Helmut Jürgensen; H.-D Tikovsky

Abgeschwächte Observabilitätsbegriffe für stochastische Automaten

Kybernetika, Vol. 15 (1979), No. 5, (388)--397

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124939

KYBERNETIKA — JAHRGANG 15 (1979), HEFT 5

Abgeschwächte Observabilitätsbegriffe für stochastische Automaten

H. JÜRGENSEN, H. - D. TIKOVSKY

Bekanntlich gibt es zu jedem stochastischen Automaten A einen zu A schwach äquivalenten observablen stochastischen Automaten A', in den A äquivalent eingebettet ist [2]. Der zum Beweis dieser Aussage benutzte Automat A', im folgenden als die *observable Erweiterung* Obs(A) *von* A bezeichnet, ist jedoch im allgemeinen selbst dann unendlich, wenn A endlich ist. Mit ein wenig Überlegen stellt man fest, daß dies nicht so sehr eine Eigenschaft der Konstruktion von Obs(A) wie der Definition der Observabilität stochastischer Automaten ist. Faßt man stochastische Automaten entsprechend ihrer Konzeption als Automaten auf, deren Verhalten sich nur mit einer z. B. aus einer Statistik gewonnenen Wahrscheinlichkeit vorhersagen läßt, so ist der übliche Observabilitätsbegriff allerdings auch keineswegs adäquat; natürlicher wäre es, wenn auch in diesem Falle der aus dem Verhalten des Automaten gezogene Schluß über seinen Zustand mit einer gewissen Unsicherheit sein dürfte.

Die vorliegende Arbeit ist als Diskussionsbeitrag zu diesem Problem gedacht.

1. GRUNDBEGRIFFE, BEZEICHNUNGEN

Für eine Menge X bezeichnet X^* das *von X erzeugte freie Monoid mit Einselement* 1. Für $w \in X^*$ ist $|w|$ die *Länge* von w. $A = (X, Y, Z, H)$ sei ein stochastischer Automat [2]. Für abzählbare Z machen wir von der Möglichkeit Gebrauch, H durch eine Familie $\{M(y \mid x)\}_{x \in X, y \in Y}$ von $Z \times Z$-Matrizen $M(y \mid x) = (m(y \mid x)_{z,z'})$ mit $m(y \mid x)_{z,z'} = H[z, x](y, z')$ anzugeben. Die Äquivalenz von stochastischen Automaten und von Zuständen wird mit $\sim$, die schwache Äquivalenz mit $\approx$ bezeichnet; die zugehörigen Einbettungen schreiben wir $\subseteq$ bzw. $\lessapprox$. $\Pi(Z)$ sei die Menge der zufälligen Zustände von A, und für $z \in Z$ sei $\delta_z \in \Pi(Z)$ mit $\delta_z(z) = 1$. H wird, etwas von [2] abweichend, zu einer Funktion

$$H : \bigcup_{n \geq 0} \Pi(Z) \times X^n \times Y^n \times Z \to [0, 1]$$

in naheliegender Weise so fortgesetzt, daß $H[\mathscr{Z}, u](v, z)$ die Wahrscheinlichkeit ist, von $\mathscr{Z}$ aus mit Eingabe u die Ausgabe v zu erhalten und z zu erreichen. Es sei

$$V[\mathscr{Z}, u](v) = \sum_{z' \in Z} H[\mathscr{Z}, u](v, z')$$

für $\mathscr{Z} \in \Pi(Z)$, $u \in X^*$, $v \in Y^*$, $|u| = |v|$, die Längenbedingung werden wir in Zukunft, wo nötig, immer stillschweigend voraussetzen. A heißt *observabel*, falls es eine partielle Funktion $\delta : Z \times X \times Y \to Z$, die *Beobachtungsfunktion*, gibt, so daß für alle $z \in Z$, $x \in X$, $y \in Y$ gilt: $\delta(z, x, y)$ ist genau dann definiert, wenn $V[z, x](y) > 0$ ist, und dann ist $H[z, x](y, \delta(z, x, y)) = 1$. Wir setzen ferner

