

Karel Čulík II

Relace reprezentované n -páskovými automaty

Kybernetika, Vol. 3 (1967), No. 4, (321)–345

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/124625>

Terms of use:

© Institute of Information Theory and Automation AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Relace representované n -páskovými automaty

KAREL ČULÍK II

V článku jsou vyšetřovány třídy relací representované různými třídami n -páskových automatů. Je zavedena reprezentace relace mod e n -páskovým automatem a jsou vyšetřovány třídy relací representované mod e n -páskovými automaty. Zkoumají se hlavně inkluze různých tříd relací representovaných třídami automatů a jejich uzavřenost vůči booleovským a Kleeneho operacím.

0. ÚVOD

V práci jsou vyšetřovány třídy relací representované (definované) n -páskovými automaty. Automatem se zde rozumí automat bez výstupu s vytčenou množinou koncových stavů, který je určen k tomu, aby rozeznával přijatě a nepřijatě n -tice slov nad zvolenou abecedou Σ . Uvažuje se třída automatů D_n , zavedená pro $n = 2$ v [4] a [6], a její nedeterminovaná verze N_n , třídy E_n , S_n a M_n , zavedené v [5] a nově zavedené třídy G_n a H_n .

V práci jsou vyšetřovány relace a třídy relací representované uvedenými třídami n -páskových konečných automatů. Práce navazuje na [4], [5] a [6]. Zkoumají se hlavně inkluze různých tříd relací representovaných třídami automatů a jejich uzavřenost vůči booleovským a Kleeneho operacím.

Jsou rovněž vyšetřovány relace a třídy relací representované mod e n -páskovými automaty. Definice reprezentace mod e pro relace je analogická definici reprezentace mod e pro jazyky v [3].

Výsledky o inklusích, rovnostech a neinklusích uvažovaných tříd relací jsou shrnuty v přehledném diagramu na obr. 5 a odvozené výsledky o uzavřenosti těchto tříd jsou spolu s výsledky známými z literatury ([4], [5], [6]) uvedeny v tabulce 5.

Uvedeme několik méně běžných pojmů a označení, resp. upřesníme význam, ve kterém je budeme používat.

Zvolme pevně nějakou abecedu Σ . Σ je konečná množina tzv. symbolů. Slovo nad abecedou Σ je sřetězení konečně mnoha symbolů z abecedy Σ . Prázdné slovo označujeme e . (Rovněž tak budeme označovat tzv. „prázdný“ symbol $e \notin \Sigma$.) Jazyk nad abecedou Σ je množina slov nad abecedou Σ . n -ární relace nad abecedou Σ je množina n -tic slov nad abecedou Σ .

Množinu všech slov (včetně prázdného) nad abecedou Σ označme Σ^* . Množinu všech n -tic slov nad abecedou Σ označme $(\Sigma^*)^n$.

Jestliže p a q jsou slova nad abecedou Σ , $p = a_1 \dots a_s$, $q = b_1 \dots b_t$ ($a_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \dots, s$; $b_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \dots, t$), pak sřetěžením slov p a q rozumíme slovo $a_1 \dots a_s b_1 \dots b_t$ a označujeme ho ps nebo $p \cdot s$.

Nechť $\mathbf{u} \in (\Sigma^*)^n$, $\mathbf{v} \in (\Sigma^*)^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, potom sřetěžením n -tice \mathbf{u} a \mathbf{v} rozumíme n -tici $\mathbf{uv} = (u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_n v_n)$. (Jako v ostatních případech sřetěžení užíváme bud označení $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nebo jen juxtaposici \mathbf{uv} .)

Množinu prvků, které mají vlastnost V , označujeme $\{x : x \text{ má vlastnost } V\}$, chceme-li zdůraznit, že je takto definována množina M , píšeme $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \text{ má vlastnost } V\}$.

Kleeneho operace jsou pro relace definovány takto:

Jestliže $R \subset (\Sigma^*)^n$, $S \subset (\Sigma^*)^n$, pak

$$R \cup S \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in R \vee \mathbf{u} \in S\}.$$

Jestliže $R \subset (\Sigma^*)^n$, $S \subset (\Sigma^*)^n$, pak

$$RS \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{uv} : \mathbf{u} \in R, \mathbf{v} \in S\}.$$

Jestliže $R \subset (\Sigma^*)^n$, pak

$$R^* = R^0 \cup R \cup RR \cup RRR \cup \dots,$$

kde

$$R^0 = \underbrace{(e, e, \dots, e)}_{n\text{-krát}}.$$

Zavedeme ještě pomocnou operaci \oplus vytvářející z m -tice slov nad abecedou Σ a n -tice slov nad abecedou Σ ($m+n$ -tici slov nad abecedou Σ). Nechť $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, pak $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$. k -tici tvořenou k prázdnými slovy nebo k prázdnými symboly budeme označovat e^k . Tedy

$$e^k = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_{k\text{-krát}}.$$

Příklad 0,1.

a) $(ab, acb) \oplus (a, bc) = (ab, acb, a, bc).$

b) $e^k \oplus a \oplus e^p = \underbrace{(e, e, \dots, e, a, e, \dots, e)}_{k\text{-krát} \quad p\text{-krát}}.$

Budeme-li užívat v témže výrazu operaci \oplus a operaci sřetěžení, pak předpokládáme, že operace \oplus má vyšší prioritu.

$$(ab, cd) \oplus (bb, da) \cdot (bb, aa) \oplus (cc, cb) = (abbb, cdaa, bbcc, dacb).$$

Říkáme, že n -tice slov $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je počátečním úsekem n -tice slov $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, jestliže slovo u_i je počátečním úsekem slova v_i pro $i = 1, 2, \dots, n$. (Každé slovo je počátečním úsekem sama sebe.)

Délkou n -tice slov rozumíme součet délek všech slov n -tice, přičemž délku prázdného slova pokládáme rovnou nule.

1. TŘÍDY n -PÁSKOVÝCH AUTOMATŮ

Uvedeme nyní definice všech tříd n -páskových automatů, které budeme v práci vyšetřovat. Nedílnou součástí definice každé ze tříd automatů je také definice n -tic slov přijatých automatem. Předpokládáme, že všechny uvažované automaty mají vstupní abecedu (jsou nad abecedou) Σ resp. $\Sigma \cup \{e\}$ a nebudeme to vždy znovu zdůrazňovat. Mluvíme-li dále o n -ticích slov přijatých automatem, předpokládáme vždy, že jde o slova nad abecedou Σ nebo nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$.

Třidu \mathbf{D}_n determinovaných n -páskových automatů definujeme takto: $\mathcal{A} \in \mathbf{D}_n$ je systém $\mathcal{A} = (S, \varphi, s_0, F, C_1, C_2, \dots, C_n)$, kde S je konečná množina stavů, φ přechodová funkce (jednoznačná, obecně částečná) z $S \times \Sigma$ do S , $s_0 \in S$ je počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů a C_1, \dots, C_n je rozklad množiny stavů $C_i \cap C_j = \emptyset$ pro $i \neq j$; $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = S$. Jestliže $s_i \in C_j$, znamená to, že automat nacházející se ve stavu s_i bere vstupní symbol z j -té vstupní pásky. Jinak pracuje jako obyčejný automat. Nechť $\mathcal{A} \in \mathbf{D}_n$ a s_0, \dots, s_t je posloupnost jeho stavů. Potom existuje jediná dvojice asociovaných posloupností celých čísel $(u_0, \dots, u_t; v_0, \dots, v_t)$ taková, že

- (i) je-li $s_i \in C_j$, pak $u_i = j$;
 (ii) v_i je počet indexů $j \leq i$ takových, že $s_j \in C_{u_i}$.

Řekneme, že n -tice slov $(x_{11} \dots x_{1m_1}, x_{21} \dots x_{2m_2}, \dots, x_{n1} \dots x_{nm_n})$ je přijata automatem $\mathcal{A} \in \mathbf{D}_n$, jestliže existuje (jediná) posloupnost stavů s_0, \dots, s_t a dvojice jí asociovaných posloupností celých čísel $(u_0, \dots, u_t; v_0, \dots, v_t)$, které splňují podmínky:

$$(1.1) \quad s_i = \varphi(s_{i-1}, x_{u_{i-1}v_{i-1}}) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, t, \quad (v_{i-1} \leq m_{u_{i-1}});$$

$$(1.2) \quad s_t \in F;$$

$$(1.3) \quad \text{jestliže } u_t = j, \quad \text{potom } v_t = m_j + 1.$$

Poznámka. Definici 2-páskového automatu v [4] je třeba upravit požadavkem, aby pouze jeden ze symbolů $\sigma_{n_{i-1}, i-1}$ pro $i = 1, \dots, p$ byl koncový symbol \exists . Jinak by neplatily výsledky dále tam uvedené. Po této opravě je definice 2-páskového automatu v [4] pouze nepodstatně odlišná od výše uvedené (pro $n = 2$).

Třidu \mathbf{N}_n definujeme jako nedeterministickou versi třídy \mathbf{D}_n . Přechodové zobrazení φ může být víceznačné a není dán jediný počáteční stav, ale obecně množina počátečních stavů. Tedy $\mathcal{A} \in \mathbf{N}_n$ je systém $\mathcal{A} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, \dots, C_n)$, kde S je konečná množina stavů, φ obecně víceznačná přechodová funkce, $S_0 \subset S$ je množina počátečních stavů, $F \subset S$ je množina koncových stavů, C_1, \dots, C_n je rozklad množiny S .

Definice přijaté n -tice slov je táž jako pro třídu \mathbf{D}_n až na to, že požadujeme $s_0 \in S_0$ a že může existovat více posloupností stavů splňujících požadované podmínky.

Třidu \mathbf{G}_n determinovaných automatů definujeme stejně jako třídu \mathbf{D}_n , až na přijaté n -tice.

Řekneme, že n -tice slov $(x_{11} \dots x_{1m_1}, x_{21} \dots x_{2m_2}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nm_n})$ je přijata automatem $\mathcal{B} \in \mathbf{G}_n$, jestliže existuje (jediná) posloupnost stavů s_0, \dots, s_t a dvojice jí asociovaných posloupností celých čísel $(u_0, \dots, u_t; v_0, \dots, v_t)$, které splňují podmínky:

$$(2.1) \quad s_i = \varphi(s_{i-1}, x_{u_{i-1}}, x_{v_{i-1}}) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, t \quad (v_{i-1} \leq m_{u_{i-1}});$$

$$(2.2) \quad s_t \in F;$$

$$(2.3) \quad t = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Poznámka. Jestliže počáteční stav s_0 je zároveň koncovým stavem, pak automat přijímá n -tici tvořenou n prázdnými slovy (ϵ^n).

Třidu \mathbf{H}_n definujeme jako nedeterministickou versi třídy \mathbf{G}_n . Přechodová funkce může být víceznačná. Obecně je dána množina počátečních stavů. (Mezi \mathbf{H}_n a \mathbf{G}_n je obdobný vztah jako mezi \mathbf{N}_n a \mathbf{D}_n .)

Třidu \mathbf{S}_n determinovaných n -páskových automatů definujeme takto: $\mathcal{A} \in \mathbf{S}_n$ je systém $\mathcal{A} = (S, \varphi, s_0, F)$, kde S je konečná množina stavů, φ přechodová funkce (jednoznačná, obecně částečná) z $S \times \Sigma^n$ do S , $s_0 \in S$ je počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů.

