Kybernetika

Peter Hudzovič

Súčasná kontrola stability a kvality impulznej regulácie

Kybernetika, Vol. 3 (1967), No. 2, (175)--194

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/125051

KYBERNETIKA ČÍSLO 2, ROČNÍK 3/1967

Súčasná kontrola stability a kvality impulznej regulácie

PETER HUDZOVIČ

V článku sa odvodzuje algoritmus výpočtu sumy kvadrátov ekvidištantných diskrétnych hodnôt rozdielu ustálenej a okamžitej hodnoty regulovanej veličiny z funkcie, ktorá je modifikovaným z-obrazom tohoto rozdielu. Súčasne sa prevádza test stability uzavretého regulačného impulzného obvodu podľa algebraického kritéria stability v z-rovine.

1. ÚVOD

Pri návrhu regulačného obvodu sa snažíme popri zaistení stability o to, aby sa účinky prechodných procesov v regulačnom obvode zmenšili na najmenšiu možnú mieru. To znamená, že naším cieľom je, zaistiť touto minimalizáciou, aby sa regulovaná veličina po účinku poruchy dostala na pôvodnú úroveň a pri zmene riadiacej veličiny zase na požadovanú novú hodnotu za najkratší čas a s najmenšími odchýlkami.

Splnenie týchto požiadavkov zaisťujeme vhodnou voľbou konštánt korekčného člena a tým i celkového prenosu uzavretého regulačného impulzného obvodu. Chceme, aby sumárne, resp. integrálne kritéria kvality impulznej regulácie, ktoré sú funkcionálom, zahrňujúcim v sebe dĺžku trvania i veľkost regulačnej odchýlky, zmenšenej o trvalú regulačnú odchýlku, teda rozdiel ustálenej a okamžitej hodnoty regulovanej veličiny, vykazovali minimum. Do akej miery sme sa priblížili k tomuto minimu, prípadne ktorý z prenosov korekčného člena zaisťuje podľa kritéria minima sumy kvadrátov ekvidištantných diskrétnych hodnôt rozdielu ustálenej a okamžitej hodnoty regulovanej veličiny (ďalej len *suma kvadrátov diskrét*) optimálnejší regulačný proces, na to nám dá odpoveď vyčíslenie sumy v jednotlivých prípadoch.

Často treba pri analýze regulačného obvodu, popri určovaní stability, posúdiť kvalitu regulácie, čo znamená, prevádzať dve, pomerne pracné úlohy. Pre spojité systémy sa podarilo prof. Nekolnému [1] využiť Routh-Schurovho testu stability tak, že redukciou charakteristického mnohočlena uzavretého regulačného obvodu sa súčasne pripravujú pomocné výsledky, pre pomerne jednoduché vyčíslenie kvadratickej regulačnej plochy. Jej analógiou v impulzných sústavách je suma kvadrátov diskrét, na určenie ktorej, ako je autorovi známe, bola vypracovaná len jedna metóda, publikovaná v práci [2] a bola prevzatá v knihe [3]. Výpočet sumy kvadrátov diskrét podľa tejto metódy nie je spojený s testom stability. V tomto článku uvedieme takú metódu určenia sumy kvadrátov diskrét, ktorá využíva koeficientov, ktoré vznikajú pri postupnej redukcii charakteristického polynómu, podľa algebraického kritéria stability, platného pre prenosy v z-transformácii, uvedeného v prácach [4], [5] a [6].

Kvadratická regulačná plocha je daná vzťahom

(1) $$P = \int_0^\infty e^2(t)\,dt\,,$$

kde sme označili:

(2) $$e(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(t)\,.$$

Ak napíšeme regulovanú veličinu $x(t)$ vo forme stupňovej, alebo diskrétnej funkcie s posunutým počiatkom, s periódou vzorkovania T, potom:

(3) $$e[n, \varepsilon] = \lim_{n\to\infty} x[n, \varepsilon] - x[n, \varepsilon] \quad (t = (n + \varepsilon)\,T\,; \quad 0 \leqq \varepsilon < 1\,; \quad 0 \leqq n)$$

a vzťah pre kvadratickú regulačnú plochu nadobudne tvar

(4) $$P = T\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} e^2[n, \varepsilon]\,d\varepsilon\,.$$

Za predpokladu, že polomer konvergencie R, prislúchajúci funkcii $e[n, \varepsilon]$, spĺňuje nerovnosť

(5) $$R \leqq 1\,,$$

potom môžeme kvadratickú regulačnú plochu vyjadriť pomocou Parsevalovho integrálu v tvare, platnom pre z-obrazy (viď napr. prácu [3]):

(6) $$P = T\int_0^1 \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma E(z, \varepsilon)\,E(z^{-1}, \varepsilon)\,\frac{dz}{z}\,d\varepsilon\,,$$

pričom $E(z, \varepsilon)$ je diskrétny Laplaceov obraz funkcie $e[n, \varepsilon]$ a Γ je uzavretá integračná dráha, ktorú predstavuje jednotková kružnica.

(7) $$E(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} e[n, \varepsilon]\,z^{-n}\,.$$

Definujme si sumu kvadrátov diskrét, ako funkciu parametra ε, takže:

(8) $$S(\varepsilon) = \sum_{u=0}^{\infty} e^2[n, \varepsilon]\,.$$

Aby suma $S(\varepsilon)$ bola konečná, musí funkcia $e[n, \varepsilon]$ vyhovovať týmto predpokladom:

a) existuje také kladné číslo $M < \infty$, že je splnená nerovnosť

$$|e[n, \varepsilon]| < M \quad (0 \leqq \varepsilon < 1\,; \quad 0 \leqq n)\,; \tag{9}$$

b) nekonečný rad hodnôt $e[n, \varepsilon]$ má limitu, pre ktorú platí

$$\lim_{n \to \infty} e[n, \varepsilon] = 0\,. \tag{10}$$

Pre realizovatelné a stabilné sústavy sú tieto predpoklady splnené. Porovnaním vzťahov (4) a (6), môžeme pre sumu $S(\varepsilon)$ písať:

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} E(z, \varepsilon)\, E(z^{-1}, \varepsilon) \frac{\mathrm{d}z}{z}\,. \tag{11}$$

Ďalej sa zameriame len na diskrétne hodnoty $e[n, 0]$, pre ktoré bude $\varepsilon = 0$. Skrátene ich budeme označovať $e[n]$ a ich obrazy $E(z, 0)$ podobne len $E(z)$. Východzí vzťah pre určenie sumy kvadrátov diskrét S dostaneme z rovnice (11), ak v nej položíme $\varepsilon = 0$.

$$S = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} E(z)\, E\left(\frac{1}{z}\right) \frac{\mathrm{d}z}{z}\,. \tag{12}$$

3. ODVODENIE ALGORITMU PRE VÝPOČET SUMY KVADRÁTOV DISKRÉT

Nech je funkcia $E(z)$ daná v tvare

$$E(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\,. \tag{13}$$

Suma kvadrátov diskrét je indiferentná voči posunu celej funkcie $E(z)$ o k krokov vpravo ($0 \leqq k < \infty$), resp. aj o t krokov vľavo, ak je prvých t hodnôt funkcie $e(n)$ rovných nule.