$$F[\mathscr{Z}, u, v](z) = \begin{cases} \dfrac{H[\mathscr{Z}, u](v, z)}{V[\mathscr{Z}, u](v)} & \text{für } V[\mathscr{Z}, u](v) < 0\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\mathscr{Z} \in \Pi(Z)$, $u \in X^*$, $v \in Y^*$, $z \in Z$. Obs(A), die *observable Erweiterung von A*, ist der stochastische Automat $(X, Y, Z_{\text{Obs}}, H_{\text{Obs}})$ mit

$$Z_{\text{Obs}} = \{\mathscr{Z} \mid \mathscr{Z} \in \Pi(Z),\ \exists z \in Z\ \exists u \in X^*\ \exists v \in Y^* : \mathscr{Z} = F[z, u, v]\}$$

und

$$H_{\text{Obs}}[F[z, u, v], x](y, \mathscr{Z}) = \begin{cases} V[F[z, u, v], x](y), & \text{falls } V[z, ux](vy) > 0 \\ \text{und } \mathscr{Z} = F[z, ux, vy]\,, & \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $\mathscr{Z} \in Z_{\text{Obs}}$. Die zugehörige *Beobachtungsfunktion* ist

$$\delta_{\text{Obs}}(F[z, u, v], x, y) = F[z, ux, vy]\,,$$

soweit definiert. A kann genau dann in einen endlichen observablen stochastischen Automaten äquivalent eingebettet werden, wenn Obs(A) einen endlichen Reduzierten besitzt.

2. UNGEFÄHR OBSERVABLE AUTOMATEN

2.1. Definition. $A = (X, Y, Z, H)$ sei ein stochastischer Automat, $p \in [\frac{1}{2}, 1)$.

(1) $\mathscr{Z} \in \Pi(Z)$ ist *p-determiniert*, falls $\mathscr{Z}(z) > p$ für ein $z \in Z$ ist.

(2) A ist *p-observabel*, falls für alle $z \in Z$, $u \in X^*$, $v \in Y^{|u|}$ gilt: $V[z, u](v) = 0$, oder $F[z, u, v]$ ist p-determiniert.

(3) A ist *ungefähr observabel*, falls A für ein $p \in [\frac{1}{2}, 1)$ p-observabel ist.

Ein stochastischer Automat ist also genau dann p-observabel, wenn alle von den deterministischen Zuständen aus erreichbaren Zustandsverteilungen p-determiniert sind. Die Forderung $p \geqq \frac{1}{2}$ ergibt sich aus der Vorstellung, daß zu einem „ungefähr" determinierten Zustand $\mathscr{X}$ ein $z \in Z$ mit $\mathscr{X}(z) > \mathscr{X}(Z \setminus \{z\})$ existieren sollte, wobei dann „ungefähr" durch p präzisiert wird. Falls A ein p-observabler stochastischer Automat ist, so gibt es offenbar eine partielle Abbildung δ vob $Z \times X^* \times Y^*$ in Z, so daß $F[z, u, v](\delta(z, u, v)) > p$ folgt, wenn $V[z, u](v) > 0$ ist. δ kann man wieder als die *Beobachtungsfunktion* auffassen. Es genügt in 2.1 (2) nicht, sich auf den Fall $|u| = 1$ zu beschränken, weil sich die Bedingung nicht immer von Symbolen auf Wörter übertragt:

2.2. Beispiel. Sei

$$A = (\{x\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}, \{M(a \mid x), M(b \mid x)\})$$

mit

$$M(a \mid x) = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}35 \end{pmatrix},$$

$$M(b \mid x) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$F[i, x, a](i) = \begin{Bmatrix} 0{,}6 & \text{für} & i = 1, 2 \\ 0{,}7 & \text{für} & i = 3 \end{Bmatrix} > 0{,}5$$

und

$$F[i, x, b](4 - i) = \begin{Bmatrix} 0{,}8 & \text{für} & i = 1 \\ 0{,}6 & \text{für} & i = 2 \\ 1 & \text{für} & i = 3 \end{Bmatrix} > 0{,}5\,.$$

Mit $0{,}5 \leqq p < 0{,}6$ erfüllt also A die p-Observabilitätsforderung auf Symbolen. Es ist jedoch $F[1, x^2, abb] = (0{,}4\ 0{,}12\ 0{,}48)$.