Řekneme, že n -tice slov $(x_{11} \dots x_{1m_1}, x_{21} \dots x_{2m_2}, \dots, x_{n1} \dots x_{nm_n})$ je přijata automatem $\mathcal{A} \in \mathbf{S}_n$, jestliže existuje (jediná) posloupnost stavů s_0, \dots, s_m taková, že

$$(3.1) \quad s_i = \varphi(s_{i-1}, (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(3.2) \quad s_m \in F.$$

Třidu \mathbf{E}_n determinovaných n -páskových automatů definujeme takto (viz [5]): $\mathcal{A} \in \mathbf{E}_n$ je systém $\mathcal{A} = (S, \varphi, s_0, F)$, kde S je konečná množina stavů, φ přechodová funkce (jednoznačná, obecně částečná) z $S \times (\Sigma \cup \{e\})^n$ do S , $s_0 \in S$ je počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů.

Řekneme, že n -tice slov nad abecedou Σ resp. $\Sigma \cup \{e\}$ $(x_{11} \dots x_{1m_1}, x_{21} \dots x_{2m_2}, x_{n1} \dots x_{nm_n})$ je přijata automatem $\mathcal{A} \in \mathbf{E}_n$, jestliže existuje jediná posloupnost stavů s_0, s_1, \dots, s_m taková, že

$$(4.1) \quad s_i = \varphi(s_{i-1}, (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m = \max(m_1, \dots, m_n),$$

kde

$$x_{ji} = e \quad \text{pro } i > m_j;$$

$$(4.2) \quad s_m \in F.$$

M_n označme třídu n -páskových automatů (NDA v [5]), kde $\mathcal{A} \in M_n$ je systém $\mathcal{A} = (S, v, s_0, F)$, kde S je konečná množina stavů; v je konečná množina $v \subset S \times (\Sigma^*)^n \times S$ (obecně víceznačná přechodová funkce definovaná ne pro jednotlivé symboly, ale obecně pro slova ze vstupní abecedy), $s_0 \in S$ počáteční stav, $F \subset S$ je množina koncových stavů.

Řekneme, že n -tice slov $\mathbf{u} \in (\Sigma^*)^n$ je přijata automatem $\mathcal{A} \in M_n$, jestliže existuje posloupnost stavů s_0, s_1, \dots, s_t taková, že

$$(5.1) \quad (s_{i-1}, \mathbf{u}_i, s_i) \in v \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, t;$$

$$(5.2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_t;$$

$$(5.3) \quad s_t \in F.$$

Množinu n -tic slov přijatých automatem \mathcal{A} , neboli relaci reprezentovanou automatem \mathcal{A} , označme $R(\mathcal{A})$. Je-li \mathbf{K} třída automatů, pak $R(\mathbf{K})$ označme třídu relací

$$R(\mathbf{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{R : R = R(\mathcal{A}), \mathcal{A} \in \mathbf{K}\}.$$

Definujeme nyní reprezentaci relací mod e n -páskovými automaty, obdobně jako je definována reprezentace jazyků mod e v [3]. Symbol e , tzv. prázdný symbol, hraje roli identického prvku vzhledem ke sřetězování slov nad abecedou Σ . Nejdůležitější interpretace e je taková, při níž je e považován skutečně za prázdný, to znamená, že na symboly e vyskytující se ve slovech nebereme zřetel. To je vystiženo v definici rovnosti slov mod e .

Nechť p a q jsou slova nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, tj. nechť $p = x_1 x_2 \dots x_m$, kde $x_i \in \Sigma \cup \{e\}$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ ($m \geq 1$) a $q = y_1 y_2 \dots y_n$, kde $y_j \in \Sigma \cup \{e\}$ pro $j = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 1$). Pak píšeme $p = q \pmod{e}$, jestliže buď $x_i = y_j = e$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a všechna $j = 1, 2, \dots, n$ nebo existují celá čísla s_j a t_j taková, že $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq m$, $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq n$ a $x_{s_j} = y_{t_j}$ pro $j = 1, 2, \dots, k$ a $x_h = y_r = e$ pro všechna $r \neq t_j$ a $h \neq s_j$, kde $j = 1, 2, \dots, k$. Jinak řečeno slova jsou si rovna mod e , když se rovnají po vynechání všech symbolů e .

Řekneme, že n -tice slov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jsou si rovny resp. rovny mod e , jestliže $u_i = v_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ resp. $u_i = v_i \pmod{e}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Píšeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ resp. $\mathbf{u} \approx \mathbf{v} \pmod{e}$.

Relaci (nad abecedou Σ) reprezentovanou mod e automatem \mathcal{A} (nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$) nazveme relací

$$R^{\text{mod } e}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = \mathbf{v} \pmod{e}, \mathbf{v} \in R(\mathcal{A})\}.$$

326 Necht \mathbf{K} je třída automatů, potom

$$R^{\text{mod } e}(\mathbf{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{R : R = R^{\text{mod } e}(\mathcal{A}); \mathcal{A} \in \mathbf{K}\}.$$

2. INKLUSE, NEINKLUSE A ROVNOSTI TŘÍD RELACÍ REPRESENTOVANÝCH JEDNOTLIVÝMI TYPY n -PÁSKOVÝCH AUTOMATŮ

Dokážeme nejprve lemma, které umožní zkrátit důkaz věty 1.

Lemma 1. *Necht $\mathcal{A} \in \mathbf{M}_n$, $\mathcal{A} = (S^{\mathcal{A}}, v^{\mathcal{A}}, s_0, F^{\mathcal{A}})$. Pak existuje automat $\mathcal{B} \in \mathbf{M}_n$, $\mathcal{B} = (S^{\mathcal{B}}, v^{\mathcal{B}}, s_0, F^{\mathcal{B}})$ takový, že $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{B})$ a $v^{\mathcal{B}}$ splňuje podmínku:*

- (6) *Všechny n -tice $\mathbf{u} \in U_i$, kde $U_i = \{\mathbf{u} : (s_i, \mathbf{u}, s_j) \in v^{\mathcal{B}}\}$ mají pro každé $i \neq 0$ tvar $(e, e, \dots, x, e, \dots, e)$, $x \in \Sigma$, kde neprázdný symbol x je na témže místě (ale nemusí být též pro všechna $\mathbf{u} \in U_i$). Všechny $\mathbf{u} \in U_0$ mají také pouze jeden neprázdný symbol, ale ten může být na kterémkoliv místě.*

Důkaz. Nejprve zvolíme automat $\mathcal{P} \in \mathbf{M}_n$, $\mathcal{P} = (S^{\mathcal{P}}, v^{\mathcal{P}}, s_0, F^{\mathcal{P}})$. Množina stavů $S^{\mathcal{P}}$ vznikne rozšířením množiny $S^{\mathcal{A}}$ tak, že pro každou trojici $(s_i, \mathbf{u}, s_j) \in v^{\mathcal{A}}$, kde n -tice \mathbf{u} má délku $k \geq 2$ (sestává z k neprázdných symbolů, $k \geq 2$), rozšíříme množinu stavů o stavy $s_i^{u,1}, s_i^{u,2}, \dots, s_i^{u,k-1}$; $v^{\mathcal{P}}$ volíme takto: jestliže $\mathbf{u} = (x_{11}x_{12} \dots x_{1k_1}, x_{21} \dots x_{2k_2}, \dots, x_{n1} \dots x_{nk_n})$, kde $\sum_{j=1}^n k_j = k \geq 2$, volíme

$$\begin{aligned} (s_i, x_{11} \oplus e^{n-1}, s_i^{u,1}) &\in v^{\mathcal{P}}, \\ (s_i^{u,1}, x_{12} \oplus e^{n-1}, s_i^{u,2}) &\in v^{\mathcal{P}}, \\ &\vdots \\ (s_i^{u,k_1-1}, x_{1k_1} \oplus e^{n-1}, s_i^{u,k_1}) &\in v^{\mathcal{P}}, \\ (s_i^{u,k_1}, e \oplus x_{21} \oplus e^{n-2}, s_i^{u,k_1+1}) &\in v^{\mathcal{P}}, \\ &\vdots \\ (s_i^{u,k-2}, e^{n-1} \oplus x_{nk_n-1}, s_i^{u,k-1}) &\in v^{\mathcal{P}}, \\ (s_i^{u,k-1}, e^{n-1} \oplus x_{nk_n}, s_j) &\in v^{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Jestliže v trojici $(s_i, \mathbf{u}, s_j) \in v^{\mathcal{A}}$ má n -tice \mathbf{u} délku jedna, potom necht $(s_i, \mathbf{u}, s_j) \in v^{\mathcal{P}}$.

Ukažme si, že platí $R(\mathcal{P}) = R(\mathcal{A})$.

a) Necht $\mathbf{u} \in R(\mathcal{A})$, pak podle (5.1) – (5.3) existuje posloupnost stavů s_0, \dots, s_t automatu \mathcal{A} taková, že

$$(7.1) \quad (s_{i-1}, \mathbf{u}_i, s_i) \in v^{\mathcal{A}} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, t;$$

$$(7.2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_t;$$

$$(7.3) \quad s_t \in F^{\mathcal{A}}.$$

Označme d_i délku n -tice u_i (součet délek slov, které ji tvoří). Potom

$$(8) \quad s_0, s_0^{u_1,1}, s_0^{u_1,2}, \dots, s_0^{u_1,d_1-1}, s_1, s_1^{u_2,1}, s_1^{u_2,2}, \dots, s_1^{u_2,d_2-1}, s_2, \dots \\ \dots, s_{t-1}, s_{t-1}^{u_t-1,d_t-1-1}, s_t$$

je posloupnost stavů automatu \mathcal{P} , která splňuje podmínky (5.1)–(5.3) pro to, aby $\mathbf{u} \in R(\mathcal{P})$. Je tedy $R(\mathcal{A}) \subset R(\mathcal{P})$.

b) Necht' $\mathbf{u} \in R(\mathcal{P})$, pak existuje posloupnost s_0, \dots, s_q stavů automatu \mathcal{P} , která splňuje podmínky (5.1)–(5.3) pro přijetí n -tice \mathbf{u} automatem \mathcal{P} . Z definice automatu \mathcal{P} vyplývá, že tuto posloupnost lze vyjádřit ve tvaru (8). Vyškrtneme-li z ní všechny stavy z množiny $S^\mathcal{P} - S^\mathcal{A}$, dostaneme vybranou posloupnost, která splňuje podmínky (7.1)–(7.3) pro to, aby $\mathbf{u} \in R(\mathcal{A})$. Je tedy $R(\mathcal{P}) \subset R(\mathcal{A})$.

Nyní ukažme, jak k automatu \mathcal{P} lze zvolit hledaný automat \mathcal{B} . Necht' $\mathcal{B} = (S^\mathcal{B}, v^\mathcal{B}, s_0, F^\mathcal{B})$, kde $S^\mathcal{B} = s_0 \cup ((S^\mathcal{P} - s_0) \times \{1, 2, \dots, n\})$ a $v^\mathcal{B}$ volíme takto:

Jestliže $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^\mathcal{P}$, potom $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^\mathcal{B}$;

jestliže $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v^\mathcal{P}$, $s_j \neq s_0$, potom $(s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, (s_j, t)) \in v^\mathcal{B}$ pro $t = 1, 2, \dots, n$;

jestliže $(s_t, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^\mathcal{P}$, $s_t \neq s_0$, pak $((s_t, k), e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_0) \in v^\mathcal{B}$;

jestliže $(s_t, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v^\mathcal{P}$, $s_t \neq s_0$, $s_j \neq s_0$, pak $((s_t, k), e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, (s_j, t)) \in v^\mathcal{B}$ pro $t = 1, 2, \dots, n$.