Doplňme teda stupeň polynómu čitateľa $B(z)$ na hodnotu stupňa polynómu menovateľa $A(z)$, takže

$$A(z) = \sum_{i=0}^{s} a_i z^i\,, \tag{14}$$

$$B(z) = \sum_{i=0}^{s} b_i z^i\,, \tag{15}$$

pričom chýbajúce koeficienty oboch polynómov nahradíme nulami

Rozložme mnohočlen $A(z)$ na súčin koreňových činiteľov:

$$A(z) = a_s \prod_{i=1}^{s} (z - z_i)\,. \tag{16}$$

Za predpokladu, že funkcia $e[n]$ vyhovuje podmienke (5), bude funkcia $E(z)$ na celej z-rovine, s výminkou jednotkového kruhu, regulárna a pre všetky póly funkcie $E(z)$, teda pre všetky korene z_i polynómu $A(z)$ platí, že

$$|z_i| < 1 . \tag{17}$$

Zameňme v rovnici (16) premennú z premennou $1/z$:

$$A\left(\frac{1}{z}\right) = a_s \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{1}{z} - z_i\right). \tag{18}$$

Po jednoduchej úprave dostaneme

$$A\left(\frac{1}{z}\right) = \left[(-1)^s a_s \prod_{i=1}^{s} z_i\right] \frac{1}{z^s} \prod_{i=1}^{s} \left(z - \frac{1}{z_i}\right) \tag{19}$$

a keďže platí rovnica

$$\frac{a_0}{a_s} = (-1)^s \prod_{i=1}^{s} z_i , \tag{20}$$

môžeme polynóm $A(1/z)$ písať v tvare

$$A\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^s} a_0 \prod_{i=1}^{s} \left(z - \frac{1}{z_i}\right). \tag{21}$$

Zaveďme teraz označenie:

$$\tilde{A}(z) = a_0 \prod_{i=1}^{s} \left(z - \frac{1}{z_i}\right). \tag{22}$$

Z výrazov (17) a (22) je zrejmé, že všetky korene polynómu $\tilde{A}(z)$ ležia mimo jednotkového kruhu.

Ak do výrazu (21) dosadíme rovnicu (22), potom

$$A\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^s} \tilde{A}(z) . \tag{23}$$

Obdobne môžeme písať aj pre čitateľa $B(z)$ funkcie $E(z)$:

$$B\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^s} \tilde{B}(z) , \tag{24}$$

kde sme si označili, podobne ako v rovnici (22)

$$\tilde{B}(z) = b_0 \prod_{j=1}^{s} \left(z - \frac{1}{z_j}\right), \tag{25}$$

pričom z_j sú korene mnohočlena $B(z)$.

Pomocou vzťahov (23) a (24) možno vyjadriť funkciu $E(1/z)$, ktorú dostaneme z výrazu (13) po zámene premennej z premennou $1/z$:

(26) $$E\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)}.$$

Parsevalov integrál (12), definujúci veľkosť sumy kvadrátov diskrét S, prejde po dosadení vzťahu (13) za $E(z)$ a rovnice (26) za $E(1/z)$ na tvar

(27) $$S = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{B(z)\, \tilde{B}(z)}{A(z)\, \tilde{A}(z)} \frac{dz}{z}.$$

Ak si označíme celkový prenos riadenia

(28) $$K(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$$

a riadiacu veličinu $W(z)$, potom rovnica (3), prepísaná do z-obrazov bude:

(29) $$E(z) = \frac{z}{z - 1} \lim_{z \to 1} (z - 1)\, K(z)\, W(z) - K(z)\, W(z).$$

Pre prípad, keď riadiacou veličinou je jednotkový skok, môžeme prepísať rovnicu (29) takto:

(30) $$E(z) = \frac{K(1)\, H(z) - G(z)}{H(z)} \cdot \frac{z}{z - 1}.$$

Čitateľ pravej strany výrazy (30) sa vždy dá vyjadriť v tvare

(31) $$[K(1)\, H(z) - G(z)]\, z = B(z)\,(z - 1),$$

čo priamo vyplýva z podmienky (10), ktorá má v z-rovine formu

(32) $$\lim_{z \to 1} (z - 1)\,(E(z) = 0,$$

takže z-obraz rozdielu ustálenej a okamžitej hodnoty regulovanej veličiny pri $\varepsilon = 0$, je

(33) $$E(z) = \frac{B(z)}{H(z)}.$$

Ak porovnáme dva tvary (13) a (33), ktoré definujú funkciu $E(z)$, zistíme, že polynóm $A(z)$ je charakteristickým mnohočlenom uzavretého regulačného obvodu, ktorý sme vo vzťahu (28) označili $H(z)$.

 Stabilitu impulzného regulačného obvodu, charakterizovaného prenosom riadenia

$$K(z) = \frac{G(z)}{A(z)} \tag{34}$$

budeme posudzovať podľa algebraického kritéria stability, ktoré hovorí:

Prenos $K(z)$ je vtedy a len vtedy stabilný a teda polynóm s-tého stupňa $A(z)$ má nuly vovnútri jednotkovej kružnice vtedy a len vtedy, keď $|a_0| < |a_s|$, alebo inak napísané, keď

$$a_s^2 - a_0^2 > 0 \tag{35}$$

a tú istú vlastnosť má aj polynóm $(s - 1)$-ho stupňa:

$$^1A(z) = \frac{a_s\, A(z) - a_0\, \tilde{A}(z)}{z}, \tag{36}$$

$$^1A(z) = \sum_{i=0}^{s-1} {}^1a_i z^i\,. \tag{37}$$

Index „1" vľavo hore v označení polynómu $^1A(z)$ vyjadruje, že sa jedná o jedenkrát redukovaný pôvodný polynóm $A(z)$ a rovnaký index majú podobne aj koeficienty ^1a_i polynómu $^1A(z)$ v rovnici (37). Podobne teda budeme označovať $^kA(z)$ polynóm, ktorý dostaneme po k-násobnej redukcii polynómu $A(z)$ a jeho koeficienty budú ^ka_i. Pôvodný polynóm $A(z)$ a jeho koeficienty a_i budeme v zhode s týmto označením, aby neprišlo k omylu, niekedy písať aj $^0A(z)$ resp. ^0a_i, hlavne ak pôjde o rekurentné vzorce.