2.3. Satz. *Zu jedem stochastischen Automaten* $A = (X, Y, Z, H)$ *und zu jedem* $\frac{1}{2} \leqq p < 1$ *gibt es einen p-observablen stochastischen Automaten* $A_p = (X, Y, Z_p, H_p)$, *die p-observable Erweiterung von A, mit* $A \subseteq A_p \approx A$. *Dabei sind* A_p *und* Obs (A) *im allgemeinen nicht äquivalent, aber* $A_p \subseteq$ Obs (A).

Beweis: Der Beweis verläuft analog [2], III, Satz 2.10. Sei

$$Z_p = Z \cup \left\{ \mathscr{X} \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathscr{X} \in \Pi(Z), \exists z \in Z\, \exists u \in X^*\, \exists v \in Y^* : V[z, u](v) > 0 \wedge (\forall z' \in Z : \\ : F[z, u, v](z') \leqq p) \wedge \mathscr{X} = F[z, u, v] \end{array} \right\}$$

Zur Vereinfachung identifizieren wir $z \in Z$ mit $F[z, 1, 1] = \delta_z$. Sei dann

$$H_p[F[z, u, v], x](y, \mathscr{Z}) =$$

$$= \begin{cases} H[F[z, u, v], x](y, \mathscr{Z}), & \text{falls } F[z, ux, vy] \notin Z_p \text{ und } \mathscr{Z} \in Z, \\ V[F[z, u, v], x](y), & \text{falls } [F[z, ux, vy] \in Z_p \text{ und } \mathscr{Z} = F[z, ux, vy] \\ 0 \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei ferner

$$\delta_p(F[z, u, v], r, s) = \begin{cases} F[z, ur, vs], & \text{falls } F[z, ur, vs] \in Z_p, \\ z', \quad \text{falls } F[z, ur, vs] \notin Z_p \text{ und } F[z, ur, vs](z') > p, \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

Man verifiziert durch Nachrechnen, daß A_p ein stochastischer Automat ist und p-observabel mit Beobachtungsfunktion δ_p. $A \subseteq A_p$ ergibt sich wegen $Z \ni z \sim \delta_z = F[z, 1, 1] \in Z_p$. Für $A \approx A_p$ beweist man durch Induktion nach der Länge der Eingabewörter, daß $F[z, u, v] \in Z_p$ als Zustand von A_p zu $F[z, u, v] \in \Pi(Z)$ als zufälligem Zustand von A äquivalent ist. Wegen $Z_p \subseteq Z_{\mathrm{Obs}}$ folgt nach Konstruktion ferner $A_p \subseteq \mathrm{Obs}(A)$. Daß A_p und $\mathrm{Obs}(A)$ im allgemeinen nicht äquivalent sind, ergibt das folgende Beispiel.

2.4. Beispiel. Sei $A = (\{x\}, \{y\}, \{1, 2\}, H)$, wobei H durch die Matrix

$$M(y \mid x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dann gilt

$$(1\ \ 0)\, M(y \mid x)^n = (\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^{n+1} \quad \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^{n+1})$$

und

$$(0\ \ 1)\, M(y \mid x)^n = (\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^{n+1} \quad \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^{n+1}).$$

Daher ist $A_p = A$ für $p = \frac{1}{2}$; aber $\mathrm{Obs}(A)$ ist unendlich.

