar{H}\,\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0\,.$$

Tento integrál bude roven nule nezávisle na volbě funkce $H(z)$ jen tehdy, bude-li integrand regulární funkcí uvnitř jednotkové kružnice. Obraz H má podle předpokladu póly uvnitř jednotkové kružnice a $\bar{H}$ tedy vně. Obraz $\bar{H}$ uvnitř jednotkové kružnice regulární je a zbývá zajistit, aby zde byl regulární funkcí i výraz

$$(34) \qquad R = \left[\frac{a_n\bar{S}D_1}{A\bar{A}D_2} - \frac{\bar{J}}{V\bar{A}} + \frac{\bar{L} - d_0\bar{M}}{\bar{A}} \right] \frac{1}{z}\,.$$

Výraz (34) nejdříve upravíme na vhodnější tvar. Symboly $\bar{A}$, $\bar{J}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$ označují polynomy v záporných mocninách z. Všechny polynomy jsou stupně n. Můžeme tedy záporné mocniny z rovnice (34) odstranit vynásobením čitatele i jmenovatele výrazem z^n. Zavedeme si nové smyboly:

$$(35) \qquad z^n\bar{A} = \hat{A}\,; \quad z^n\bar{B}(\varepsilon) = \hat{B}(\varepsilon) \quad \text{atd.}$$

Polynomy $\hat{A}$, $\hat{B}(\varepsilon)$ apod. jsou polynomy v kladných mocninách z, ale s opačným pořadím koeficientů než polynomy A, $B(\varepsilon)$ apod. Zavedeme si ještě symbol pro polynom, jehož kořeny jsou reciproké ke kořenům daného polynomu. Například: je-li dán polynom

$$A = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu),$$

polynom s reciprokými kořeny bude

$$A_R = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{1}{a_n} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(z - \frac{1}{z_\nu}\right). \tag{36}$$

Z rovnic (35) a (36) ihned plyne vztah

$$\hat{A} = a_n A_R. \tag{37}$$

Kořeny polynomu $\hat{A}$ jsou tedy reciproké ke kořenům polynomu A. Upravme ještě polynom $\bar{S}$, definovaný rovnicí (30). Podle vztahu (35) bude platit

$$\hat{S} = z^n \bar{S} = \int_0^1 B(\varepsilon)\, \hat{B}(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sum_{i=0}^{2n} s_i z^{2n-i} = \tag{38}$$

$$= \int_0^1 [b_0(\varepsilon)\, z^n + b_1(\varepsilon)\, z^{n-1} + \ldots + b_n(\varepsilon)]\, [b_n(\varepsilon)\, z^n + \ldots + b_1(\varepsilon)\, z + b_0(\varepsilon)]\, d\varepsilon.$$

Nyní lze snadno ukázat, že platí tento vztah pro koeficienty polynomu $\hat{S}$:

$$s_i = s_{2n-i} \quad (i = 0, 1, 2 \ldots n). \tag{39}$$

Polynomy tohoto typu, jsou-li sudého stupně, mají ke každému svému kořenu současně kořen reciproký. Můžeme tedy napsat:

$$\hat{S} = s_0 N N_R, \tag{40}$$

kde

$$N = z^n + n_1 z^{n-1} + \ldots + n_{-1} z + n_n.$$

Nechť všechny kořeny polynomu N leží uvnitř jednotkové kružnice.

Rovnici (34) upravíme vynásobením čitatele i jmenovatele výrazem z^n, zavedením symbolů podle vztahů (35) a sloučením jednotlivých zlomků:

$$R = \frac{a_n s_0 N_R N V D_1 - A\hat{J} D_2 + A V D_2(\hat{L} - d_0 \hat{M})}{a_n z A A_R V D_2}. \tag{41}$$