Porovnaním koeficientov u najvyšších mocnín premennej z vo výrazoch (36) a (37) dostaneme

$$a_s^2 - a_0^2 = {}^1a_{s-1}\,. \tag{38}$$

Podmienka (35) bude mať teraz tvar

$$^1a_{s-1} > 0\,. \tag{39}$$

Obecne teda možno povedať, že polynóm $A(z)$ budeme postupne s-krát redukovať podľa rekurentného vzorca

$$^{i+1}A(z) = \frac{^ia_{s-i}\, {}^iA(z) - {}^ia_0\, {}^i\tilde{A}(z)}{z} \tag{40}$$

a ak pre koeficienty u najvyšších mocnín jednotlivých redukovaných polynómov bude platiť

$$^ia_{s-i} > 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, s\,, \tag{41}$$

potom všetky korene mnohočlena $A(z)$ ležia vovnútri jednotkovej kružnice.

Paralelne s testom stability, ktorý spočíva v postupnej redukcii polynómu menovateľa funkcie $E(z)$, budeme si pripravovať pomocné hodnoty pre určenie sumy kvadrátov diskrét tým, že budeme redukovať aj polynóm čitateľa funkcie $E(z)$.

Z rovnice (36) vyplýva, že polynóm $z\,{}^1A(z)$ vznikol lineárnou kombináciou polynómov $A(z)$ a $\tilde{A}(z)$ podľa vzťahu

$$z\,{}^1A(z) = a_s\,A(z) - a_0\,\tilde{A}(z)\,, \tag{42}$$

potom analogicky môžeme lineárnou kombináciou polynómov $B(z)$ a $\tilde{A}(z)$ vytvoriť mnohočlen

$$z\,{}^1B(z) = m[a_s\,B(z) - b_0\,\tilde{A}(z)]\,, \tag{43}$$

pričom hodnotu konštanty m určíme dodatočne v priebehu výpočtu.

Po zámene premennej z premennou $1/z$ a malých úpravách prejde výraz (43) na tvar

$${}^1\tilde{B}(z) = m[a_s\,\tilde{B}(z) - b_0\,A(z)]\,. \tag{44}$$

Zo vzťahu (43) môžeme vyjadriť polynóm $B(z)$ a podobne si vyjadríme mnohočlen $\tilde{B}(z)$ zo vzťahu (44):

$$B(z) = \frac{1}{a_s}\left[\frac{z}{m}\,{}^1B(z) + b_0\,\tilde{A}(z)\right], \tag{45}$$

$$\tilde{B}(z) = \frac{1}{a_s}\left[\frac{1}{m}\,{}^1\tilde{B}(z) + b_0\,A(z)\right]. \tag{46}$$

Pre úpravu výrazu (27), z ktorého pri určovaní sumy kvadrátov diskrét vychádzame, potrebujeme poznať súčin

$$B(z)\,\tilde{B}(z) = \frac{1}{a_s^2}\left[\frac{b_0}{m}\,z\,{}^1B(z)\,A(z) + \frac{b_0}{m}\,{}^1\tilde{B}(z)\,\tilde{A}(z) + b_0^2\,A(z)\,\tilde{A}(z) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m^2}\,z\,{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)\right]. \tag{47}$$

Ak v tejto forme vyjadrený súčin polynómov $B(z)$ a $\tilde{B}(z)$ dosadíme do čitateľa integrandu východzieho integrálu:

$$S = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{B(z)\,\tilde{B}(z)}{A(z)\,\tilde{A}(z)}\,\frac{dz}{z}\,, \tag{27}$$

 rozpadne sa tento na štyri zložky:

$$S = \frac{1}{m}\frac{b_0}{a_s^2}\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1B(z)}{\tilde{A}(z)}\,dz + \frac{1}{m}\frac{b_0}{a_s^2}\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1\tilde{B}(z)}{A(z)}\frac{dz}{z} + \tag{48}$$
$$+ \frac{b_0^2}{a_s^2}\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{dz}{z} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{a_s^2}\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1B(z)\,^1\tilde{B}(z)}{A(z)\,\tilde{A}(z)}\,dz\,.$$

Hodnota prvého integrálu je podľa Cauchyho vety o sume rezíduí rovná nule, pretože vovnútri jednotkovej kružnice nemá integrand ani jeden pól:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1B(z)}{\tilde{A}(z)}\,dz = 0\,. \tag{49}$$

Druhý integrál z výrazu (48) môžeme po zámene premennej z za $1/w$ upraviť tak, že dostaneme

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1\tilde{B}(z)}{A(z)}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1B(w)}{\tilde{A}(w)}\,dw\,. \tag{50}$$

Tento tvar sa zhoduje s tvarom prvého integrálu, ktorý je ale rovný nule, a preto bude aj

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1\tilde{B}(z)}{A(z)}\frac{dz}{z} = 0\,. \tag{51}$$

Pre tretí integrál môžeme hneď písať

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = 1\,. \tag{52}$$

Posledný integrál vo výraze (48) sa dá upraviť, ako vidno z výsledku v dodatku k tomuto článku, na tvar

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1B(z)\,^1\tilde{B}(z)}{A(z)\,\tilde{A}(z)}\,dz = (a_s^2 - a_0^2)\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1B(z)\,^1\tilde{B}(z)}{^1A(z)\,^1\tilde{A}(z)}\frac{dz}{z}\,. \tag{53}$$

Dosaďme za jednotlivé integrály, ako sme ich tu upravené uviedli v rovniciach (49), (51), (52) a (53), do výrazu (48):

$$S = \frac{b_0^2}{a_s^2} + \frac{1}{m^2}\frac{a_s^2 - a_0^2}{a_s^2}\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{^1B(z)\,^1\tilde{B}(z)}{^1A(z)\,^1\tilde{A}(z)}\frac{dz}{z}\,. \tag{54}$$

Konštantu m sme do výpočtu zaviedli preto, aby sme explicitne mohli vyjadriť veľkosť prírastku sumy kvadrátov diskrét ΔS po jednom redukčnom cykle (jednej redukcii čitateľa $B(z)$ i menovateľa $A(z)$).