A sei ein endlicher stochastischer Automat, $\frac{1}{2} \leqq p \leqq p' < 1$. Nach Konstruktion gilt dann

$$A \subseteq A_p \subseteq A_{p'} \subseteq \mathrm{Obs}(A) \approx A \approx A_p \approx A_{p'}.$$

Insbesondere ist $Z_p \subseteq Z_{p'} \subseteq Z_{\mathrm{Obs}}$ und

$$H_p = H_{p' | Z_p \times X \times Y \times Z_p} = H_{\mathrm{Obs} | Z_p \times X \times Y \times Z_p}.$$

Wegen

$$\bigcup_{p_k} Z_{p_k} = Z_{\mathrm{Obs}}$$

für jede gegen 1 konvergierende Folge $\{p_k\}$ hat man $\mathrm{Obs}(A)$ als Grenzwert der p-observablen Erweiterungen von A für $p \to 1$.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei gezeigt, daß es endliche stochastische Automaten ohne endliche p-observable Erweiterungen gibt.

2.5. Beispiel. Sei $A = (\{x\}, \{y\}, \{1, 2, 3\}, H)$, wobei H durch

$$M(y \mid x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Es ist beispielsweise $\{F[1, x^n, y^n]\}$ eine unendliche Folge mit $F[1, x^n, y^n](i) \leqq \frac{1}{2}$ für $i = 1, 2, 3$. Daher ist Z_p für alle $p \geqq \frac{1}{2}$ unendlich.

3. SCHLIESSLICH OBSERVABLE AUTOMATEN

Mit der p-Determinierheit wird die Tatsache, daß ein stochastischer Automat ein Automat mit in gewissem Sinne unsicherem Verhalten ist, in die Definition der Observabilität einbezogen. In diesem Abschnitt soll für die Definition zusätzlich berücksichtigkeit werden, daß sich das „typische" Verhalten eines stochastischen Automaten erst nach genügend langer Zeit, d.h., bei genügend langen Eingabewörtern einstellt.

3.1. Definition. $A = (X, Y, Z, H)$ sei ein stochastischer Automat. $p \in [\frac{1}{2}, 1]$. A ist *schließlich p-observabel*, falls für ein $n \in N$, alle $z \in Z$ und alle $u \in X^*X^n$, $v \in Y^{|u|}$ gilt: $V[z, u](v) = 0$, oder $F[z, u, v]$ ist p-determiniert. A ist *schließlich observabel*, falls A für alle $p \in [\frac{1}{2}, 1)$ schließlich p-observabel ist. A ist *schließlich ungefähr observabel*, falls A für ein $p \in [\frac{1}{2}, 1)$ schließlich p-observabel ist.

3.2. Satz. $A = (X, Y, Z, H)$ sei ein endlicher schließlich p-observabler stochastische Automat. Dann ist $A_{p'}$ für alle $\frac{1}{2} \leqq p' \leqq p$ endlich. Falls also A ein endlicher schließlich observabler Automat ist, ist jede p-observable Erweiterung von A endlich; falls A ein endlicher schließlich ungefähr observabler Automat ist, kann A in einen endlichen ungefähr observablen stochastischen Automaten äquivalent eingebettet werden.

Beweis. n sei gemäß 3.1 gegeben. Dann ist $F[z, u, v]$ identisch 0 oder p'-determiniert für alle $|u| = |v| > n$ und alle $\frac{1}{2} \leqq p' \leqq p$. $Z_{p'} \setminus z$ enthält daher höchstens solche $F[z, u, v]$, für die $|u| = |v| \leqq n$ ist. Also ist $Z_{p'}$ mit Z endlich.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die observable Erweiterung eines endlichen schließlich observablen stochastischen Automaten unendlich sein kann.