Nakonec volíme $F^\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{(s_t, t) : s_t \in F^\mathcal{P}, t = 1, 2, \dots, n\}$.

Zřejmě je $R(\mathcal{P}) = R(\mathcal{B})$ a automat \mathcal{B} splňuje podmínku (6) požadovanou v lemmatu.

Věta 1. Platí

$$R^{\text{mod } e}(\mathbf{M}_n) = R(\mathbf{M}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{S}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{H}_n) = R(\mathbf{H}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{G}_n).$$

Důkaz. 1. Platnost vztahu $R^{\text{mod } e}(\mathbf{M}_n) = R(\mathbf{M}_n)$ je zřejmá.

2a) Automat $\mathcal{A} \in \mathbf{S}_n$ (nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$) můžeme uvažovat jako automat $\mathcal{A} \in \mathbf{M}_n$ (nad abecedou Σ), přičemž e označuje v tomto případě prázdné slovo (slovo skládající se z nula symbolů). Je tedy $R^{\text{mod } e}(\mathbf{S}_n) \subset R(\mathbf{M}_n)$.

b) Necht' je dán automat $\mathcal{B} \in \mathbf{M}_n$; $\mathcal{B} = (S, v, s_0, F)$. Sestrojíme automat $\mathcal{C} \in \mathbf{S}_n$; $\mathcal{C} = (S', \varphi, s_0, F)$ takto: Ke každé trojici $(s_i, \mathbf{u}, s_j) \in v$ zvolme n -tici slov nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$

$$(9) \quad \mathbf{v} = (x_{11} \dots x_{1m}, x_{21} \dots x_{2m}, \dots, x_{n1} \dots x_{nm})$$

tak, aby $u_i = x_{i1} \dots x_{im} \pmod{e}$, kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a aby byla splněna

podmínka: jestliže trojici (s_i, \mathbf{u}, s_j) odpovídá n -tice (9) a trojici $(s'_i, \mathbf{u}', s'_j) \in \nu$ odpovídá n -tice

$$(10) \quad \mathbf{v}' = (x'_{11} \dots x_{1p}, x'_{21} \dots x_{2p}, \dots, x'_{n1} \dots x_{np}),$$

potom nechť pro $s_i = s'_i$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$, $s_j \neq s'_j$ je $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$. n -tice (9) lze zvolit požadovaným způsobem po vhodném doplnění n -tic \mathbf{u} symboly e . Množinu stavů S' automatu \mathcal{G} ($S \subset S'$) volme nyní tak, že pro každou zvolenou n -tici (9) rozšíříme množinu stavů S o $m-1$ stavů. Nechť $P_i \in (\Sigma^*)^n$ je množina různých n -tic stejně dlouhých slov (nad $\Sigma \cup \{e\}$), jež jsou počátečními úseky některé n -tice (9) odpovídající trojici (s_i, \mathbf{u}, s_j) (s_i, \mathbf{u}, s_j libovolné). Pak volme $S' = S \cup \{s_i^p : s_i \in S, \mathbf{p} \in P_i\}$ a jednoznačnou přechodovou funkci φ volíme takto:

- (i) Jestliže $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_i$, pak $\varphi(s_i, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_i^{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$;
- (ii) jestliže $\mathbf{p} \in P_i$, $\mathbf{p} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_i$, pak $\varphi(s_i^{\mathbf{p}}, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_i^{\mathbf{p}} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $\mathbf{p} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je sřetení n -tice \mathbf{p} a n -tice (x_1, \dots, x_n) ;
- (iii) jestliže $\mathbf{p} \in P_i$ a $\mathbf{p} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je n -tice (9) odpovídající trojici (s_i, \mathbf{u}, s_j) , pak $\varphi(s_i^{\mathbf{p}}, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_j$.

Pro takto volený automat $\mathcal{G} \in \mathcal{S}_n$ je zřejmá $R(\mathcal{G}) = R^{\text{mod } e}(\mathcal{G})$. Tím je tedy ukázáno, že platí i obrácená inkluze $R(\mathcal{M}_n) \subset R^{\text{mod } e}(\mathcal{S}_n)$ a tedy platí $R(\mathcal{M}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathcal{S}_n)$.

Příklad 1. Část diagramu* nějakého automatu $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_n$ je na obr. 1a) a k ní odpovídající část diagramu příslušného automatu $\mathcal{G} \in \mathcal{S}_n$ je na obr. 1b). n -tice (9) jsou zde voleny takto:

$$\begin{aligned} &(s_i, (ab, cda), s_j) \dots (abe, cda), \\ &(s_i, (ab, e), s_i) \dots (ab, ec), \\ &(s_i, (ab, e), s_k) \dots (ab, ce). \end{aligned}$$

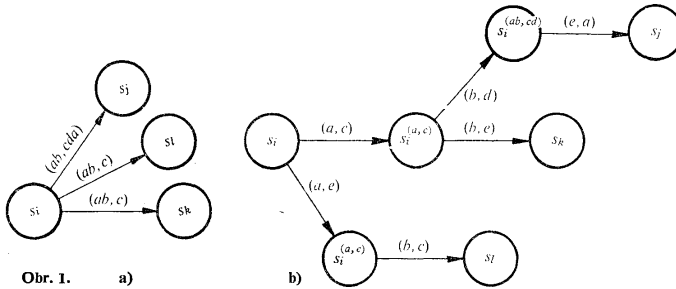
3a) Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n$, $\mathcal{A} = (S^{\mathcal{A}}, \nu^{\mathcal{A}}, s_0, F^{\mathcal{A}})$. Podle lemmatu 1 existuje automat $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_n$, který splňuje podmínku (6) z lemmatu 1 a pro který je $R(\mathcal{B}) = R(\mathcal{A})$. K takovému automatu \mathcal{B} můžeme již snadno zvolit automat $\mathcal{G} \in \mathcal{H}_n$, pro který

* Diagram automatu je grafické znázornění orientovaného ohodnoceného grafu (viz [1]). Uzly grafu jsou stavy automatu, z uzlu v směřuje oblouk do uzlu w a je ohodnocen k tehdy, jestliže automat je vstupem k převáděn ze stavu v do stavu w , je-li takových vstupů více, ohodnocujeme oblouk příslušnou množinou. Podle toho, o kterou třídu automatů jde, může vstupem být symbol, slovo, n -tice symbolů nebo n -tice slov. U některých tříd zavádíme ještě ohodnocení uzlů grafu, které má podle uvažované třídy význam výstupu resp. čísla pásky, ze které se bere vstup resp. čísla pásky, na které je vydáván výstup. Podrobněji u jednotlivých případů. Uzly grafu (stavy) znázorňujeme kroužkem, do kterého vepisujeme označení stavu. Patří-li stav mezi tzv. koncové stavy, znázorňujeme ho dvojitým kroužkem.

$R(\mathcal{C}) = R(\mathcal{B})$. Necht $\mathcal{B} = (S^{\mathcal{B}}, v^{\mathcal{B}}, s_0, F^{\mathcal{B}})$, potom $\mathcal{C} = ((S^{\mathcal{B}} \cup S_0) - s_0, \varphi, S_0, F^{\mathcal{B}}, C_1, \dots, C_n)$, kde $S_0 = \{s_j^0 : j = 1, \dots, n\}$ a φ volíme takto:

- Jestliže $s_i \in S^{\mathcal{B}} - s_0, (s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v^{\mathcal{B}}$, pak $\varphi(s_i, x) = s_j, s_i \in C_k$;
- jestliže $s_0^k \in S_0, (s_0, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v^{\mathcal{B}}$, pak $\varphi(s_0^k, x) = s_j, s_0^k \in C_k$.

Zřejmě je $R(\mathcal{C}) = R(\mathcal{B})$ a tedy také $R(\mathcal{C}) = R(\mathcal{A})$ a ukázali jsme tedy, že platí $R(\mathcal{M}_n) \subset R(\mathcal{H}_n)$.



Obr. 1. a)

b)

b) Necht je dán libovolný automat $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n, \mathcal{A} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, \dots, C_n)$. Volme $\mathcal{S} \in \mathcal{M}_n, \mathcal{S} = (S \cup s_0, v, s_0, F)$, kde v je volena takto:

- Jestliže $s_i \in S_0$, potom $(s_0, e^n, s_i) \in v$;
- jestliže $s_i \in S, x \in \Sigma, \varphi(s_i, x) = s_j$ a $s_i \in C_k$, potom $(s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v$.

Zřejmě je $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{S})$, tedy $R(\mathcal{H}_n) \subset R(\mathcal{M}_n)$ a jelikož jsme již dříve dokázali opačnou inkluzi, platí $R(\mathcal{H}_n) = R(\mathcal{M}_n)$.

4a) Necht $\mathcal{A} \in \mathcal{G}_n$ (a tedy také $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_n$), \mathcal{A} je automat nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathcal{A} = (S, \varphi^{\mathcal{A}}, s_0, F, C_1, \dots, C_n)$. Zvolme automat $\mathcal{B} \in \mathcal{H}_n, \mathcal{B}$ nad abecedou Σ ; $\mathcal{B} = (S, \varphi^{\mathcal{B}}, \{s_0\}, F, C_1, \dots, C_n)$, kde $\varphi^{\mathcal{B}}$ je zvolena takto:

jestliže existuje posloupnost stavů s_{j_1}, \dots, s_{j_p} taková, že

$$\varphi^{\mathcal{A}}(s_i, x) = s_{j_1} \quad (x \in \Sigma), \quad \varphi^{\mathcal{A}}(s_{j_k}, e) = s_{j_{k+1}} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, p - 1,$$

potom

$$\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, x) = s_{j_k} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, p.$$

Automat \mathcal{B} může být nedeterminovaný, i když byl \mathcal{A} determinovaný, zřejmě však $R^{\text{mod } e}(\mathcal{A}) = R(\mathcal{B})$ a tedy

$$(11) \quad R^{\text{mod } e}(\mathcal{G}_n) \subset R^{\text{mod } e}(\mathcal{H}_n) \subset R(\mathcal{H}_n).$$

b) Nechť je dán automat $\mathcal{C} \in \mathbf{H}_n$ nad abecedou Σ , $\mathcal{C} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, C_2, \dots, C_n)$. Zvolme automat $\mathcal{D} \in \mathbf{G}_n$ nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathcal{D} = (S^{\mathcal{D}}, \varphi^{\mathcal{D}}, s_0, F, C_1, \dots, C_n)$, kde $S^{\mathcal{D}}$ vznikne rozšířením množiny S takto:

Nechť $s_i \in S$ a x_1, x_2, \dots, x_p jsou všechny prvky ze Σ takové, že $\varphi(s_i, x_j)$ je víceznačné pro $j = 1, 2, \dots, p$. Označme

$$(12) \quad \begin{array}{ll} s_1, s_2, \dots, s_{j_1} & \text{všechny hodnoty } \varphi(s_i, x_1), \\ s_{j_1+1}, s_{j_1+2}, \dots, s_{j_2} & \text{všechny hodnoty } \varphi(s_i, x_2), \\ \vdots & \\ s_{j_{p-1}+1}, s_{j_{p-1}+2}, \dots, s_{j_p} & \text{všechny hodnoty } \varphi(s_i, x_p). \end{array}$$

Pro každé $s_i \in S$ rozšíříme množinu stavů S o nové stavy

$$(13) \quad s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{j_1-1}, s_i^{j_1+1}, s_i^{j_1+2}, \dots, s_i^{j_2-1}, s_i^{j_2+1}, s_i^{j_2+2}, \dots, s_i^{j_p-1},$$

přičemž je-li $s_i \in C_m$, pak $s_i^k \in C_m$ pro všechna k .