Poznámka. Prírastkom celkovej sumy kvadrátov diskrét po jednom redukčnom cykle rozumieme výraz

$$\Delta S_i = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^iB(z)\,{}^i\tilde{B}(z)}{{}^iA(z)\,{}^i\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^{i+1}B(z)\,{}^{i+1}\tilde{B}(z)}{{}^{i+1}A(z)\,{}^{i+1}\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z},$$

ktorý možno jednoducho vyjadriť pomocou koeficientov polynómov ${}^iB(z)$ a ${}^iA(z)$, ako vidno z rovníc (57) až (60).

Hodnota konštanty, ktorá nám to umožní, je určená takto:

$$m = \frac{\sqrt{(a_s^2 - a_0^2)}}{a_s}, \tag{55}$$

lebo vtedy prejde výraz (54) na tvar

$$S = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{{}^1A(z)\,{}^1\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} + \frac{b_0^2}{a_s^2}. \tag{56}$$

Použitím rovnice (27) upravíme výraz (56) tak, aby bolo možné vyjadriť príspevky ΔS_i v každom redukčnom cykle takto:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^0B(z)\,{}^0\tilde{B}(z)}{{}^0A(z)\,{}^0\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{{}^1A(z)\,{}^1\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} = \frac{{}^0b_0^2}{{}^0a_s^2}. \tag{57}$$

Nulovým indexom sme označili neredukované polynómy a ich koeficienty. Pre ďalšie redukčné cykly bude:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{{}^1A(z)\,{}^1\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^2B(z)\,{}^2\tilde{B}(z)}{{}^2A(z)\,{}^2\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} = \frac{{}^1b_0^2}{{}^1a_{s-1}^2}, \tag{58}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^2B(z)\,{}^2\tilde{B}(z)}{{}^2A(z)\,{}^2\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^3B(z)\,{}^3\tilde{B}(z)}{{}^3A(z)\,{}^3\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} = \frac{{}^2b_0^2}{{}^2a_{s-2}^2},\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^iB(z)\,{}^i\tilde{B}(z)}{{}^iA(z)\,{}^i\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^{i+1}B(z)\,{}^{i+1}\tilde{B}(z)}{{}^{i+1}A(z)\,{}^{i+1}\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} = \frac{{}^ib_0^2}{{}^ia_{s-i}^2},\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^{s-1}B(z)\,{}^{s-1}\tilde{B}(z)}{{}^{s-1}A(z)\,{}^{s-1}\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^sB(t)\,{}^s\tilde{B}(z)}{{}^sA(z)\,{}^s\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} = \frac{{}^{s-1}b_0^2}{{}^{s-1}a_1^2}.
\end{aligned}\right. \tag{59}$$

Posledný redukčný cyklus bude vyzerať takto:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{{}^sB(z)\,{}^s\tilde{B}(z)}{{}^sA(z)\,{}^s\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} - 0 = \frac{{}^sb_0^2}{{}^sa_0^2} \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{dz}{z} = \frac{{}^sb_0^2}{{}^sa_0^2}, \tag{60}$$

lebo mnohočleny $A(z)$ a $B(z)$ sú s-tého stupňa a teda po s redukčných cykloch z nich zostanú len absolútne členy a teda polynómy ${}^sA(z)$ a ${}^s\tilde{A}(z)$, resp. polynómy ${}^sB(z)$ a ${}^s\tilde{B}(z)$ sú zhodné. Po $s + 1$ redukčných krokoch všetky tieto mnohočleny budú nulové.

Sčítaním všetkých rovníc (57) až (60) dostaneme:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{{}^0B(z)\,{}^0\tilde{B}(z)}{{}^0A(z)\,{}^0\tilde{A}(z)}\frac{dz}{z} = \tag{61}$$

$$= \frac{{}^0b_0^2}{{}^0a_s^2} + \frac{{}^1b_0^2}{{}^1a_{s-1}^2} + \frac{{}^2b_0^2}{{}^2a_{s-2}^2} + \ldots + \frac{{}^ib_0^2}{{}^ia_{s-i}^2} + \ldots + \frac{{}^{s-1}b_0^2}{{}^{s-1}a_1^2} + \frac{{}^sb_0^2}{{}^sa_0^2}\,.$$

Integrál na ľavej strane rovnice (61) predstavuje celkovú sumu kvadrátov diskrét S, takže výsledný vzťah je

$$S = \sum_{i=0}^{s}\frac{{}^ib_0^2}{{}^ia_{s-i}^2}\,. \tag{62}$$

Poznámka. Podobným postupom, akým sme dostali vzťah (62) možno po vynásobení rovnice (54) výrazom a_s^2 a položením

$$m = \frac{1}{\sqrt{[a_s^2 - a_0^2]}}$$

odvodiť jednoduchší vzťah pre určenie sumy kvadrátov diskrét:

$$S = \frac{1}{a_s^2}\sum_{i=0}^{s}{}^ib_0^2\,.$$

4. METODIKA VÝPOČTU SUMY KVADRÁTOV DISKRÉT

Zopakujme si metodiku pri vyčíslovaní sumy kvadrátov diskrét, ak vychádzame z funkcie $E(z)$, ktorá je diskrétnym Laplaceovým obrazom funkcie $e[n]$, pre ktorú určujeme veľkosť sumy S.

a) Doplníme stupeň čitateľa $B(z)$ na hodnotu, akú má menovateľ $A(z)$ a chýbajúce koeficienty nahradíme nulami.

b) Ak je s stupeň polynómu $A(z)$, potom podľa rovnice

$${}^{i+1}A(z) = \frac{{}^ia_{s-1}\,{}^iA(z) - {}^ia_0\,{}^i\tilde{A}(z)}{z} \tag{63}$$

s-krát redukujeme menovateľa $A(z)$ funkcie $E(z)$.