3.3. Beispiel. Sei $A = (\{x\}, \{y\}, \{1, 2\}, H)$, wobei H durch

$$M(y \mid x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dann ist

$$(0\ 1)\, M(y \mid x)^n = (0\ 1)$$

und

$$(1\ 0)\, M(y \mid x)^n = ((\tfrac{2}{3})^n \quad (1 - (\tfrac{2}{3})^n))$$

für alle n. Für alle $\frac{1}{2} \leq p < 1$ ist die Menge der nicht p-determinierten erreichbaren zufälligen Zustände zwar endlich, wächst aber unbeschränkt mit $p \to 1$.

4. VERGLEICH DER BEGRIFFE

Die eingeführten Abschwächungen des Observabilitätsbegriffs bilden in zweifachem Sinne Hierarchien:

(a) Jeder observable stochastische Automat ist für jedes $p \in [\frac{1}{2}, 1)$ p-observabel, ungefähr observabel und schließlich observabel. Jeder p-observable stochastische Automat ist schließlich p-observabel und schließlich ungefähr observabel.

(b) Jeder stochastische Automat mit endlicher observabler Erweiterung kann in einen endlichen schließlich observablen stochastischen Automaten äquivalent eingebettet werden. Jeder stochastische Automat, der in einen endlichen schließlich observablen stochastischen Automaten äquivalent eingebettet werden kann, besitzt eine endliche p-observable Erweiterung für jedes $p \in [\frac{1}{2}, 1)$ und kann damit in einen endlichen ungefähr observablen Automaten äquivalent eingebettet werden.

Die Umkehrungen sind jeweils nicht gültig. Man erhält also, wenn man bei der Observabilität einen gewissen Fehler zuläßt und wenn man annimmt, daß sich das typische Verhalten eines stochastischen Automaten erst nach genügend langer Zeit einstellt, größere Klassen von in diesem Sinn observablen Automaten und größere Klassen von Automaten mit endlicher in diesem Sinne observabler Erweiterung.

Im Gegensatz zu den bisherigen Überlegungen kann man, statt die Observabilitätseigenschaft selbst zu modifizieren, natürlich auch versuchen, stochastische Automaten durch endliche observable stochastische Automaten approximativ zu beschreiben. Die folgende Definition und der folgende Satz sind als stellvertretend für eine ganze Reihe ähnlicher Begriffe und Aussagen anzusehen.

4.1. Definition. $A = (X, Y, Z, H)$ und $\bar{A} = (X, Y, \bar{Z}, \bar{H})$ seien stochastische Automaten, und es sei $\varepsilon \geqq 0$.

(a) *$\bar{A}$ simuliert das Verhalten von A mit Fehlerschranke* ε, wenn gilt:

$$\forall z \in Z\ \exists \bar{z} \in \bar{Z}\ \forall r \in X^*\ \forall s \in Y^{|r|} : \left|V[z, r]\,(s) - \bar{V}[\bar{z}, r]\,(s)\right| \leqq \varepsilon\,.$$

(b) $\bar{A}$ *simuliert schließlich die Zustände von A mit Fehlerschranke* ε, wenn gilt:

$$\exists n \in \mathbf{N}\ \forall z, z' \in Z\ \exists \bar{z}, \bar{z}' \in \bar{Z}\ \forall r \in X^* X^n\ \forall s \in Y^{|r|}:$$

$$: \left|H[z, r](s, z') - \bar{H}[\bar{z}, r](s, \bar{z}')\right| \leqq \varepsilon .$$

Die Untersuchung von Kriterien für approximative Simulation läuft, wie in [1] gezeigt wurde, auf Stabilitätsbetrachtungen hinaus.

Hinsichtlich der approximativen Simulation durch observable Automaten zeigt man beispielsweise:

4.2. Satz. $A = (X, Y, Z, H)$ sei ein endlicher schließlich observabler stochastischer Automat. Es gelte genauer: Es gibt eine Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\alpha_i \in [0, 1]$ für $i = 0, 1, \ldots,$

(b) $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i$ existiert, und $0 < \alpha \leqq \frac{1}{4}$,

(c) $\forall z \in Z\ \forall z' \in Z\ \forall r \in X^n X^*\ \forall s \in Y^{|r|} : F[z, r, s](z') < 1 - 2\alpha \rightarrow$
$\rightarrow F[z, r, s](z') \geqq 1 - \alpha_n .$

Dann gibt es einen endlichen observablen Automaten, der das Verhalten von A mit Fehlerschranke 2α simuliert und der die Zustände von A schließlich mit Fehlerschranke $2\alpha + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ simuliert.