Nechť $S_0 = \{s_{q_1}, s_{q_2}, \dots, s_{q_m}\}$. Za počáteční stav s_0 automatu \mathcal{D} volíme stav s_{q_1} .

Přechodovou funkci $\varphi^{\mathcal{D}}$ volíme takto:

(i) Je-li $s_i \in S$, $x \in \Sigma$ a $\varphi(s_i, x)$, je dána jednoznačně, pak

$$\varphi^{\mathcal{D}}(s_i, x) = \varphi(s_i, x).$$

(ii) Nechť $s_i \in (S - S_0) \cup s_{q_m}$ a x_1, \dots, x_p jsou všechny prvky z Σ takové, že $\varphi(s_i, x_j)$ je víceznačná pro $j = 1, 2, \dots, p$. Potom (s využitím označení (12), (13))

$$\varphi^{\mathcal{D}}(s_i, x) = s_i; \varphi^{\mathcal{D}}(s_i, e) = s_i^1; \varphi^{\mathcal{D}}(s_i^k, e) = s_i^{k+1} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, j_1 - 2,$$

$$j_1 + 1, j_1 + 2, \dots, j_2 - 2, j_2 + 1, j_2 + 2, \dots, j_p - 2;$$

$$\varphi^{\mathcal{D}}(s_i^k, e) = s_i^{k+2} \quad \text{pro } k = j_1 - 1, j_2 - 1, j_3 - 1, \dots, j_{p-1} - 1;$$

$$\varphi^{\mathcal{D}}(s_i^k, x_t) = s_i^{k+1} \quad \text{pro } t = 1, 2, \dots, p,$$

$$k = j_{t-1} + 1, j_{t-1} + 1, \dots, j_t - 1$$

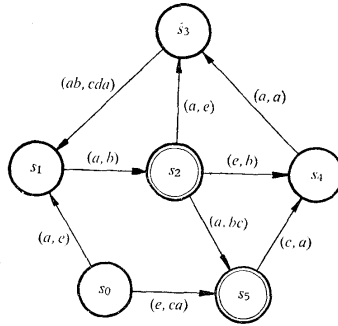
kde $j_0 = 0$.

(iii) Nechť $s_i \in S_0 - s_{q_m}$ ($s_i = s_{q_k}$ pro některé $q_k < m$) a jinak je situace táž jako v bodě (ii). Pak volíme přechodovou funkci tímž způsobem jako v (ii) a navíc ještě položíme

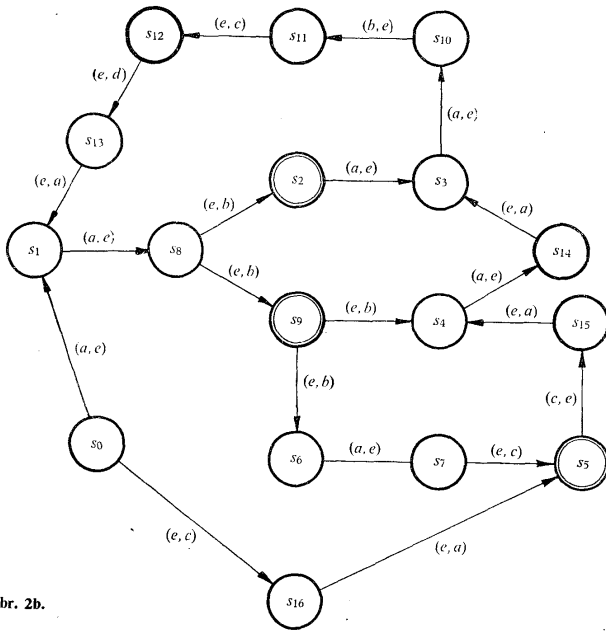
$$\varphi^{\mathcal{D}}(s_i^{j_p-1}, e) = s_{q_{k+1}}.$$

(iv) Jestliže pro $s_{q_k} \in S_0 - s_{q_m}$ a pro všechna $x \in \Sigma$ je $\varphi(s_{q_k}, x)$ dána jednoznačně, pak položíme $\varphi^{\mathcal{D}}(s_{q_k}, e) = s_{q_{k+1}}$.

Popsaná konstrukce je na konkrétním příkladě provedena v příkladě 3 (není jednoznačná).



Obr. 2a.

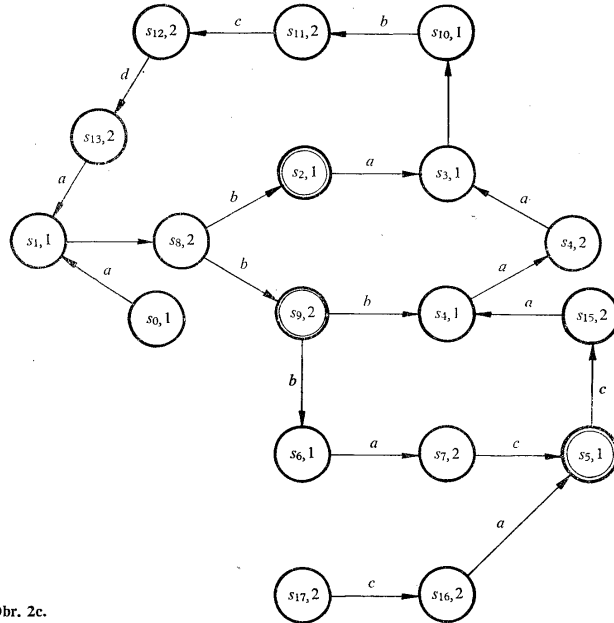


Obr. 2b.

Zřejmě je $R(\mathcal{A}) = R^{\text{mod } e}(\mathcal{A})$ a tedy platí $R(\mathbf{H}_n) \subset R^{\text{mod } e}(\mathbf{G}_n)$ a dohromady s (11) tedy platí

$$R(\mathbf{H}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{H}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{G}_n).$$

Tím je plně dokázána věta 1.



Obr. 2c.

Příklad 2. Nechť je dán automat $\mathcal{A} \in \mathbf{M}_n$, $\mathcal{A} = (\{s_i : 0 \leq i \leq 5\}, \{(s_0, (a, e), s_1), (s_0, (e, ca), s_5), (s_1, (a, b), s_2), (s_2, (a, e), s_3), (s_2, (a, b), s_4), (s_2, (a, bc), s_5), (s_3, (ab, cda), s_1), (s_4, (a, a), s_3), (s_5, (c, a), s_4)\}, s_0, \{s_2, s_5\})$. Diagram automatu \mathcal{A} je na obr. 2a.

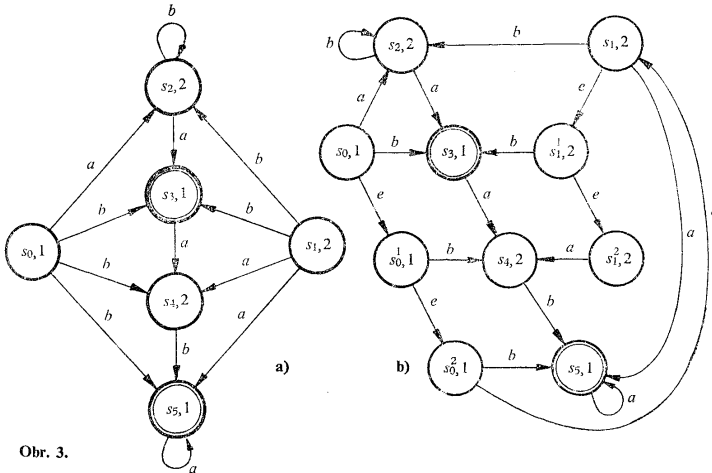
Automat $\mathcal{B} \in \mathbf{M}_n$, $\mathcal{B} = (\{s_i : 0 \leq i \leq 16\}, \{(s_1, (a, e), s_8), (s_2, (a, e), s_3), (s_3, (a, e), s_{10}), (s_4, (a, e), s_{14}), (s_5, (c, e), s_{15}), (s_6, (a, e), s_7), (s_7, (e, c), s_5), (s_8, (e, b), s_2), (s_8, (e, b), s_9), (s_9, (e, b), s_4), (s_9, (e, b), s_6), (s_{10}, (b, e), s_{11}), (s_{11}, (e, c), s_{12}), (s_{12}, (e, d), s_{13}), (s_{13}, (e, a), s_1), (s_{14}, (e, a), s_3), (c_{15}, (e, a), s_4), (s_{16}, (e, a), s_5), s_0, \{s_2, s_5, s_9\})$, splňuje podmínku (i) z lemmatu 1 a je $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{B})$. Uvedený automat \mathcal{B} je jedno-

dušší než automat, který by vyšel konstrukcí podle důkazu lemmatu 1. Diagram automatu \mathcal{B} je na obr. 2b.

Automat $\mathcal{C} \in H_n$, $\mathcal{C} = (\{s_i : 0 \leq i \leq 17\}, \varphi, \{s_0, s_{17}\}, \{s_2, s_5, s_9\}, \{s_i : 0 \leq i \leq 6 \vee i = 10\}, \{s_i : 7 \leq i \leq 9 \vee 11 \leq i \leq 17\})$ dostaneme z automatu \mathcal{B} konstrukcí podle důkazu věty 1 (část 3a) a platí tedy $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{B}) = R(\mathcal{C})$. Diagram automatu \mathcal{C} je na obr. 2c.

Tabulka 1.

	<i>a</i>	<i>b</i>
s_0	$\{s_2\}$	$\{s_3, s_4, s_5\}$
s_1	$\{s_4, s_5\}$	$\{s_2, s_3\}$
s_2	$\{s_3\}$	$\{s_2\}$
s_3	$\{s_4\}$	—
s_4	—	$\{s_5\}$
s_5	$\{s_5\}$	—



Obr. 3.

Příklad 3. Necht' je dán automat $\mathcal{C} \in H_n$, $\mathcal{C} = (\{s_i : 0 \leq i \leq 5\}, \varphi^{\mathcal{C}}, \{s_0, s_1\}, \{s_3, s_5\}, \{s_0, s_3, s_5\}, \{s_1, s_2, s_4\})$, kde $\varphi^{\mathcal{C}}$ je dána tabulkou 1. Diagram automatu \mathcal{C} je na obr. 3a.

Konstrukcí podle důkazu věty 1 (část 4b) dostaneme automat $\mathcal{D} \in \mathbf{G}_n$ nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, pro který je $R^{\text{mod } e}(\mathcal{D}) = R(\mathcal{G})$.

$\mathcal{D} = (\{s_0, s_0^1, s_0^2, s_1, s_1^1, s_1^2, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \varphi^{\mathcal{D}}, s_0, \{s_3, s_5\}, \{s_0, s_0^1, s_0^2, s_3, s_5\}, \{s_1, s_1^1, s_1^2, s_2, s_4\})$, kde $\varphi^{\mathcal{D}}$ je dána tabulkou 2. Diagram automatu \mathcal{D} je na obr. 3b.