c) V každom redukčnom kroku určíme hodnotu konštanty

$$ {}^{i}m = \frac{\sqrt{({}^{i}a_{s-i} - {}^{i}a_0)}}{{}^{i}a_{s-i}} . \tag{64} $$

d) Polynóm čitateľa $B(z)$ funkcie $E(z)$ redukujeme podľa vzťahu

$$ {}^{i+1}B(z) = {}^{i}m \frac{{}^{i}a_{s-i}\, {}^{i}B(z) - {}^{i}b_0\, {}^{i}\tilde{A}(z)}{z} , \tag{65} $$

pričom počet redukčných cyklov je opäť s.

e) Pre každý redukčný krok vyčíslime hodnotu:

$$ \Delta S_i = \frac{{}^{i}b_0^2}{{}^{i}a_{s-i}^2} . \tag{66} $$

f) Výsledná hodnota sumy S je súčtom všetkých príspevkov ΔS_i:

$$ S = \sum_{i=0}^{s} \Delta S_i . \tag{67} $$

Pre redukciu polynómu $B(z)$ môžeme okrem varianty prvej, ktorú sme práve dokončili, použiť aj niektorú z ďalších troch variant. Druhá a tretia je redukcia zľava a posledná, podobne ako prvá, je redukciou sprava. Rozbor týchto variant je v literatúre [7].

Podľa druhej varianty redukcie čitateľa $B(z)$ by sme odvodili, že ak s-krát redukujeme polynóm $B(z)$ podľa rovnice

$$ {}^{i+1}B(z) = \frac{\sqrt{({}^{i}a_{s-i}^2 - {}^{i}a_0^2)}}{{}^{i}a_{s-i}} \left[{}^{i}a_{s-i}\, {}^{i}B(z) - {}^{i}b_{s-i}\, {}^{i}A(z)\right] , \tag{68} $$

potom celková suma S je daná súčtom príspevkov ΔS_i, ktoré majú tvar

$$ \Delta S_i = \frac{{}^{i}b_{s-i}^2}{{}^{i}a_{s-i}^2} . \tag{69} $$

Podobne pri tretej variante bude redukčná rovnica

$$ {}^{i+1}B(z) = \frac{\sqrt{({}^{i}a_{s-i}^2 - {}^{i}a_0^2)}}{{}^{i}a_0} \left[{}^{i}a_0\, {}^{i}B(z) - {}^{i}b_{s-i}\, {}^{i}\tilde{A}(z)\right] \tag{70} $$

a príspevok k celkovej sume kvadrátov diskrét S je

$$ \Delta S_i = 2 \frac{{}^{i}b_0\, {}^{i}b_{s-i}}{{}^{i}a_0\, {}^{i}a_{s-i}} - \frac{{}^{i}b_{s-i}^2}{{}^{i}a_0^2} . \tag{71} $$

Pre poslednú, štvrtú variantu redukcie polynómu $B(z)$ platí

$$ {}^{i+1}B(z) = \frac{\sqrt{({}^ia_{s-i}^2 - {}^ia_0^2)}}{{}^ia_0} \cdot \frac{{}^ia_0\, {}^iB(z) - {}^ib_0\, {}^iA(z)}{z} \,. \tag{72} $$

Suma kvadrátov diskrét je daná súčtom takto definovaných príspevkov ΔS_i:

$$ \Delta S_i = 2 \frac{{}^ib_0\, {}^ib_{s-i}}{{}^ia_0\, {}^ia_{s-i}} - \frac{{}^ib_0^2}{{}^ia_0^2} \,. \tag{73} $$

Pracnosť, spojená s redukciou oboch polynómov je pre všetky varianty rovnaká. Jednotlivé varianty sa však navzájom odlišujú spracovaním produktov redukcií. Nakoľko rovnice (6) a (69) sú jednoduchšie, ako vzťahy (71) a (73), je aj vyčíslenie sumy kvadrátov diskrét podľa prvých dvoch variant pohodlnejšie a preto im dávame prednosť pred treťou a štvrtou variantou, ktoré sa okrem toho nehodia pre prípad, keď má funkcia $E(z)$ v počiatku pól k-tého rádu. Pri porovnaní prvých dvoch variant vidíme, že veľmi často chýba polynómu $B(z)$ niekoľko členov u najnižších mocnín z, hlavne absolútny člen, čím podľa prvej varianty bude ΔS_0 rovné nule a to hovorí v jej prospech. Inak sa metodika výpočtu podľa zbývajúcich variant nemení.

5. SUMA KVADRÁTOV DISKRÉT VYJADRENÁ FORMOU DETERMINANTU

Predpokladajme teraz, že funkcia $E(z)$ je upravená tak, aby koeficient ${}^0a_s$ u najvyššej mocniny polynómu menovateľa $A(z)$, ktorý je s-tého stupňa, bol rovný jednej.

Do výrazu (62) dosaďme za koeficienty ${}^jb_i$ tvary, vytvorené z koeficientov ${}^0b_i$ polynómu $B(z)$ a koeficientov ${}^ja_i$, ktoré dostaneme redukciou polynómu $A(z)$, pri teste stability.

Ak sú mnohočleny čitateľa i menovateľa funkcie $E(z)$ prvého stupňa, potom suma kvadrátov diskrét bude daná nasledovne:

$$ S = \frac{1}{{}^1a_0} \left[b_1^2 + b_0^2 - 2\, {}^0a_0 b_1 b_0 \right] . \tag{74} $$

V tvare determinantu možno vzťah (74) napísať takto:

$$ S = \frac{1}{{}^1a_0} \begin{vmatrix} 1 & {}^0a_0 \\ 2b_1b_0 & b_1^2 + b_0^2 \end{vmatrix} . \tag{75} $$

Ak budú $B(z)$ a $A(z)$ polynómy druhého stupňa, potom:

$$ S = \frac{1}{{}^2a_0} \left[{}^1a_1(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2) - 2\, {}^1a_0(b_0b_1 + b_1b_2) + \right. $$
$$ \left. + 2({}^0a_1\, {}^1a_0 - {}^1a_1\, {}^0a_0)\, b_0b_2 \right] . \tag{76} $$

Opäť možno použiť pre zápis sumy kvadrátov diskrét formy pomocou determinantu, takže

$$S = \frac{1}{{}^{2}a_0} \begin{vmatrix} 1 & {}^{0}a_1 & {}^{0}a_0 \\ 0 & {}^{1}a_1 & {}^{1}a_0 \\ 2b_0b_2 & 2(b_0b_1 + b_1b_2) & b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix} . \tag{77}$$