Beweis. Die p-observable Erweiterung $A_p(X, Y, Z_p, H_p)$ für $p = 1 - 2\alpha$ von A ist endlich. Der gesuchte Automat $\bar{A} = (X, Y, Z_p, \bar{H})$ wird folgendermaßen definiert: Für $\bar{z} \in Z_p$, also $\bar{z} = F[z, u, v]$ mit $(z, u, v) \in Z \times X^* \times Y^*$, und für $x \in X$, $y \in Y$, $\bar{z}' \in Z_p$ ist

$$\bar{H}[\bar{z}, x](y, \bar{z}') = \begin{cases} V[F[z, u, v], x](y), & \text{falls } \bar{z}' = F[z, ux, vy] \\ \quad \text{oder } F[z, ux, vy](\bar{z}') > p, & \\ 0 \quad \text{sonst.} & \end{cases}$$

Wegen

$$\sum_{\bar{z}' \in Z_p} \sum_{y \in Y} \bar{H}[\bar{z}, x](y, \bar{z}') = \sum_{y \in Y} V[F[z, u, v], x](y) = 1$$

ist $\bar{A}$ ein stochastischer Automat, der mit A_p auch endlich ist. Die partielle Funktion

$$\delta(\bar{z}, x, y) = \begin{cases} \bar{z}', & \text{falls } \bar{H}[\bar{z}, x](y, \bar{z}') \neq 0, \\ \text{undefiniert sonst}, & \end{cases}$$

ist wohldefiniert und Beobachtungsfunktion für $\bar{A}$.

Es ist zunächst zu zeigen, daß $\bar{A}$ das Verhalten von A mit Fehlerschranke 2α simuliert; dies gilt sicher dann, wenn die folgende Behauptung wahr ist:

$$\forall z \in Z \, \forall r \in X^* \, \forall s \in Y^{|r|} : \left| V[z, r](s) - \bar{V}[z, r](s) \right| \leqq \sum_{i=0}^{|r|-1} \alpha_i + \alpha \,.$$

Dabei wird z einmal als Zustand von A und einmal als Zustand von $\bar{A}$ aufgefaßt.

Für $|r| = |s| = 0$ gilt

$$\left| V[z, r](s) = \bar{V}[z, r](s) \right| = 0 \leqq \alpha \,.$$

Die Behauptung sei nun für $|r| = |s| = n \geqq 0$ bewiesen, und es sei $x \in X$, $y \in Y$.

Falls $F[z, r, s] \equiv 0$ ist, gilt

$$\bar{V}[z, r](s) = 0 = V[z, r](s) \,,$$

und die Behauptung ist erfüllt.

Sei nun

$$0 \leqq F[z, r, s](z') \leqq 1 - 2\alpha = p$$

für alle $z' \in Z$, aber $F|z, r, s| \neq 0$. Dann ist

$$\bar{F}[z, r, s] = \delta_{F[z,r,s]} \,, \quad F[z, r, s] \in Z_p$$

und

$$\begin{aligned} \bar{V}[z, rx](sy) &= \bar{V}[z, r](s) \quad V[\bar{F}[z, r, s], x](y) \,, \\ &= \bar{V}[z, r](s) \quad \bar{V}[F]z, rs], x](y) \,, \\ &= \bar{V}[z, r](s) \quad V[F[z, r, s], (y) \,. \end{aligned}$$

Dies ist wegen der Induktionsnahme durch

$$\left(V[z, r](s) \pm \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \pm \alpha\right) \quad V[F[z, r, s], x](y)$$

und wegen

$$0 \leqq V[F[z, r, s], x](y) \leqq 1$$

durch

$$V[z, r](s) \, V[F[z, r, s], x](y) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \pm \alpha = V[z, rx](sy) \pm \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \pm \alpha$$

abzuschätzen. Die behauptete Ungleichung folgt wegen $\alpha_n \geqq 0$.