Tabulka 2.

	a	b	e
s_0	s_2	s_3	s_0^1
s_0^1	—	s_4	s_0^2
s_0^2	—	s_5	s_1
s_1	s_5	s_2	s_1^1
s_1^1	—	s_3	s_1^2
s_1^2	s_4	—	—
s_2	s_3	s_2	—
s_3	s_4	—	—
s_4	—	s_5	—
s_5	s_5	—	—

Věta 2. Platí

$$(14) \quad R(\mathcal{S}_n) \subset R(\mathbf{E}_n) \subset R(\mathbf{M}_n),$$

$$(15) \quad R(\mathcal{S}_n) \subset R(\mathbf{G}_n) \subset R(\mathbf{M}_n)$$

a všechny inkluze jsou vlastní.

Důkaz 1. Platnost (14) je ukázána v [5].

2. Nechť $\mathcal{A} \in \mathbf{S}_n$, $\mathcal{A} = (S^{\mathcal{A}}, \varphi^{\mathcal{A}}, s_0^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}})$, pak volme $\mathcal{B} \in \mathbf{G}_n$, $\mathcal{B} = (S^{\mathcal{B}}, \varphi^{\mathcal{B}}, S_0^{\mathcal{B}}, F^{\mathcal{B}}, C_1, C_2, \dots, C_n)$ takto:

Označme Ω množinu všech slov (včetně prázdného) délky nejvýše $n - 1$ nad abecedou Σ . Položme $S^{\mathcal{B}} = S^{\mathcal{A}} \times \Omega$ a jestliže $\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, x_1, x_2, \dots, x_n) = s_j$, potom volme $\varphi^{\mathcal{A}}((s_i, x_1 \dots x_k), x_{k+1}) = (s_i, x_1 \dots x_{k+1})$ pro $k = 0, 1, \dots, n - 2$ (pro $k = 0$ je $x_1 \dots x_k$ prázdné slovo);

$$\varphi^{\mathcal{A}}((s_i, x_1 \dots x_{n-1}), x_n) = (s_j, e) \text{ (} e \text{ zde označuje prázdné slovo).}$$

Dále položme $S_0^{\mathcal{B}} = (s_0^{\mathcal{A}}, e)$; $F^{\mathcal{B}} = \{(s_i, e) : s_i \in F^{\mathcal{A}}\}$; $C_1 = \{(s_i, e) : s_i \in S^{\mathcal{A}}\}$, $C_k = \{(s_i, x_1 \dots x_{k-1}) : s_i \in S^{\mathcal{A}}\}$ pro $k = 2, 3, \dots, n$.

Zřejmé je $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{B})$, čímž je dokázána inkluze $R(\mathcal{S}_n) \subset R(\mathbf{G}_n)$. Že tato inkluze je vlastní, ukazuje příklad $R_1 = \{a \oplus e^{n-1}\} \in R(\mathbf{G}_n)$, $R_1 \notin R(\mathcal{S}_n)$.

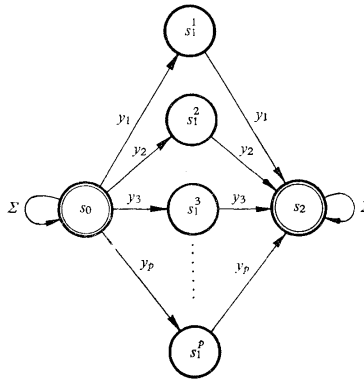
3. Nechť $\mathcal{D} \in \mathbf{G}_n$, pak je také $\mathcal{D} \in \mathbf{H}_n$ a tedy $R(\mathbf{G}_n) \subset R(\mathbf{H}_n)$, protože podle věty 1 je $R(\mathbf{H}_n) = R(\mathbf{M}_n)$ je také $R(\mathbf{G}_n) \subset R(\mathbf{M}_n)$.

Relace $R_2 = \{(\sigma\pi, \pi) : \sigma \in \Sigma^*, \pi \in \Sigma^*\}$ ukazuje, že tato inkluze je vlastní pro $n = 2$ ($R_2 \in R(\mathbf{H}_2)$, $R_2 \notin R(\mathbf{G}_2)$). Sestrojíme automat $\mathcal{F} \in \mathbf{H}_2$, pro který $R_2 = R(\mathcal{F})$.

Nechť $\Sigma = (y_1, \dots, y_p)$; $\mathcal{F} = (\{s_0, s_1^k, s_2; k = 1, 2, \dots, p\}, \varphi, \{s_0\}, \{s_0, s_2\}, \{s_0, s_2\}, \{s_1^k : k = 1, 2, \dots, p\})$, kde φ je víceznačná přechodová funkce zadaná takto:

$$\begin{aligned} \varphi(s_0, y_k) &= s_0 \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, p; \\ \varphi(s_0, y_k) &= s_1^k \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, p; \\ \varphi(s_1^k, y_k) &= s_2 \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, p; \\ \varphi(s_2, y_k) &= s_1^k \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Diagram automatu \mathcal{F} je na obr. 4.



Obr. 4.

Ukážeme, že skutečně $R_2 = R(\mathcal{F})$.

a) Nechť $u \in R_2$, pak $u = (y_{i_1} \dots y_{i_k} y_{j_1} \dots y_{j_m}, y_{j_1} \dots y_{j_m})$. Ukažme, že existuje posloupnost stavů automatu \mathcal{F} požadovaná v definici přijaté n -tice automaty ze třídy H_n . Je to posloupnost stavů

$$(16) \quad \underbrace{s_0, s_0, \dots, s_0}_{i_1 \text{ krát}}, s_1^{i_1}, s_2, s_1^{j_1}, s_2, s_1^{j_2}, \dots, s_1^{j_m}, s_2.$$

b) Naopak ze zadání přechodové funkce φ vyplývá, že automat \mathcal{F} může přejít do koncového stavu pouze po projití posloupnosti stavů tvaru (16), a že tedy $R(\mathcal{F})$ je tvořena právě dvojicemi tvaru $(\sigma\pi, \pi)$, kde $\sigma, \pi \in \Sigma^*$.

Ukážeme ještě, že $R_2 \notin R(\mathcal{G}_2)$.

Platí $(y_1, e) \in R_2, (y_1, y_1) \in R_2, (y_1 y_1, e) \in R_2$. Předpokládejme, že existuje automat $\mathcal{Z} \in \mathcal{G}_2$ takový, že $R_2 = R(\mathcal{Z})$. $\mathcal{Z} = (S, \varphi, s_0, F, C_1, C_2)$. Z toho, že $(y_1, y_2) \in R(\mathcal{Z})$ plyne $\varphi(s_0, y_1) \in C_2$, a z toho, že $(y_1 y_1, e) \in R(\mathcal{Z})$ plyne $\varphi(s_0, y_1) \in C_1$, což je spor, neboť $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

$$R(\mathbf{M}_n) \supset R(\mathbf{N}_n) = R^{\text{mod}} e(\mathbf{N}_n) = R^{\text{mod}} e(\mathbf{D}_n) \supset R(\mathbf{D}_n).$$

Obě inkluze jsou vlastní.

Důkaz 1. Nechť $\mathcal{A} \in \mathbf{N}_n$, $\mathcal{A} = (S, \varphi, S_0, F, C_1, \dots, C_n)$. Nechť $F = \{s_i : i \in M\}$ označme $F' = \{s'_i : i \in M\}$ a sestrojme automat $\mathcal{B} \in \mathbf{M}_n$, $\mathcal{B} = (S \cup F' \cup s_0, v, s_0, F \cup F')$, přičemž předpokládáme, že S, F' a $\{s_0\}$ jsou po dvou disjunktní množiny a v volíme takto:

- (i) jestliže $s_j \in S_0$, potom $(s_0, e^n, s_j) \in v$;
- (ii) jestliže $s_i \in C_k$, $\varphi(s_i, x) = s_j$, potom $(s_i, e^{k-1} \oplus x \oplus e^{n-k}, s_j) \in v$;
- (iii) jestliže $s_i \in C_k$, $s_i \in F$, potom $(s_i, (y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_{k-1}}, e, y_{j_{k+1}}, \dots, y_{j_n}), s'_i) \in v$
a $(s'_i, (y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_{k-1}}, e, y_{j_{k+1}}, \dots, y_{j_n}), s'_i) \in v$ pro libovolná
 $y_{j_1}, \dots, y_{j_{k-1}}, y_{j_{k+1}}, \dots, y_{j_n} \in \Sigma \cup \{e\}$.

Ukážeme, že $R(\mathcal{A}) = R(\mathcal{B})$.

a) Nechť n -tice $\mathbf{u} \in R(\mathcal{A})$, $\mathbf{u} = (x_{11}, \dots, x_{1m_1}, x_{21}, \dots, x_{2m_2}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nm_n})$. Potom podle definice n -tic přijatých automatem ze třídy \mathbf{N}_n existuje posloupnost stavů s_1, \dots, s_t , tak, že jsou splněny podmínky (1.1)–(1.3).

Nechť $Q_k = \{i : 1 \leq i \leq k, u_i = k\}$, pak označme $q_k = \max_{i \in Q_k} v_i$ ($i = 0, 1, \dots, t$) je dvojice asociovaných posloupností celých čísel z definice přijatých n -tic třídy \mathbf{N}_n . Je-li $s_i \in C_b$, je $q_b = m_b$, $q_i \leq m_i$ pro $i \neq b$. Z definice automatu \mathcal{B} vyplývá, že n -tice $\mathbf{v} = (x_{11}, \dots, x_{1q_1}, x_{21}, \dots, x_{2q_2}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nq_n})$ je přijata automatem \mathcal{B} , neboť existuje definicí požadovaná posloupnost stavů, a to posloupnost s_0, s_1, \dots, s_t . Dále z definice automatu \mathcal{B} vyplývá, že každá n -tice, jejíž počáteční úsek je n -tice \mathbf{v} (počáteční úsek se rozumí po jednotlivých slovech) a která má s \mathbf{v} totéž b -té slovo, je rovněž přijata automatem \mathcal{B} . Zvláštní případ takové n -tice je také n -tice \mathbf{u} . Je tedy $R(\mathcal{A}) \subset R(\mathcal{B})$.

b) Nechť n -tice $\mathbf{u} \in R(\mathcal{B})$. Potom podle definice přijatých n -tic automaty třídy \mathbf{M}_n existuje posloupnost stavů s_0, \dots, s_t taková, že jsou splněny podmínky (5). Z konstrukce automatu \mathcal{B} vyplývá, že existuje $t_1 \leq t$ takové, že $s_i \notin F'$ pro $i \leq t_1$ a $s_i \in F'$ pro $t_1 < i \leq t$ a dále navíc $s_i = s_j$ pro $t_1 < i, j \leq t$. Z definice automatu \mathcal{B} k libovolnému automatu \mathcal{A} pak vyplývá, že posloupnost s_1, \dots, s_t je posloupností stavů, která splňuje podmínky (1) pro to, aby n -tice \mathbf{u} byla přijata automatem \mathcal{A} . Je tedy $R(\mathcal{B}) \subset R(\mathcal{A})$.

Tím je ukázána platnost prvé inkluze zleva.