Má-li být výraz (41) regulární funkcí z uvnitř jednotkové kružnice, je třeba stanovit jeho čitatele tak, aby se vykrátil polynom $zAVD_2$, jehož kořeny leží podle předpokladů uvnitř jednotkové kružnice (viz odstavec 1 a 3). Musí tedy platit

$$s_0 N N_R V D_1 - \frac{1}{a_n} A\hat{J} D_2(\hat{L} - d_0 \hat{M}) = zAVQD_2, \tag{42}$$

kde Q je dosud neurčený polynom stupně $n - 1$, jak snadno vypočteme porovnáním stupňů polynomů na levé a pravé straně rovnice (42). (Poznamenejme jen, že ve vztazích (28) jsou polynomy D_1 a D_2 stejného stupně a stupeň polynomu $U(\varepsilon)$ nemůže být vyšší než stupeň polynomu V, tedy polynom $\hat{J}$ je nejvýše stupně $n + v$, kde v je stupeň polynomu V.) Z rovnice (42) již snadno vypočteme obraz hledané posloupnosti

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\frac{1}{s_0} zVQ + \frac{1}{a_n s_0} \hat{J} - \frac{1}{a_n s_0} V(\hat{L} - d_0 \hat{M})}{VN_R}. \tag{43}$$

Avšak polynom N_R má kořeny vně jednotkové kružnice, což odporuje předpokladu o D_2. Dosud neurčených n konstant polynomu Q stanovíme tedy tak, aby se vykrátil polynom N_R ve jmenovateli. Snadno vypočteme, že po vykrácení budou čitatel i jmenovatel výrazu (43) stupně $n + v$. Musí proto platit:

$$\frac{1}{s_0} zVQ + \frac{1}{a_n s_0} \hat{J} - \frac{1}{a_n s_0} V(\hat{L} - d_0 \hat{M}) = KN_R. \tag{44}$$

Po dosazení vztahu (44) do rovnice (43) dostaneme po vykrácení konečný výraz pro obraz hledané posloupnosti výstupních hodnot korekčního členu:

$$D = \frac{KA}{VN}. \tag{45}$$

Je ihned vidět, že vztah (45) splňuje oba požadavky z odstavce 3, kladené na obraz D.

Polynom K ve vzorci (45) je stupně v, tj. stejného stupně jako polynom V:

$$K = k_0 z^v + k_1 z^{v-1} + \ldots + k_v. \tag{46}$$

Polynom K má $v + 1$ dosud neurčených konstant. Určit je můžeme současně s koeficienty polynomu Q porovnáním koeficientů u stejných mocnin z v rovnici (42). Tento způsob, jehož použití je nutné při vyšším stupni polynomu V, je velmi pracný, i když nepředstavuje žádné překážky zásadního rázu. Jednoduché vztahy dostaneme jen pro nejjednodušší, avšak častý případ, kdy řídicím signálem je jednotkový skok odchylky. Obraz $W(z)$ v tomto případě bude:

$$W(z) = \frac{z}{z - 1}$$

a polynom $K(z)$ bude prvního stupně

$$K(z) = k_0 z + k_1. \tag{47}$$

Porovnáním absolutních členů na levé a pravé straně rovnice (44) dostaneme vztah

$$\frac{1}{a_n s_0} (l_0 - d_0 m_0) = k_1 \frac{1}{n_n}. \tag{48}$$

Konstantu d_0 určíme pomocí věty o konečné hodnotě z výrazu (45)

$$d_0 = \lim_{z\to\infty} D(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{K(z)\, A(z)\, z^{-n-1}}{V(z)\, N(z)\, z^{-n-1}} =$$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{(k_0 - k_1 z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n})}{(1 - z^{-1})(1 + n_1 z^{-1} + \ldots + n_n z^{-n})} = k_0 . \tag{49}$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (48) a dostaneme první podmínkovou rovnici pro koeficienty k_0 a k_1:

$$k_1 \frac{a_n s_0}{n_n} + k_0 m_0 = l_0 . \tag{50}$$

Konečná hodnota výrazu (45) se musí podle rovnice (8) rovnat

$$d_\infty = \lim_{z\to 1} (z - 1)\, D(z) = \frac{K(1)\, A(1)}{N(1)} = \frac{1}{G(1;\, 0)} \tag{51}$$

a odtud dostaneme úpravou druhou podmínkovou rovnici

$$k_0 + k_1 = \frac{N(1)}{B(1;\, 0)} . \tag{52}$$

Řešením obou podmínkových rovnic (50) a (52) dostaneme vzorce pro výpočet konstant k_0 a k_1:

$$k_1 = \frac{l_0 - [N(1)/B(1;\, 0)]\, m_0}{(a_n s_0/n_n) - m_0} , \tag{53}$$

$$k_0 = \frac{N(1)}{B(1;\, 0)} - k_1 . \tag{54}$$

Poznámka. Odvozených výsledků lze ihned použít i pro případ, kdy má mít minimální hodnotu integrál

$$Y = \int_0^\infty e^2(t)\, \mathrm{d}t ,$$

tedy bez zanedbání odchylek po dobu jedné periody vzorkování na začátku regulačního pochodu. V tomto případě bude se vždy konstanta k_1 rovnat nule. Ostatní rovnice se nezmění.