Postupným zvyšovaním stupňa oboch polynómov, rozpis redukcie ktorých sa stáva stále menej prehľadný a preto ho ďalej neuvádzame a súčasným odvodením tvaru pre sumu kvadrátov diskrét pomocou determinantu, prídeme k tomu, že ak si označíme:

$$d_j = \sum_{\mu=0}^{j} b_\mu b_{\mu+s-j} , \tag{78}$$

potom z polynómov $B(z)$ a $A(z)$, ktoré sú s-tého stupňa, pričom ${}^{0}a_s$ je rovné jednej, môžeme určiť pomocou rovnice (78) hodnoty konštánt d_j a redukciou polynómu $A(z)$ pri posudzovaní stability podľa algebraického kritéria zase hodnoty koeficientov ${}^{j}a_i$, takže sumu kvadrátov diskrét dostaneme pomocou takto určených hodnôt z determinantu:

$$S = \frac{1}{{}^{s}a_0} \begin{vmatrix} 1 & {}^{0}a_{s-1} & \dots & {}^{0}a_{s-i} & \dots & {}^{0}a_1 & {}^{0}a_0 \\ 0 & {}^{1}a_{s-1} & \dots & {}^{1}a_{s-i} & \dots & {}^{1}a_1 & {}^{1}a_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {}^{i}a_{s-i} & \dots & {}^{i}a_1 & {}_{i}a_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & {}^{s-1}a_1 & {}^{s-1}a_0 \\ 2d_0 & 2d_1 & \dots & 2d_i & \dots & 2d_{s-1} & d_s \end{vmatrix} . \tag{79}$$

Ak teda budeme poznať funkciu $E(z, \varepsilon)$, môžeme vzťah (79) využiť aj na výpočet kvadratickej regulačnej plochy P:

Majme teda danú funkciu

$$E(z, \varepsilon) = \frac{\sum_{i=0}^{s} b_{i\varepsilon} z^i}{\sum_{i=0}^{s} a_i z^i} , \tag{80}$$

pričom pre jednoduchosť píšeme namiesto $b_i(\varepsilon)$ len $b_{i\varepsilon}$.

Ak si teraz označíme

$$\partial_j = T \int_0^1 \sum_{\mu=0}^{j} b_{\mu\varepsilon} b_{(\mu+s-j)\varepsilon} \, d\varepsilon , \tag{81}$$

môžeme na základe vzťahu, ktorý dostaneme spojením rovníc (4) a (8) písať

$$P = T \int_0^1 S(\varepsilon) \, d\varepsilon \tag{82}$$

a teda náhradou koeficientov d_j hodnotami konštánt ∂_j v poslednom riadku determinantu (79) určíme veľkosť kvadratickej regulačnej plochy zo znalosti koeficientov ${}^i a_j$, ktoré vzniknú pri uplatnení algebraického kritéria stability v z-rovine.

6. PRÍKLAD

Na ilustráciu výsledkov, ktoré sme v tomto článku odvodili, vypočítajme veľkost sumy kvadrátov diskrét pre prípad, keď spojitá sústava s prenosom

$$S(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)},$$

na vstupe ktorej je tvarovací člen nultého rádu, je regulovaná pomocou počítača

$$R(z, 0) = \frac{z^2 - 1{,}13533528z + 0{,}13533528}{z^2 - 0{,}44687067z - 0{,}29972965}$$

s krokovým pohonom, ktorého prenos je

$$P(z, 0) = \frac{1}{z - 1}.$$

Ak je riadiacim signálom jednotkový skok, môžeme podľa rovnice (30), pre funkciu $E(z)$ písať:

$$E(z) = 0{,}77335850 \,.\, \frac{z^2 - 0{,}18262941z}{z^2 - 1{,}18262941z + 0{,}69930616}.$$

Redukujme podľa rovníc (63) a (65) polynómy čitateľa a menovateľa funkcie $E(z)$, pričom z koeficientov čitateľa vytkneme konštantu $[0{,}7733585]^2 = 0{,}59808337$:

${}^0A(z)$	1,00000000	−1,18262941	0,69930616	
${}^0a_2\,{}^0A(z)$	1,00000000	−1,18262941	0,69930616	${}^0m = \sqrt{(0{,}51097089)/1}$
$-{}^0a_0\,{}^0\tilde{A}(z)$	−0,48902911	0,82702002	−0,69930616	
$z\,{}^1A(z)$	0,51097089	−0,35560938	0	${}^0m = 0{,}71482223$
${}^1A(z)$		0,51097089	−0,35560938	
${}^1a_1\,{}^1A(z)$		0,26109125	−0,18170604	${}^1m = \sqrt{(0{,}13464042)/0{,}51097089}$
$-{}^1a_0\,{}^1\tilde{A}(z)$		−0,12645083	0,18170604	
$z\,{}^2A(z)$		0,13464042	0	${}^1m = 0{,}71811090$
${}^2A(z)$			0,13464042	

Konštanty m použijeme k redukcii polynómu $B(z)$. Redukciou polynómu $A(z)$ súčasne zistíme, že sa jedná o stabilný regulačný obvod.

${}^{0}B(z)$	1	$-0{,}18262920$	0
${}^{0}a_2\ {}^{0}B(z)$	1	$-0{,}18262920$	0
${}^{0}b_0\ {}^{0}\tilde{A}(z)$	0	0	0
$1/{}^{0}m\ z\ {}^{1}B(z)$	1	$-0{,}18262920$	0
${}^{1}B(z)$		0,71482223	$-0{,}13054741$
${}^{1}a_1\ {}^{1}B(z)$		0,36525335	$-0{,}06670593$
$-{}^{1}b_0\ {}^{1}\tilde{A}(z)$		$-0{,}04642388$	0,06670593
$1/{}^{1}m\ z\ {}^{2}B(z)$		0,31882947	0
${}^{2}B(z)$			0,22895492

Koeficientov u najvyššej mocniny premennej z v postupne redukovanom charakteristickom polynóme $A(z)$, kladná hodnota ktorých nám potvrdzuje stabilitu regulačného obvodu, spolu s absolútnymi členmi v postupne redukovanom polynóme $B(z)$ použijeme na určenie sumy kvadrátov diskrét podľa prvej varianty redukcie polynómu čitateľa funkcie $E(z)$.