2. Nechť $\mathcal{P} \in \mathbf{D}_n$ (a tedy také $\mathcal{P} \in \mathbf{N}_n$), $\mathcal{P} = (S, \varphi^{\mathcal{P}}, s_0, F, C_1, \dots, C_n)$, \mathcal{P} je n -páskový automat nad abecedou $\Sigma \cap \{e\}$. Sestrojme $\mathcal{Q} \in \mathbf{H}_n$ (automat nad abecedou Σ), $\mathcal{Q} = (S, \varphi^{\mathcal{Q}}, s_0, F, C_1, \dots, C_n)$, kde $\varphi^{\mathcal{Q}}$ je definována pouze na $S \times \Sigma$ a to takto:

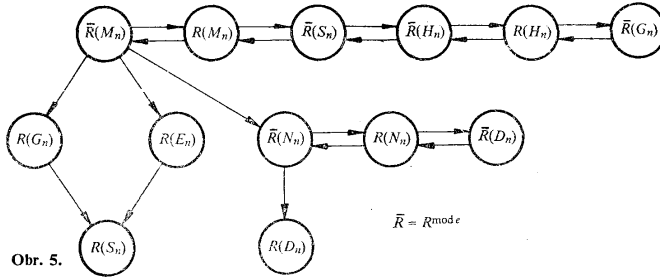
Jestliže existuje posloupnost stavů s_{j_1}, \dots, s_{j_p} ; $p \geq 1$ taková, že $\varphi^{\sigma}(s_i, x) = s_{j_k}$, $(x \in \Sigma)$ a $\varphi^{\sigma}(s_{j_k}, e) = s_{j_{k+1}}$ pro $k = 1, 2, \dots, p - 1$, potom $\varphi^{\sigma}(s_i, x) = s_{j_k}$ pro $k = 1, 2, \dots, p$. Zřejmě $R^{\text{mod } e}(\mathcal{S}) = R(\mathcal{D})$, čímž je ukázáno, že $R^{\text{mod } e}(\mathbf{D}_n) \subset R^{\text{mod } e}(\mathbf{N}_n) \subset R(\mathbf{N}_n)$.

3. Důkaz rovnosti $R(\mathbf{N}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{N}_n)$ je zcela obdobný důkazu rovnosti $R(\mathbf{H}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{H}_n) = R^{\text{mod } e}(\mathbf{G}_n)$ z věty 1. Platnost druhé inkluze je zcela zřejmá, zbývá nám tedy ještě ukázat, že inkluze jsou vlastní.

4. Inkluze $R(\mathbf{M}_n) \supset R(\mathbf{N}_n)$ je vlastní, neboť do $R(\mathbf{N}_n)$ nepatří žádná konečná relace, viz [4], zatím co do $R(\mathbf{M}_n)$ patří všechny konečné n -členné relace.

5. Necht $\mathcal{S} \in \mathbf{N}_2$ nad abecedou $\Sigma = \{y_1, \dots, y_p\}$, $p \geq 1$, $\mathcal{S} = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi, \{s_0\}, \{s_1, s_2\}, \{s_0, s_1\}, \{s_2\})$, kde víceznačná přechodová funkce φ je dána takto: $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_0, a) = s_2$, $(a \in \Sigma)$. Zřejmě $R(\mathcal{S}) = \{(a, \sigma), (\sigma, a) : a \in \Sigma, \sigma \in \Sigma^*, a \text{ pevné}, \sigma \text{ libovolné}\}$.

Zřejmě neexistuje $\mathcal{T} \in \mathbf{D}_2$ takový, aby $R(\mathcal{S}) = R(\mathcal{T})$ a tedy inkluze $R(\mathbf{D}_n) \subset R(\mathbf{N}_n)$ je pro $n = 2$ vlastní. Zcela obdobně i pro $n > 2$.



Obr. 5.

Inkluze a rovnosti dokázané ve větách 1–3 jsou znázorněny orientovaným grafem na obr. 5. Existuje-li dráha z uzlu odpovídajícího třídě relací K_1 do uzlu odpovídajícího třídě relací K_2 , potom $K_1 \supset K_2$. Ukážeme ještě, že další inkluze mezi uvažovanými třídami již neexistují.

Věta 4. Jestliže v grafu znázorněném na obr. 5 nelze spojit dva uzly drahou, potom mezi třídami relací, které jim odpovídají, není vztah inkluze.

Důkaz. Stačí ukázat, že existují relace:

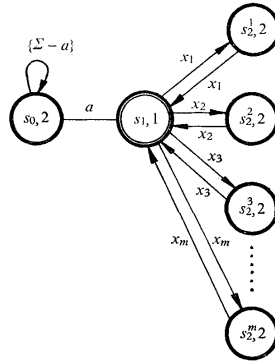
- R_1 , kde $R_1 \in R(\mathbf{S}_n)$ a $R_1 \notin R(\mathbf{N}_n)$;
- R_2 , kde $R_2 \in R(\mathbf{D}_n)$ a $R_2 \notin R(\mathbf{G}_n)$;
- R_3 , kde $R_3 \in R(\mathbf{D}_n)$ a $R_3 \notin R(\mathbf{E}_n)$;
- R_4 , kde $R_4 \in R(\mathbf{G}_n)$ a $R_4 \notin R(\mathbf{E}_n)$;
- R_5 , kde $R_5 \in R(\mathbf{E}_n)$ a $R_5 \notin R(\mathbf{G}_n)$.

Všechny příklady budeme uvádět pouze pro binární relace.

1. Za R_1 lze volit kteroukoliv konečnou binární relaci, neboť jak ukázal např. Ginsburg [6], nepatří žádná konečná neprázdná relace do $R(\mathbf{D}_n)$.

$$2. \quad R_2 = \{(a^n, b^n\sigma) : n = 0, 1, \dots; a, b \in \Sigma; \sigma \in \Sigma^*\}$$

Sestrojíme automat $\mathcal{A} \in \mathbf{D}_2$, $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \varphi, s_0, \{s_0\}, \{s_1\})$, kde $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, b) = s_0$. Zřejmě $R_2 = R(\mathcal{A})$. Ukažme, že neexistuje automat $\mathcal{B} \in G_2$, pro který $R_1 = R(\mathcal{B})$. Předpokládejme, že takový automat $\mathcal{B} = (S, \psi, s_0^\beta, F, C_1, C_2)$ existuje.



Obr. 6.

Jelikož dvojice slov $(e, b) \in R_2$ musí nutně $s_0^\beta \in C_2$ a $\psi(s_0^\beta, b) = s_i$ pro nějaké $s_i \in S$. Z toho, že $(a, b) \in R_2$, dostáváme, že nutně $s_i \in C_1$, avšak protože $(e, ba) \in R_2$ má být $s_i \in C_2$, což je spor. R_2 má tedy požadované vlastnosti.

$$3. \quad R_3 = \{(\pi, \sigma a \pi \varrho) : a \in \Sigma, \sigma \in (\Sigma - a)^*, \pi \in \Sigma^*, \varrho \in \Sigma^*\}.$$

Nechť $\Sigma = \{x_i : i = 1, \dots, m\}$. Sestrojíme automat $\mathcal{C} \in \mathbf{D}_2$, $\mathcal{C} = (\{s_0, s_1; s_2^i; i = 1, 2, \dots, m\}, \varphi, s_0, \{s_1\}, \{s_2^i; i = 1, 2, \dots, m\})$, kde $\varphi(s_0, x) = s_0$, pro $x \in \Sigma - a$, $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, x_i) = s_2^i$, $\varphi(s_2^i, s_i) = s_1$. Diagram automatu \mathcal{C} je na obr. 6. Konečné stavy budeme na diagramech vyznačovat dvojitým kroužkem.

Zřejmě je $R_3 = R(\mathcal{C})$. Ze neexistence automatu \mathcal{D} , $\mathcal{D} \in E_2$, $R_3 = R(\mathcal{D})$ vyplývá z toho, že automaty z této třídy berou vstupní symboly zároveň z obou pásek a takový automat by si musel „pamatovat“ vždy vstupní symboly z první pásky, dokud se na druhé neobjeví symbol a . Jelikož symbol a může na druhé páse předcházet libovolně dlouhé slovo, musel by takový automat mít nekonečnou paměť (nekonečný počet stavů).

$$4. \quad R_4 = \{(\pi, \sigma a \pi) : a \in \Sigma, \sigma \in (\Sigma - a)^*, \pi \in \Sigma^*\}.$$

Relaci R_4 reprezentuje tentýž automat jako relaci R_3 , ovšem chápaný nyní jako automat ze třídy \mathbf{G}_2 (s příslušnou definicí přijatých n -tic). Důvody, proč $R_4 \notin R(\mathbf{E}_2)$, jsou tytéž jako pro to, že $R_3 \notin R(\mathbf{E}_2)$.

$$5. \quad R_5 = \{(a, e), (e, b)\}.$$

Sestrojíme automat $\mathcal{F} \in \mathbf{E}_2$; $\mathcal{F} = (\{s_0, s_1\}, \varphi, s_0, \{s_1\})$, kde $\varphi(s_0, (a, e)) = s_1$, $\varphi(s_0, (e, b)) = s_1$. Zřejmě $R_5 = R(\mathcal{F})$. Že neexistuje automat \mathcal{X} , pro který $R(\mathcal{X}) = R_5$, vyplývá z toho, že jeho počáteční stav by musel patřit do oboru tříd rozkladu stavů, což je spor.

Tím je tedy plně dokázána věta 4.

3. UZAVŘENOST TŘÍD RELACÍ VŮČI BOOLEOVSKÝM A KLEENEHO OPERACÍM

Budeme vyšetřovat uzavřenost výše zavedených tříd relací vůči sjednocení, průniku, doplňku, sčítání a iteraci. Budeme uvažovat jen ty případy, které dosud nebyly řešeny v literatuře, a potom je spolu se známými výsledky ([4], [5], [6]) přehledně uvedeme v tab. 5. Důkazy a protipříklady budeme uvádět (právě tak jako v literatuře) pouze pro binární relace, zřejmě je však lze lehce zobecnit.

Lemma 2. *Nechť $R \in R(\mathbf{H}_n)$ (speciálně $R \in R(\mathbf{G}_n)$). Pak množina slov M ,*

$$M = \{p : p \in \Sigma^*, \text{ existují } p_i \in \Sigma^* \text{ pro } i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n, \\ \text{tak, že } (p_1, \dots, p_{k-1}, p, p_{k+1}, \dots, p_n) \in R\},$$

je regulárním jazykem.

Poznámka. Pro ostatní třídy automatů je obdobné tvrzení dokázáno v literatuře ([5], [6]).

Důkaz. Nechť $R = R(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \in \mathbf{N}_n$, $\mathcal{A} = (S, \varphi^{\mathcal{A}}, S_0, F, C_1, \dots, C_n)$. Volme obyčejný (1-páskový) automat \mathcal{B} nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathcal{B} = (S \cup \{s_0\}, \varphi^{\mathcal{B}}, s_0, F)$ ($s_0 \notin S$ kde $\varphi^{\mathcal{B}}$ (obecně víceznačná) je definována takto:

- (i) jestliže $s_j \in S_0$, potom $\varphi^{\mathcal{B}}(s_0, e) = s_j$;
- (ii) jestliže $x \in \Sigma$, $s_i \in C_k$, $\varphi^{\mathcal{A}}(s_i, x) = s_j$, potom $\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, x) = s_j$;
- (iii) jestliže $x \in \Sigma$, $s_i \notin C_k$, $\varphi^{\mathcal{A}}(s_i, x) = s_j$, potom $\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, e) = s_j$.

Zřejmě $R^{\text{mod } e}(\mathcal{B}) = M$ (jednočlenná relace). Z věty 3 víme, že $R^{\text{mod } e}(\mathbf{N}_n) = R(\mathbf{N}_n)$, existuje tedy automat $\mathcal{C} \in \mathbf{N}_n$, takový, že $R^{\text{mod } e}(\mathcal{B}) = R(\mathcal{C}) = M$. Pro $n = 1$, jak je známo z literatury [2], [6], reprezentují však jak determinované, tak i nedeterminované automaty regulární jazyky a tedy M je regulární.