Sei schließlich

$$1 - 2\alpha = p < F[z, r, s](z')$$

 für ein $z' \in Z$. Es folgt

$$F[z, r, s](z') \geqq 1 - \alpha_n$$

nach Voraussetzung.

Daraus erhält man wegen

$$0 \leqq V[z', x](y) \leqq 1$$

und wegen

$$(1 - F[z, r, s](z'))(V[z', x](y) - 1) \leqq \bar{V}[z', x](y) - V[F[z, r, s], x](y) \leqq$$
$$\leqq (1 - F[z, r, s](z')) V[z', x](y)$$

die Schranke

$$(V[z, r](s) \pm \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \pm \alpha)(V[F[z, r, s], x](y) \pm \alpha_n)$$

also

$$V[z, rx](sy) \pm \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \pm (\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i + \alpha) \alpha_n .$$

Dies schätzt man durch

$$V[z, rx](sy) \pm \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \pm \alpha$$

ab, weil

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \leqq \alpha$$

und

$$\alpha_n \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2}$$

gilt.

Zum Beweis der letzten Behauptung sei $n \in N$ genügend groß gewählt, so daß für alle $z \in Z$ und alle $r \in X^*$, $s \in Y^*$ mit $|r| = |s| \geqq n$

$$V[z, r](s) = 0$$

oder

$$\exists z'' \in Z : F[z, r, s](z'') > p$$

gilt. n existiert nach Voraussetzung. Wir zeigen, daß für alle $z \in Z$, $z' \in Z$, $r \in X^*X^n$, $s \in Y^{|r|}$

$$|H[z, r](s, z') - \bar{H}[z, r](s, z')| \leqq 2\alpha + \varepsilon$$

ist mit $\varepsilon \to 0$ für $|r| \to \infty$.

Für $V[z, r](s) = 0$ ist das wegen

$$H[z, r](s, z') = 0 = \bar{H}[z, r](s, z')$$

trivial. Sei also $F[z, r, s](z'') > p$ für ein $z'' \in Z$. Falls $z' \neq z''$ ist, ergibt sich

$$F[z, r, s](z') \leqq 2\alpha$$

und daraus

$$|H[z, r](s, z') - \bar{H}[z, r](s, z')| = |H[z, r](s, z') - 0| \leqq F[z, r, s](z') \leqq 2\alpha .$$

Für $z' = z''$ hat man

$$\begin{aligned} |H[z, r](s, z'') - \bar{H}[z, r](s, z'')| &= |F[z, r, s](z'')\, V[z, r](s) - \bar{V}[z, r](s) \leqq \\ &\leqq |F[z, r, s](z'')\, V[z, r](s) - V[z, r](s)| + |V[z, r](s) - \bar{V}[z, r](s)| \leqq \\ &\leqq (1 - F[z, r, s](z'')) + 2\alpha \leqq 2\alpha + \alpha_{|r|} . \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ ergibt sich die Behauptung.

(Eingegangen am 29. Mai 1978.)

LITERATUR

[1] D. Göbel: Über Zerlegung, Approximation und approximative Zerlegung von stochastischen Automaten. Diss. Kiel, 1976; Bericht 3/76, Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Universität Kiel.

[2] Starke, P. H.: Abstrakte Automaten. Berlin, 1969.

Dr. H. Jürgensen, Institut für Theoretische Informatik, Technische Hochschule Darmstadt, Magdalenenstr. 11, D-6100 Darmstadt. BRD.

Dr. H. - D. Tikovsky, Bienenkamp 7, D-2000 Hamburg 72. BRD.