$$S = 0{,}59808337 \left[\left(\frac{0{,}13054741}{0{,}51097089}\right)^2 + \left(\frac{0{,}22895492}{0{,}13464042}\right)^2\right],$$

$$\underline{\underline{S = 1{,}76858501.}}$$

Podľa vzťahu (78) vypočítame:

$$d_0 = 0$$
$$d_1 = -0{,}18262920$$
$$d_2 = 1{,}03335340$$

a spolu s hodnotami koeficientov postupne redukovaného charakteristického mnohočlena uzavretého regulačného obvodu ich dosadíme do výrazu (79), ktorý má pre polynómy druhého stupňa tvar, uvedený v (77).

$$S = \frac{0{,}59808337}{0{,}13464042} \begin{vmatrix} 1 & -1{,}18262941 & 0{,}69930616 \\ 0 & 0{,}51097089 & -0{,}35560938 \\ 0 & -0{,}36525840 & 1{,}03335340 \end{vmatrix},$$

$$\underline{\underline{S = 1{,}76850376\,.}}$$

Výsledky, získané obidvoma spôsobmi sa veľmi dobre zhodujú s hodnotou, vypočítanou vyčíslením rezíduí integrandu vo výraze (12).

7. ZÁVER

Prínosom metódy, v článku popísanej, pre analýzu impulzných sústav je zníženie pracnosti pri určovaní stability a výpočte sumy kvadrátov diskrét, čo je vidieť najmä pri porovnaní druhého spôsobu určenia sumy (pomocou determinantu) s metódou, publikovanou v [2] a [3].

Pomerne jednoduchý algoritmus pre stanovenie hodnoty sumy podľa prvého spôsobu (pomocou redukcie čitateľa), možno dá tejto metóde príležitosť aj pri strojovej syntéze.

DODATOK

Dokážeme platnosť rovnice (53) tým, že budeme upravovať integrál

$$J = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{A(z)\,\tilde{A}(z)}\,dz\,. \tag{D-1}$$

Hodnotu integrálu (D-1) môžeme vyjadriť súčtom rezíduí integrandu v póloch, ktoré obopína integračná dráha Γ. Budú to podľa rovnice (17) všetky korene z_{0i} mnohočlena $A(z)$. Ak polynóm s-tého stupňa $A(z)$ má obecne k koreňov z_{0i} násobnosti p_i, bude platiť

$$A(z_{0i}) = 0 \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots, k\,, \tag{D-2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = s\,, \tag{D-3}$$

takže použitím vzorca pre vyčíslenie rezídua v p_i-násobnom póle z_{0i} možno výraz

$$J = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}\left[\frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{A(z)\,\tilde{A}(z)}\right]_{z=z_{0i}} \tag{D-4}$$

vyjadriť v nasledovnej forme:

$$J = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(p_i - 1)!}\left[\frac{d^{p_i-1}}{dz^{p_i-1}}\left\{(z - z_{0i})^{p_i}\frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{A(z)\,\tilde{A}(z)}\right\}\right]_{z=z_{0i}}\,. \tag{D-5}$$

V rovnici (36), podľa ktorej redukujeme polynóm menovateľa $A(z)$

$${}^1A(z) = \frac{a_s\,(Az) - a_0\,\tilde{A}(z)}{z}\,, \tag{D-6}$$

nahradíme premennú z premennou $1/z$, takže po úprave dostaneme

$${}^1\tilde{A}(z) = a_s\,\tilde{A}(z) - a_0\,A(z)\,. \tag{D-7}$$

Z výrazov (D-6) a (D-7) si môžeme vyjadriť polynómy $A(z)$ a $\tilde{A}(z)$

$$A(z) = \frac{1}{a_2^s - a_0^2}\left[a_s z\,{}^1A(z) + a_0\,{}^1\tilde{A}(z)\right], \tag{D-8}$$

$$\tilde{A}(z) = \frac{1}{a_s^2 - a_0^2}\left[a_0 z\,{}^1A(z) + a_s\,{}^1\tilde{A}(z)\right]. \tag{D-9}$$

Dosaďme do vzťahu (D-5) tvar polynómu $\tilde{A}(z)$ z rovnice (D-7)

(D-10) $$\tilde{A}(z) = \frac{1}{a_s}\left[{}^1\tilde{A}(z) + a_0 A(z)\right]$$

a výraz pre J nadobudne tvar

(D-11) $$J = a_s \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(p_i - 1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{p_i - 1}}{\mathrm{d}z^{p_i - 1}}\left\{\frac{(z - z_{0i})^{p_i}}{A(z)}\,{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)\,\frac{1}{{}^1\tilde{A}(z) + a_0 A(z)}\right\}\right]_{z = z_{0i}}.$$

Je zrejmé, že keď je splnená rovnica (D-2), platí pre číslo $0 \leqq \nu \leqq p_i - 1$, že

(D-12) $$\left[\frac{\mathrm{d}^{\nu}}{\mathrm{d}z^{\nu}}\,\frac{1}{{}^1\tilde{A}(z) + a_0 A(z)}\right]_{z = z_{0i}} = \left[\frac{\mathrm{d}^{\nu}}{\mathrm{d}z^{\nu}}\,\frac{1}{{}^1\tilde{A}(z)}\right]_{z = z_{0i}}.$$

Na úpravu výrazu (D-11) použijeme Leibnizovho vzorca pre deriváciu súčinu funkcií $(z - z_{0i})^{p_i}/A(z)\,.\,{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)$ a $1/[{}^1\tilde{A}(z) + a_0\,A(z)]$ a dostaneme:

(D-13) $$J = a_s \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(p_i - 1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{p_i - 1}}{\mathrm{d}z^{p_i - 1}}\left\{(z - z_{0i})^{p_i}\,\frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{A(z)\,{}^1\tilde{A}(z)}\right\}\right]_{z = z_{0i}}.$$

Výraz (D-13) je vlastne súčtom rezíduí vyjadrená hodnota integrálu

(D-14) $$J = a_s \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} \frac{{}^1B(z)\,{}^1\tilde{B}(z)}{A(z)\,{}^1\tilde{A}(z)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Upravíme tento integrál tak, že použijeme substitúciu $z = 1/w$:

(D-15) $$J = a_s \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} \frac{{}^1B(w)\,{}^1\tilde{B}(w)}{w\,{}^1A(w)\,\tilde{A}(w)}\,\mathrm{d}w\,.$$

Pre jednoduchšie odvodzovanie ďalších vzťahov si zavedieme označenie:

(D-16) $$C(w) = w\,{}^1A(w)\,.$$

Obecne môže mať polynóm s-tého stupňa $C(w)$ t koreňov w_{0j} násobnosti r_j, takže