Věta 5. *Třída $R(\mathbf{N}_n)$ je uzavřená vůči sjednocení, sřetení a iteraci, není uzavřená vůči průniku a doplňku.*

Důkaz. Necht $\mathcal{A} \in \mathbf{N}_2$, $\mathcal{B} \in \mathbf{N}_2$, $\mathcal{A} = (S^{\mathcal{A}}, \varphi^{\mathcal{A}}, S_0^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}}, C_1^{\mathcal{A}}, C_2^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} = (S^{\mathcal{B}}, \varphi^{\mathcal{B}}, S_0^{\mathcal{B}}, F^{\mathcal{B}}, C_1^{\mathcal{B}}, C_2^{\mathcal{B}})$. Předpokládáme $S^{\mathcal{A}} \cap S^{\mathcal{B}} = \emptyset$.

1. Zvolme $\mathcal{C} \in \mathbf{N}_n$, $\mathcal{C} = (S^{\mathcal{C}} \cup S^{\mathcal{B}}, \varphi^{\mathcal{C}}, S_0^{\mathcal{C}} \cup S_0^{\mathcal{B}}, F^{\mathcal{C}} \cup F^{\mathcal{B}}, C_1^{\mathcal{C}} \cup C_1^{\mathcal{B}}, C_2^{\mathcal{C}} \cup C_2^{\mathcal{B}})$, kde $\varphi^{\mathcal{C}}(s_i, x) = s_j$, jestliže bud $s_i, s_j \in S^{\mathcal{A}}$, $\varphi^{\mathcal{A}}(s_i, x) = s_j$ nebo $s_i, s_j \in S^{\mathcal{B}}$, $\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, x) = s_j$. Zřejmé je $R(\mathcal{C}) = R(\mathcal{A}) \cup R(\mathcal{B})$, a tedy $R(\mathbf{N}_n)$ je uzavřená vůči sjednocení.

2. Necht $F^{\mathcal{A}} = \{s_i : i \in M\}$, pak zvolme $\mathcal{D} \in \mathbf{N}_2$ (nad abecedou $\Sigma \cup \{e\}$, $\mathcal{D} = (S^{\mathcal{D}} \cup S^{\mathcal{B}} \cup F', \varphi^{\mathcal{D}}, S_0^{\mathcal{D}}, F^{\mathcal{D}}, C_1^{\mathcal{D}} \cup C_1^{\mathcal{B}} \cup F'_2, C_2^{\mathcal{D}} \cup C_2^{\mathcal{B}} \cup F'_1)$, kde $F' \stackrel{\text{def}}{=} \{s_i, i \in M\}$, $F'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{s'_i : s'_i \in F', s_i \in C_1\}$, $F'_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{s'_i : s'_i \in F', s_i \in C_2\}$, F' a $S^{\mathcal{B}} \cup S^{\mathcal{D}}$ jsou disjunktní, $\varphi^{\mathcal{D}}$ je definována takto:

- (i) jestliže $s_i, s_j \in S^{\mathcal{A}}$, $x \in \Sigma$, potom $\varphi^{\mathcal{D}}(s_i, x) = s_j$ právě tehdy, jestliže $\varphi^{\mathcal{A}}(s_i, x) = s_j$;
- (ii) jestliže $s_i, s_j \in S^{\mathcal{B}}$, $x \in \Sigma$, potom $\varphi^{\mathcal{D}}(s_i, x) = s_j$ právě tehdy, jestliže $\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, x) = s_j$;
- (iii) jestliže $s_i \in F^{\mathcal{A}}$, $s'_i \in F'$, potom $\varphi^{\mathcal{D}}(s_i, e) = s'_i$ a $\varphi^{\mathcal{D}}(s'_i, x) = s'_i$ pro každé $x \in \Sigma$;
- (iv) jestliže $s'_i \in F'$ a $s_j \in S_0^{\mathcal{B}}$, potom $\varphi^{\mathcal{D}}(s'_i, e) = s_j$.

Ukážeme, že $R^{\text{mod } e}(\mathcal{D}) = R(\mathcal{A}) \cdot R(\mathcal{B})$.

a) Necht $\mathbf{u} \in R^{\text{mod } e}(\mathcal{D})$, $\mathbf{u} = (x_{11} \dots x_{1m_1}, x_{21} \dots x_{2m_2})$, pak musí, podle definice přijatých n -tic automaty třídy \mathbf{N}_2 , existovat posloupnost stavů s_0, \dots, s_t splňující podmínky (1.1)–(1.3). Z konstrukce automatu \mathcal{D} vyplývá, že existuje $t_1 \leq t_2 \leq t$ tak, že $s_0, \dots, s_{t_1} \in S^{\mathcal{A}}$, $s_{t_1+1}, s_{t_1+2}, \dots, s_{t_2} \in F'$, $s_{t_2+1}, s_{t_2+2}, \dots, s_t \in S^{\mathcal{B}}$, přičemž $s_{t_2+1} \in S_0^{\mathcal{B}}$, $s_{t_1+1} = s_{t_1+2} = \dots = s_{t_2}$.

Počáteční úsek \mathbf{u}_1 dvojice \mathbf{u} , který převádí automat \mathcal{D} do stavu s_{t_2} , patří do $R(\mathcal{A})$, neboť jeho počáteční úsek \mathbf{u}_2 převádí automat \mathcal{A} do koncového stavu s_{t_1} a nelíší se od \mathbf{u}_1 v prvním resp. druhém slově dvojice, je-li $s_{t_1} \in C_1$ resp. $s_{t_1} \in C_2$. \mathbf{u}_3 označme dvojici slov, pro kterou $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3$. Z toho, že $s_{t_2+1} \in S_0^{\mathcal{B}}$ a $F^{\mathcal{B}} = F^{\mathcal{D}}$ vyplývá, že $\mathbf{u}_3 \in R(\mathcal{B})$ a tedy $R^{\text{mod } e}(\mathcal{D}) \subset R(\mathcal{A}) \cdot R(\mathcal{B})$.

b) Necht $\mathbf{u} \in R(\mathcal{A}) \cdot R(\mathcal{B})$. Pak existují $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ tak, že $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_1 \in R(\mathcal{A})$, $\mathbf{u}_2 \in R(\mathcal{B})$. Z definice přijatých dvojic automaty třídy \mathbf{N}_2 vyplývá, že existuje počáteční úsek \mathbf{u}_2 dvojice \mathbf{u}_1 (lišící se nejvýše v jednom slově), který převádí automat \mathcal{A} postupně do stavů s_0, \dots, s_{t_1} tak, že jsou splněny podmínky (1.1)–(1.3). Podobně existuje posloupnost s_{t_2}, \dots, s_t stavů automatu \mathcal{B} , splňující podmínky (1.1)–(1.3) pro $\mathbf{u}_3 \in R(\mathcal{B})$. k necht' je rozdíl délky dvojice \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 . Z definice automatu \mathcal{D} pak vyplývá, že posloupnost stavů

$$s_0, s_1, \dots, s_{t_1}, \underbrace{s'_{t_1}, \dots, s'_{t_1}}_{k+1 \text{ krát}}, s_{t_2}, \dots, s_t$$

je posloupností, která splňuje podmínky (1.1)–(1.3) nutné k tomu, aby dvojice \mathbf{u} byla přijata automatem \mathcal{D} . Platí tedy $R(\mathcal{A}) \cdot R(\mathcal{B}) \subset R^{\text{mod } e}(\mathcal{D})$.

Jelikož podle věty 1 je $R^{\text{mod } e}(\mathbf{N}_2) = R(\mathbf{N}_2)$, je tím ukázána uzavřenost třídy $R(\mathbf{N}_2)$ vůči sřetení.

3. Zvolme $\mathcal{X} \in \mathbf{N}_2$, $\mathcal{X} = (S^{\mathcal{A}} \cup F', \varphi^{\mathcal{X}}, S_0^{\mathcal{A}}, F^{\mathcal{A}}, C_1^{\mathcal{A}} \cup F'_2, C_2^{\mathcal{A}} \cup F'_1)$, kde F', F'_1, F'_2 mají též význam jako výše a $\varphi^{\mathcal{X}}$ je definována takto:

- (i) jestliže $s_i, s_j \in S^{\mathcal{A}}$, $x \in \Sigma$ a $\varphi^{\mathcal{A}}(s_i, x) = s_j$, pak $\varphi^{\mathcal{X}}(s_i, x) = s_j$;
- (ii) jestliže $s_i \in F^{\mathcal{A}}$, $s'_i \in F'$, potom $\varphi^{\mathcal{X}}(s_i, e) = s'_i$;
- (iii) jestliže $s'_i \in F'$, potom $\varphi^{\mathcal{X}}(s'_i, x) = s'_i$ pro libovolné $x \in \Sigma$;
- (iv) jestliže $s'_i \in F'$, $s_j \in S_0^{\mathcal{A}}$, potom $\varphi^{\mathcal{X}}(s'_i, e) = s_j$.

Analogicky jako v případě sřetení se dá ukázat, že $R^{\text{mod } e}(\mathcal{X}) = R(\mathcal{A})^*$. Protože podle věty 1 je $R^{\text{mod } e}(\mathbf{N}_2) = R(\mathbf{N}_2)$, je tím ukázána uzavřenost třídy $R(\mathbf{N}_2)$ vůči iteraci.

4. Zvolme automaty $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbf{N}_2$

$$\mathcal{L}_1 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi, \{s_0\}, \{s_2\}, \{s_0, s_2\}, \{s_1\});$$

$$\mathcal{L}_2 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi, \{s_0\}, \{s_2\}, \{s_0\}, \{s_1, s_2\});$$

kde φ je dána takto: $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, b) = s_2$.

Jejich diagramy jsou na obr. 7a,b. Zřejmě $R(\mathcal{L}_1) = \{(a, b\sigma) : a, b \in \Sigma, \sigma \in \Sigma^*\}$; $R(\mathcal{L}_2) = \{(a\sigma, b) : a, b \in \Sigma, \sigma \in \Sigma^*\}$; $R(\mathcal{L}_1) \cap R(\mathcal{L}_2) = \{(a, b)\}$, avšak do $R(\mathbf{N}_2)$ nepatří žádná konečná relace, což se ukáže stejně jako pro $R(\mathbf{D}_2)$ ([6]). Tedy $R(\mathbf{N}_2)$ není uzavřená vůči průniku.



Obr. 7.

5. Předpokládejme, že třída $R(\mathbf{N}_2)$ je uzavřená vůči doplňku. Jelikož je uzavřená vůči sjednocení, vyplývalo by z toho, že je uzavřená i vůči průniku, a to je spor. Tedy není uzavřená vůči doplňku.

Věta 6. Třída $R(\mathbf{G}_n)$ není uzavřená vůči sjednocení, doplňku, sřetení a iteraci.

Důkaz. Jestliže $R \in R(\mathbf{G}_2)$, potom zřejmě nemůže současně $(a, e) \in R$ a $(e, b) \in R$, neboť v tom případě by počáteční stav s_0 musel patřit do obou tříd rozkladu stavů, což není možné.

1. Zvolme $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbf{G}_2$; $\mathcal{P}_1 = (\{s_0, s_1\}, \varphi^1, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_0\}, \{s_1\})$, kde φ^1 je dána takto: $\varphi^1(s_0, a) = s_1$; $\mathcal{P}_2 = (\{s_0, s_1\}, \varphi^2, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_1\}, \{s_0\})$, kde φ^2 je dána takto: $\varphi^2(s_0, b) = s_1$.