5. METODIKA NUMERICKÉHO VÝPOČTU

Praktické použití odvozených výsledků ukážeme na konkrétním příkladu. Přenos spojité části regulačního obvodu (tj. tvarovacího členu nultého řádu sériově spojeného s regulovanou soustavou) v Laplaceově transformaci nechť je

$$G(p) = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-pT})(6p + 4{,}5)}{p(p + 2)(p + 1)(p + 0{,}5)} . \tag{55}$$

Diskrétní korekční člen navrhneme pro řídicí signál tvaru jednotkového skoku odchylky.

Obraz posloupnosti výstupních hodnot korekčního členu je dán výrazem (45)

$$D(z) = \frac{K(z)\,A(z)}{V(z)\,N(z)},$$

kde polynomy $A(z)$, $K(z)$, $N(z)$ a $V(z)$ postupně vypočteme.

a) Polynom $A(z)$ je jmenovatel diskrétního přenosu spojité části regulačního obvodu. Jeho tvar je definován rovnicí (1). Diskrétní přenos spojité části obvodu vypočteme podle známých vzorců (např.: [1] str. 218, [2] str. 281, [5] str. 191). Dostaneme

$$G(z,\varepsilon) = \frac{B(z,\varepsilon)}{A(z)} = \frac{z-1}{z}\left[c_{00}\frac{z}{z-1} + \sum_{\nu=1}^{3} c_{\nu 0}\frac{z z_\nu^\varepsilon}{z-z_\nu}\right], \tag{56}$$

kde $z_\nu = \mathrm{e}^{p_\nu T}$ $(\nu = 1, 2, 3)$, p_ν jsou kořeny charakteristické rovnice přenosu regulované soustavy, tedy podle výrazu (55)

$$p_1 = -2\,; \quad p_2 = -1\,; \quad p_3 = -0{,}5\,.$$

Při periodě vzorkování $T = 1$ s bude

$$z_1 = 0{,}1353\,; \quad z_2 = 0{,}3679\,; \quad z_3 = 0{,}6065\,.$$

Koeficienty $c_{\nu 0}$ budou mít tyto hodnoty:

$$c_{00} = 4{,}5\,; \quad c_{10} = 2{,}5\,; \quad c_{20} = -3\,; \quad c_{30} = -4\,.$$

Diskrétní přenos spojité části pro $\varepsilon = 0$ je

$$G(z,0) = \frac{B(z,0)}{A(z)} = \frac{1{,}3086z^2 - 0{,}0925z - 0{,}2483}{z^3 - 1{,}1097z^2 + 0{,}3550z - 0{,}0302}\,. \tag{57}$$

b) Polynom $V(z)$ je jmenovatelem diskrétního obrazu řídicího signálu, tj. v našem případě

$$W(z) = \frac{U(z,\varepsilon)}{V(z)} = \frac{z}{z-1}\,. \tag{58}$$

c) Polynom $N(z)$ sestavíme z kořenů polynomu $\bar{S}(z)$, ležících uvnitř jednotkové kružnice. Polynom $\bar{S}(z)$ je definován rovnicí (30), avšak numerický výpočet podle této rovnice je velmi pracný. Použijeme proto jiného způsobu. V rovnici (29) upravíme s použitím vztahů (38) a (40) výraz

$$\frac{T\int_0^1 B(\varepsilon)\,\bar{B}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon}{A\bar{A}} = T\int_0^1 G(\varepsilon)\,\bar{G}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{a_n s_0 N N_R}{a_n A A_R}\,. \tag{59}$$