(D-17) $$C(w_{0j}) = 0 \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, t\,,$$

(D-18) $$\sum_{j=1}^{t} r_j = s\,.$$

Ak použijeme vzťah (D-16) na vyjadrenie polynómu $\tilde{A}(w)$ z rovnice (D-9), potom

$$\tilde{A}(w) = \frac{a_s}{a_s^2 - a_0^2}\left[{}^1\tilde{A}(w) + \frac{a_0}{a_s} C(w)\right] \tag{D-19}$$

a podarí sa nám integrál (D-15), ktorý napíšeme vo forme

$$J = a_s \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \frac{{}^1B(w)\, {}^1\tilde{B}(w)}{C(w)\, \tilde{A}(w)} \mathrm{d}w\,, \tag{D-20}$$

vyjadriť súčtom rezíduí vo viacnásobných póloch integrandu w_{0j}:

$$J = a_s \sum_{j=1}^{t} \operatorname{res}\left[\frac{{}^1B(w)\, {}^1\tilde{B}(w)}{C(w)\, \tilde{A}(w)}\right]_{w=w_{0j}}, \tag{D-21}$$

$$J = a_s \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{(r_j - 1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r_j-1}}{\mathrm{d}w^{r_j-1}}\left\{\frac{(w - w_{0j})^{r_j}}{C(w)}\, {}^1B(w)\, {}^1\tilde{B}(w) \frac{1}{\tilde{A}(w)}\right\}\right]_{w=w_{0j}}. \tag{D-22}$$

Pomocou rovnice (D-9) upravíme výraz (D-22) na tvar:

$$J = (a_s^2 - a_0^2) \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{(r_j - 1)!} \,. \tag{D-23}$$

$$. \left[\frac{\mathrm{d}^{r_j-1}}{\mathrm{d}w^{r_j-1}}\left\{\frac{(w - w_{0j})^{r_j}}{C(w)}\, {}^1B(w)\, {}^1\tilde{B}(w) \frac{1}{{}^1\tilde{A}(w) + a_0/a_s C(w)}\right\}\right]_{w=w_{0j}}.$$

Ak máme na zreteli vzťah (D-17), môžeme, podobne, ako v rovnici (D-12), písať pre $0 \leqq \mu \leqq r_j - 1$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^\mu}{\mathrm{d}w^\mu} \frac{1}{{}^1\tilde{A}(w) + a_0/a_s\, C(w)}\right]_{w=w_{0j}} = \left[\frac{\mathrm{d}^\mu}{\mathrm{d}w^\mu} \frac{1}{{}^1\tilde{A}(w)}\right]_{w=w_{0j}}, \tag{D-24}$$

lebo všetky derivácie polynómu $C(w)$ v bode w_{0j} až do rádu $r_j - 1$ sú nulové.

Na základe Leibnizovho rozvoja derivácie súčinu dvoch výrazov $(w - w_{0j})^{r_j}/C(w)\,.\, {}^1B(w)\, {}^1\tilde{B}(w)$ a $1/[{}^1\tilde{A}(w) + a_0/a_s\,.\, C(w)]$, s rešpektovaním rovnice (D-24), bude:

$$J = (a_s^2 - a_0^2) \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{(r_j - 1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{r_j-1}}{\mathrm{d}w^{r_j-1}}\left\{(w - w_{0j})^{r_j} \frac{{}^1B(w)\, {}^1\tilde{B}(w)}{\tilde{A}(w)\, C(w)}\right\}\right]_{w=w_{0j}}. \tag{D-25}$$

Výraz (D-25) je formou súčtu rezíduí vyjadrená hodnota integrálu:

$$J = (a_s^2 - a_0^2) \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{{}^1B(w)\, {}^1\tilde{B}(w)}{{}^1\tilde{A}(w)\, C(w)} \, dw \,. \tag{D-26}$$

Keď z výrazu (D-16) dosadíme za $C(w)$ a súčasne substitúciou $w = 1/z$ sa vrátime k pôvodnej premennej z, bude integrál (D-1) daný tvarom

$$J = (a_s^2 - a_0^2) \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{{}^1B(z)\, {}^1\tilde{B}(z)}{{}^1A(z)\, {}^1\tilde{A}(z)} \frac{dz}{z} \,, \tag{D-27}$$

čím sme dokázali platnosť rovnice (53).

(Došlo dňa 29. apríla 1966.)

LITERATÚRA

[1] J. Nekolný: Současná kontrola stability a jakosti regulace. Souhrn prací o automatisaci 1959. NČSAV, Praha 1961.
[2] Я. З. Цыпкин: Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, Москва 1963.
[3] V. Strejc a kol.: Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. NČSAV, Praha 1965.
[4] J. Růžička: Algebraická kritéria stability impulsních soustav. Strojnícký časopis *XIII* (1962), 5, 395—403.
[5] M. von Thoma: Ein einfaches Verfahren zur Stabilitätsprüfung von linearen Abtastsystemen. Regelungstechnik *10* (1962), 7, 302—306.
[6] Э. И. Джури: О корнях полинома с действительными коэффициентами лежащих внутри единичной окружности, и о критерии устойчивости линейных дискретных систем. Конгресс ИФАК. Базель 1963.
[7] P. Hudzovič: Numerické metódy posúdenia kvality impulznej regulácie. Kandidátska dizertačná práca. SVŠT, Bratislava 1966.

SUMMARY

Simultaneous Stability and Quality Check of the Pulse Regulation

Peter Hudzovič

The present paper deals with the problem of the computation of the sum of squares of the difference between the stable and the immediate value of the controlled variable of the pulse control system in equidistant discrete instants (S.Q.D.).

The value of S.Q.D. which characterizes in some sense the quality of the pulse regulation, is computed together with the algebraic criterion of stability of the control system.

In the first part an algorithm for the simple computation of S.Q.D. is given. This algorithm uses the products of the reduction of the denominator and numerator polynoms of the discrete transfer.

It is hoped this algorithm will be of use not only for analysis but also for computer synthesis of control systems.

An advantageous formula for the calculation of S.Q.D. is given in the second part of the paper. It again uses the results of algebraic criterion of stability and can be used for the computation of the quadratic control surface, provided the modified z-transform of the transfer is at our disposal.

Both the types of the computation are demonstrated on an example.

Ing. Peter Hudzovič, Katedra automatizácie a regulácie SVŠT, Bratislava, Vazovova 1/b.