342 Zřejmě je $R(\mathcal{P}_1) = \{(e, e), (a, e)\}$; $R(\mathcal{P}_2) = \{(e, e), (e, b)\}$; sjednocení $R(\mathcal{P}_1) \cup R(\mathcal{P}_2)$ nepatří do $R(\mathbf{G}_2)$, neboť obsahuje jak dvojici (a, e) , tak (e, b) (viz výše). Tedy $R(\mathbf{G}_2)$ není uzavřená vůči sjednocení.

2. Předpokládejme, že $R(\mathbf{G}_2)$ je uzavřená vůči doplňku. Jelikož relace tvořená prázdnou množinou dvojic je reprezentovatelná (každým automatem s prázdnou množinou koncových stavů), musel by též její doplněk, tj. množina všech dvojic slov nad abecedou Σ , být reprezentovatelný. Do této množiny dvojic však patří dvojice (a, e) i (e, b) , což je spor.

Tabulka 3.

	a	b	c
s_0	—	s_1	s_2
s_1	s_0	—	—
s_2	—	—	s_2

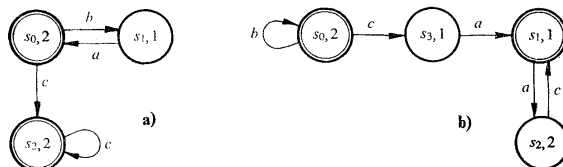
Tabulka 4.

	a	b	c
s_0	—	s_0	s_3
s_1	s_2	—	—
s_2	—	—	s_1
s_3	s_1	—	—

3. Zvolme $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbf{G}_2$;

$$\mathcal{X}_1 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \varphi^1, s_0, \{s_0, s_2\}, \{s_1\}, \{s_0, s_2\}),$$

$$\mathcal{X}_2 = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \varphi^2, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_1, s_3\}, \{s_0, s_2\}),$$



Obr. 8.

kde φ^1 je dána na tab. 3 a φ^2 na tab. 4.

Diagramy automatů $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ jsou na obr. 8a,b.

Snadno lze nahlédnout, že

$$R(\mathcal{X}_1) = \{(a^n, b^m c^m), n = 0, 1, \dots; m = 0, 1, \dots\},$$

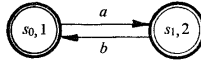
$$R(\mathcal{X}_2) = \{(a^n, b^m c^n), n = 0, 1, \dots; m = 0, 1, \dots\},$$

tedy

$$R(\mathcal{X}_1) \cap R(\mathcal{X}_2) = \{(a^n, b^n, c^n), n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Kdyby relace $R(\mathcal{K}_1) \cap R(\mathcal{K}_2)$ byla representována nějakým automatem z \mathbf{G}_2 , pak by podle lemmatu 2 byl $\{a^n b^n, n = 0, 1, \dots\}$ regulární jazyk, což je zřejmě spor, a \mathbf{G}_2 tedy není uzavřena vůči průniku.

4. Zvolme $\mathcal{Q} \in \mathbf{G}_2$, $\mathcal{Q} = (\{s_2, s_1\}, \varphi, s_0, \{s_0, s_1\}, \{s_0\}, \{s_1\})$, kde $\varphi(s_0, a) = s_1$, $\varphi(s_1, b) = s_0$. (Diagram na obr. 9.)



Obr. 9.

Zřejmě $R(\mathcal{Q}) = \{(a^m, b^n), (a^{m+1}, b^n), m = 0, 1, 2, \dots\}$. Snadno zjistíme, že $R(\mathcal{Q}) \cdot R(\mathcal{Q}) = \{(a^n, b^n), (a^{n+1}, b^n), (a^{n+2}, b^n), n = 0, 1, 2, \dots\}$, $R(\mathcal{Q})^* = \{(a^n, b^m), m = 0, 1, \dots, n \geq m\}$. Tedy do $R(\mathcal{Q}) \cdot R(\mathcal{Q})$ i do $R(\mathcal{Q})^*$ patří jak dvojice (a, b) , tak dvojice (aa, e) . Kdyby existoval automat $\mathcal{S} \in \mathbf{G}_2$, $R(\mathcal{S}) = R(\mathcal{Q})$, $R(\mathcal{Q})$ resp. $R(\mathcal{S}) = R(\mathcal{Q})^*$, musel by zřejmě existovat nějaký jeho stav s_i , pro který $\varphi(s_0, a) = s_i$ a $s_0 \in C_1$. Z $(a, b) \in R(\mathcal{S})$ pak vyplývá nutně $s_i \in C_2$, avšak z $(aa, e) \in R(\mathcal{S})$ vyplývá $s_i \in C_1$, což je spor, neboť $C_1 \cup C_2 = \emptyset$ a třída $R(\mathbf{G}_2)$ tedy není uzavřená vůči sčítání ano vůči iteraci.

Věta 7. *Třída $R(\mathbf{E}_n)$ je uzavřená vůči doplňku.*

Důkaz. Necht' $\mathcal{A} \in \mathbf{E}_n$, $\mathcal{A} = (S, \varphi^{\mathcal{A}}, s_0, F)$. Zvolme $\mathcal{B} = (S \cup \{s'\}, \varphi^{\mathcal{B}}, s_0, (S - F) \cup \{s'\})$, kde $\varphi^{\mathcal{B}}$ je volena takto:

- (i) Jestliže pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\Sigma \cup \{e\})^n$ a $s_i \in S$ je definována funkce $\varphi^{\mathcal{A}}$ a je $\varphi^{\mathcal{A}}(s_i, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_j$, potom $\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s_j$;
- (ii) jestliže pro $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\Sigma \cup \{e\})^n$ a $s_i \in S$ funkce $\varphi^{\mathcal{A}}$ není definována, potom $\varphi^{\mathcal{B}}(s_i, (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s'$;
- (iii) $\varphi^{\mathcal{B}}(s', (x_1, x_2, \dots, x_n)) = s'$ pro každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\Sigma \cup \{e\})^n$. Ukažme, že $R(\mathcal{B}) = (\Sigma^*)^n - R(\mathcal{A})$. Uvažujme libovolnou n -tici $\mathbf{u} = (x_{11} \dots x_{1m_1}, x_{21} \dots x_{2m_2}, \dots, x_{n1} \dots x_{nm_n})$. Mohou nastat tři případy:

1. n -tice \mathbf{u} je přijata automatem \mathcal{A} a tedy existuje posloupnost stavů s_0, s_1, \dots, s_m , kde $m = \max(m_1, \dots, m_n)$ taková, že po doplnění všech slov tvořících n -tici \mathbf{u} prázdňnými symboly na délku m ($x_{ji} = e$ pro $i > m_j$) je (viz (4.1) a (4.2))

$$(i) \quad s_i = \varphi(s_{i-1}, (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(ii) \quad s_m \in F;$$

2. existuje posloupnost stavů s_0, s_1, \dots, s_m splňující podmínku (i), ale $s_m \notin F$;

3. neexistuje posloupnost stavů splňující podmínku (i), to znamená, že existuje posloupnost stavů s_0, s_1, \dots, s_t , $t < m$, pro kterou $s_t = \varphi(s_{t-1}, (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}))$ pro $i = 1, 2, \dots, t$ a $\varphi(s_t, (x_{1t+1}, x_{2t+1}, \dots, x_{nt+1}))$ není definována.

V prvním případě je n -tice u přijata automatem \mathcal{A} , ale není přijata automatem \mathcal{B} , neboť ho převádí do stavu s_m , který nepatří mezi koncové stavy.

Ve druhém případě je tomu naopak, zřejmě $u \notin R(\mathcal{A})$, ale $u \in R(\mathcal{B})$.

Ve třetím případě $u \notin R(\mathcal{A})$, avšak převádí automat \mathcal{B} postupně do stavů $s_0, s_1, \dots, s_r, s', s', \dots, s'$, přičemž s' je koncový stav a tedy $u \in R(\mathcal{B})$.

($m-r$)-krát

Ukázali jsme tedy, že skutečně $R(\mathcal{B})$ je doplňkem $R(\mathcal{A})$ vůči všem n -ticím nad abecedou Σ .

Tabulka 5.

Třídy relací	\cup	\cap	c	.	*
$R(\mathcal{M}_n)$	ano	ne	ne	ano	ano
$R(\mathcal{N}_n)$	ano	ne	ne	ano	ano
$R(\mathcal{D}_n)$	ne	ne	ano	?	?
$R(\mathcal{G}_n)$	ne	ne	ne	ne	ne
$R(\mathcal{E}_n)$	ano	ano	ano	ne	ne
$R(\mathcal{S}_n)$	ano	ano	ne	ano	ano

Věta 8. Třída $R(\mathcal{S}_n)$ je uzavřena vůči sjednocení, průniku, sřetení a iteraci, není uzavřena vůči doplňku.

Důkaz. Automaty ze třídy \mathcal{S}_n lze chápat jako obyčejné (1-páskové) automaty, jejich vstupní symboly jsou zakódovány jako n -tice symbolů z abecedy Σ . Uzavřenost vůči všem uvedeným operacím kromě doplňku vyplývá tedy z uzavřenosti regulárních jazyků vůči těmto operacím, neboť tyto operace zachovávají podmínku, že n -tice se skládají ze stejně dlouhých slov. Naproti tomu doplněk tuto podmínku nezachovává, a tedy vůči doplňku není třída $R(\mathcal{S}_n)$ uzavřena.

Výsledky vět 5–8 spolu s výsledky známými z literatury ([4], [5], [6]) shrneme do přehledné tabulky 5 (c – označuje doplněk).

(Došlo dne 22. listopadu 1966.)

LITERATURA

- [1] Berge C.: Theorie des graphes et ses applications. Paris 1958.
- [2] Čulík Karel: Some notes on finite state languages and events represented by finite automata using labelled graphs. Časopis pro pěstování matematiky 86 (1961), 43–55.
- [3] Čulík Karel, Havel Ivan: On multiple finite automata. (V tisku.)
- [4] Rabin M. O., Scott D.: Finite automata and their decision problems. IBM J. of Research and Development 3 (1959), 115–125.
- [5] Elgot C. C., Mezei J. E.: On finite relations defined by generalised automata. IBM J. of Research and Development 9 (1965), 47–68.
- [6] Ginsburg S.: Mathematical Machine Theory. Addison-Wesley, 1962.

Relations Defined by n -tape Automata

KAREL ČULÍK II

The paper deals with classes of relations defined by n -tape automata. Output-less automata with a given set of terminal states are considered. An automaton decides whether an arbitrary n -tape of words is accepted or not and so defines an n -ary relation. A class of automata \mathbf{D}_n introduced for $n = 2$ in [4] and [6] and its indeterministic version \mathbf{N}_n is considered as well as classes \mathbf{E}_n , \mathbf{S}_n , \mathbf{M}_n introduced in [5] and newly introduced classes \mathbf{G}_n and \mathbf{H}_n .

The class of relation defined by the above classes of automaton are investigated, as well as the classes of relation defined modulo e by n -tape automata. The definition modulo e for relation is analogous to that for languages in [3].

Inclusions of various classes of relation defined by classes of automata and their closure under Boolean and Kleenean operations are examined. The results as to the inclusions, equalities and noninclusions of the classes are presented in a diagram in Fig. 5 and the results as to the closure of these classes are shown in table 5 together with the results known from references [4], [5] and [6].

RNDr Karel Čulík, CSc., Matematická laboratoř ČVUT, Horská 4, Praha 2.