Použijeme-li v rovnici (59) obecného vztahu (je dokázán např. v [2] str. 233, nebo v [6] kap. 6):

$$\int_0^1 F(z, \varepsilon)\, F(z^{-1}, \varepsilon)\, d\varepsilon = F_1\bar{F}_2(z, 0) = D\{F_1(p)\, F_2(-p)\}_T\,,$$

dostaneme nový vztah, vhodnější pro numerický výpočet polynomu $\bar{S}(z)$:

$$TG\bar{G}(z, 0) = \frac{s_0\, N(z)\, N_R(z)}{A(z)\, A_R(z)} = \frac{\hat{S}(z)}{A(z)\, A_R(z)}\,. \tag{60}$$

Obraz $TG\bar{G}(z, 0)$ vypočteme podobně jako obraz $G(z, \varepsilon)$:

$$TG(p)\, G(-p) =$$

$$= T\frac{(1 - e^{-pT})(1 - e^{pT})(6p + 4{,}5)(-6p + 4{,}5)}{-p^2(p + 2)(p + 1)(p + 0{,}5)(-p + 2)(-p + 1)(-p + 0{,}5)}\,,$$

$$TG\bar{G}(z, 0) = -\frac{(z - 1)^2}{z}\left[\varrho_0 \frac{zT}{(z - 1)^2} + \sum_{\nu=1}^{3} \varrho_\nu \frac{z}{z - z_\nu} - \sum_{\nu=1}^{3} \varrho_\nu \frac{z}{z - 1/z_\nu}\right]. \tag{61}$$

Koeficienty ϱ_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$) vypočteme podle vzorce ($p_0 = 0$)

$$\varrho_\nu = \frac{B(p)\, B(-p)}{TA(p)\, A(-p)}(p - p_\nu)\Big|_{p=p_\nu} \tag{62}$$

nebo

$$\varrho_\nu = \frac{B(p)\, B(-p)}{TA(p)\, A(-p)}(-p - p_\nu)\Big|_{p=-p_\nu}\,.$$

Hodnoty koeficientů jsou:

$$\varrho_0 = 20{,}25\,; \quad \varrho_1 = -0{,}6875\,; \quad \varrho_2 = 3{,}5\,; \quad \varrho_3 = 16\,.$$

Po dosazení do rovnice (61) vypočteme polynom v čitateli. Dostaneme

$$\hat{S}(z) = 0{,}3354z^6 + 10{,}0427z^5 + 2{,}1884z^4 - 56{,}1484z^3 + + 2{,}1884z^2 + 10{,}0427z + 0{,}3354\,. \tag{63}$$

Pro kontrolu správnosti výpočtu použijeme vlastnosti vyjádřené rovnicí (39): hodnoty koeficientů umístěných symetricky ke středu polynomu jsou stejné.

d) Polynom $N(z)$ vypočteme z kořenů polynomu $\hat{S}(z)$ ležících uvnitř jednotkové kružnice. Platí podle (40)

$$\hat{S}(z) = s_0\, N(z)\, N_R(z) = z^n\, \bar{S}(z)\,.$$

Vyřešíme rovnici $\hat{S}(z) = 0$. Podle definičního vztahu (30) a vztahu (39) má polynom $\hat{S}(z)$ tvar

$$\hat{S}(z) = s_0 z^{2n} + s_1 z^{2n-1} + \ldots + s_1 z + s_0\,. \tag{64}$$

 Porovnáním koeficientů v rovnicích (63) a (64) dostaneme

$$s_0 = 0{,}3354\,. \tag{65}$$

Rovnici $\hat{S}(z) = 0$ vydělíme výrazem $s_0 z^n$ a upravíme do tvaru

$$z^3 + z^{-3} + 29{,}9427(z^2 + z^{-2}) + 6{,}5248(z + z^{-1}) - 167{,}4073 = 0\,.$$

Tuto rovnici zjednodušíme substitucí

$$\begin{aligned} z + z^{-1} &= \omega\,, \\ z^2 + z^{-2} &= \omega^2 - 2\,, \\ z^3 + z^{-3} &= \omega^3 - 3\omega\,. \end{aligned}$$

Obdržíme

$$\omega^3 + 29{,}9427\omega^2 + 3{,}5248\omega - 229{,}2921 = 0\,.$$

Řešením této rovnice některou z numerických metod nalezneme kořeny

$$\omega_1 = -29{,}5611\,; \quad \omega_2 = 2{,}6008\,; \quad \omega_3 = -2{,}9824\,.$$

Z rovnic

$$\omega_\nu = \zeta_\nu + \frac{1}{\zeta_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3) \tag{66}$$

vypočteme kořeny polynomu $N(z)\,N_R(z)$:

$$\zeta_1 = -0{,}0339\,; \quad \zeta_2 = 0{,}4691\,; \quad \zeta_3 = -0{,}3850\,;$$

$$\frac{1}{\zeta_1} = -29{,}5272\,; \quad \frac{1}{\zeta_2} = 2{,}1316\,; \quad \frac{1}{\zeta_3} = -2{,}5974\,.$$

Nyní již snadno vypočteme polynom $N(z)$:

$$\begin{aligned} N(z) &= (z + 0{,}3850)(z + 0{,}0339)(z - 0{,}4691) = \\ &= z^3 - 0{,}0402z^2 - 0{,}1835z - 0{,}0061\,. \end{aligned} \tag{67}$$

e) Podle vztahu (46) má polynom $K(z)$ v našem případě tvar

$$K(z) = k_0 z + k_1$$

a jeho konstanty k_0 a k_1 vypočteme podle vzorců (53) a (54)

$$k_1 = \frac{l_0 - [N(1)/B(1; 0)]\, m_0}{(a_n s_0/n_n) - m_0}\,,$$

$$k_0 = \frac{N(1)}{B(1; 0)} - k_1\,.$$

Konstanty l_0 a m_0 jsou absolutní členy polynomů $\hat{L}(z)$ a $\hat{M}(z)$, definovaných rovnicí (32). Platí

$$(68) \qquad l_0 = \int_0^1 b_0(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon \quad (w_0(\varepsilon) = 1)\,,$$

$$m_0 = \int_0^1 b_0^2(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon\,.$$

Koeficient u nejvyšší mocniny čitatele diskrétního přenosu spojité části regulačního obvodu $b_0(\varepsilon)$ vypočteme z rovnice (56)

$$(69) \qquad b_0(\varepsilon) = c_{00} + c_{10}z_1^{\varepsilon} + c_{20}z_2^{\varepsilon} + c_{30}z_3^{\varepsilon}\,.$$

Po dosazení vztahu (69) do vzorců (68) vypočteme

$$l_0 = 0{,}5364\,; \quad m_0 = 0{,}4533\,.$$

Konstanty $N(1)$ a $B(1; 0)$ jsou dány součtem koeficientů polynomů $N(z)$ a $B(z, 0)$ (plyne z rovnice (51)). Z rovnic (57) a (67) vypočteme

$$\frac{N(1)}{B(1;\,0)} = \frac{0{,}7702}{0{,}9678} = 0{,}7958\,.$$

Zbývající konstanty již známe:

$$s_0 = \quad 0{,}3354\,;$$
$$a_n = -\,0{,}0302 \text{ (porovnáním rovnic (57) a (1))}\,;$$
$$n_n = -\,0{,}0061 \text{ (porovnáním rovnic (67) a (40))}\,.$$

Zjištěné hodnoty konstant dosadíme do vzorců (53) a (54). Vypočteme:

$$k_1 = 0{,}1455\,; \quad k_0 = 0{,}6503\,.$$

Polynom $K(z)$ tedy je

$$K(z) = 0{,}6503z + 0{,}1455\,.$$

f) Podle vzorce (45) vypočteme obraz výstupní posloupnosti hodnot diskrétního korekčního členu:

$$D(z) = \frac{0{,}6503z^4 - 0{,}5761z^3 + 0{,}0693z^2 + 0{,}0321z - 0{,}0044}{z^4 - 1{,}0402z^3 - 0{,}1433z^2 + 0{,}1774z + 0{,}0061} =$$
$$= 0{,}6503 + 0{,}1003z^{-1} + 0{,}2668z^{-2} + 0{,}2087z^{-3} + 0{,}2292z^{-4} + \ldots$$

g) Obraz průběhu regulované veličiny vypočteme podle vztahu

$$(70) \qquad X(z, \varepsilon) = D(z)\,G(z, \varepsilon) = \frac{K(z)\,B(z, \varepsilon)}{V(z)\,N(z)}\,.$$

Po dosazení vypočteme průběh regulované veličiny $x(t)$:

t	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$x(t)$	0,3153	0,8510	1,0766	1,0154	0,9765	1,0032	1,0141	1,0020

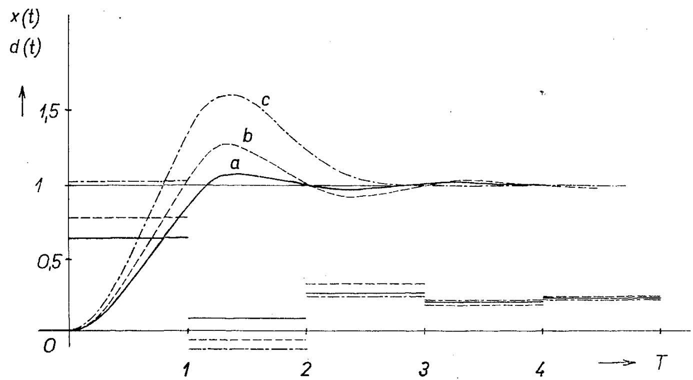
h) Přenos číslicového korekčního členu vypočteme podle vzorce (3). Po dosazení vztahů (1), (28) a (45) a po úpravě obdržíme vztah

$$P(z) = \frac{K(z)\,A(z)}{U(z,0)\,N(z) - K(z)\,B(z,0)}\,. \tag{71}$$

a vypočteme

$$P(z) = \frac{0,6503z^4 - 0,5761z^3 + 0,0693z^2 + 0,0321z - 0,0044}{z^4 - 0,8912z^3 - 0,3137z^2 + 0,1689z + 0,0361}\,.$$

Na obrázku 2 je graficky znázorněn vypočtený průběh regulované veličiny $x(t)$ (křivka a) a pro porovnání také průběh regulované veličiny, je-li korekční člen



Obr. 2.

navržen tak, aby integrál čtverce odchylky v mezích od nuly do nekonečna měl minimální hodnotu (křivka b). Křivka c znázorňuje průběh regulované veličiny, je-li korekční člen navržen podle kritéria minimálního počtu kroků. Pro všechny tyto případy jsou vyneseny i průběhy akční veličiny $d(t)$ na výstupu tvarovacího členu.

(Došlo dne 15. července 1964.)

LITERATURA

[1] Cypkin Ja. Z.: Teorija impulsnych sistem. Fizmatgiz, Moskva 1958.
[2] Cypkin Ja. Z.: Teorija linejnych impulsnych sistem. Fizmatgiz, Moskva 1963.
[3] Jury E. I.: Sampled-Data Control Systems. John Wiley, New York 1958.
[4] Ragazzini J. R., Franklin G. F.: Sampled-Data Control Systems. McGraw-Hill Book Comp., New York 1959.

[5] Tou J. T.: Digital and Sampled-Data Control Systems. McGraw-Hill Book Comp., New York 1959.

[6] Bláha S.: Syntéza diskrétních regulačních obvodů s použitím modifikovaného kritéria minima kvadratické regulační plochy. Dizertační práce, ČSAV-ÚTIA, Praha 1965.

[7] Peterka V.: Combination of finite settling time and minimum integral of squared error in digital control systems. Second International Congress of IFAC, Basel 1963.

SUMMARY

Synthesis of Sampled-Data Control Systems Using Square-Error Integral Criterion

SVATOPLUK BLÁHA, VÁCLAV PETERKA

A design of sampled-data control systems with a continuous linear plant-characteristic is described. The modified square-error integral criterion is used. The large transient overshoot of response to step function on reference input obtained as a rule, if a general square-error integral criterion is used, can be removed by neglecting errors in the first sampling period after beginning of the transient process.

The designed method is based on expressing the modified suqare-error integral by z-transform. This complex integral is minimized by using variational calculus. A requirement on regularity of certain complex function inside the unit circle is a starting point of calculating the optimum form of controller-output.

This method is useful for every type and every finite order linear plant-transfer function. Transfer function of discrete controller depends on the form of the reference input and can be determined for every function provided its z-transform is represented by a rational function. A practical example is calculated.

Inž. Svatopluk Bláha, Inž. Václav Peterka, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.