E. S. Kochetkov; Josef Křepela; Milan Ullrich

Оптимальные статистические планы управления для одного типа производственных устройств

Kybernetika, Vol. 1 (1965), No. 5, (421)--430

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124311

KYBERNETIKA ČÍSLO 5, ROČNÍK 1/1965

Оптимальные статистические планы управления для одного типа производственных устройств

Е. С. Кочетков, Й. Кржепела, М. Ульрих

Статья занимается определением нужных выражений для нахождения оптимальных статистических планов управления произведственными объектами.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы будем заниматься определением оптимальных планов управления в случае, когда доля бракованных изделий существенно зависит от состояния производственного уствойства. Новое устройство после ввода его в действие дает лишь незначительную долю бракованных изделий, скажем, p. Если же вследствие случайно возникших повреждений устройство выходит из строя, то все производимые им изделия оказываются бракованными.

В технической практике для этого случая обычно используют планы управления следующего типа. После заданного промежутка времени (например, 1-го часа) берется m последних произведенных изделий (например, $5-10$ штук) и среди них определяется число бракованных. В случае, когда найдется одно или более изделий с браком, устройство считается дефектным и заменяется новым устройством, которое должно выполнять те же функции, что и прежнее устройство.

Такой план выбирается без соответствующего теоретического обоснования. В этой статье рассматриваются планы управления, оптимальные с точки зрения их экономической эффективности. При этом считается, что нам известны вероятностные характеристики устройства: p — вероятность получить бракованное изделие при нормальном функционировании устройства и q — вероятность получить бракованное изделие вследствие отказа устройства.

Мы опишем сейчас модель производственного процесса и его управления в форме, удобной для дальнейших рассуждений. Пусть p и q — любые вещественные числа, $0 \leqq p \leqq 1$, $0 < q < 1$, а $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает лишь два значения 0 или 1 с вероятностями

$$P(\xi_i = 1) = p\,, \quad P(\xi_i = 0) = 1 - p\,; \quad i = 1, 2, \dots$$

Пусть для всякого натурального числа k $\eta_1^k, \eta_2^k, \dots$ — независимые последовательности случайных величин со значениями 0 и 1, образующие марковские цепи с начальным распределением вероятностей

$$P(\eta_1^k = 1) = q\,; \quad P(\eta_1^k = 0) = 1 - q$$

и переходными вероятностями

$$P(\eta_{i+1}^k = 1 \mid \eta_i^k = 0) = q\,; \quad P(\eta_{i+1}^k = 0 \mid \eta_i^k = 0) = 1 - q\,;$$
$$P(\eta_{i+1}^k = 1 \mid \eta_i^k = 1) = 1\,.$$

Пусть (n, m, c) — группа трех неотрицательных чисел, называемая планом управления. Определим последовательности случайных величин $d_0, d_1, d_2, \dots$ и $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ следующим образом:

$$d_0 = 1\,;$$

$$\zeta_i = \max(\xi_i, \eta_i^1)\,; \quad (1 \leqq i \leqq n + m)\,;$$

далее, для любого $k > 1$ и $i = 1, 2, \dots, n + m$ положим

$$d_k = \begin{cases} 0, \text{ если } \sum_{r=1}^{m} \zeta_{(k-1)(n+m)+n+r} \leqq c\,; \\ 1, \text{ если } \sum_{r=1}^{m} \zeta_{(k-1)(n+m)+n+r} > c\,; \end{cases}$$

$$\zeta_{k(n+m)+i} = \max\left(\xi_{k(n+m)+i},\ \eta^j_{l(n+m)+i}\right),$$

где число j определяется из условия $j = \sum_{\nu=0}^{k} d_\nu$, а l при $d_k = 0$ определяется из условия $d_k = 0$, $d_{k-1} = 0, \dots, d_{k-l+1} = 0$, $d_{k-l} = 1$, а при $d_k = 1$ считается равным нулю.

Описанная математическая модель производственного процесса и его управления с помощью плана (n, m, c) отвечает следующей ситуации. Производственный процесс может находиться в одном из двух возможных состояний: нормальном и ненормальном. Если он находится в нормальном состоянии, то вследствие случайных причин то или иное изделие с вероятностью p может оказаться бракованным; если же производственный процесс находится в ненормальном состоянии, то все изделия оказываются бракованными. Для получения информации о состоянии процесса в заранее заданные интервалы времени, например, после изготовления n изделий, определяется число бракованных изделий среди следующих m изделий. Если это число больше, чем c, то принимается решение, что процесс производства находится в ненормальном состоянии. В этом случае устройство заменяется новым. Если окажется, что число бракованных изделий меньше, чем c, то принимается решение, что процесс производства находится в нормальном состоянии. В этом случае производственный процесс продолжается с использованием прежнего устройства.

Основной задачей является нахождение такого плана управления (n, m, c), который был бы с определенной точки зрения оптимальным. В этой статье мы будем заниматься оптимальными планами с двух точек зрения:

(а) средняя доля бракованных изделий должна быть меньше заданного числа P_0 при минималных средних расходах на одно изделие;

(б) расходы на одно изделие должны быть минимальными.

Введем следующие обозначения:

K – расходы, идущие на контроль одного изделия;
Z – потери, обусловленные производством одного бракованного изделия;
R – расходы, идущие на замену производственного устройства новым устройством.

Для определения средних расходов мы должны знать среднее число замен устройства и среднее число бракованных изделий при использовании плана (n, m, c). В следующем параграфе мы определим эти величины, а в § 4 используем их для нахождения оптимальных планов.

3. НАХОЖДЕНИЕ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЗАМЕН УСТРОЙСТВА И СРЕДНЕГО ЧИСЛА БРАКОВАННЫХ ИЗДЕЛИЙ

Для определения среднего числа замен устройства и среднего числа бракованных изделий в первых k периодах управления при заданном плане (n, m, c) нужно знать вероятности α_i, β_i, γ_i, которые для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ определяются соотношениями:

$$\alpha_i = P(d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ \ldots,\ d_i = 0)\,,$$

$$\beta_i = P(d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ \ldots,\ d_{i-1} = 0,\ d_i = 1)\,,$$

$$\gamma_i = P(d_i = 1)\,.$$

 По определению d_1 (см. § 2) имеем

$$\alpha_1 = \sum_{l=0}^{c} P(\sum_{j=1}^{m} \zeta_{n+j} = l) =$$

$$= P(\sum_{j=1}^{m} \zeta_{n+j} = 0) + \sum_{l=1}^{c} P(\sum_{j=1}^{m} \zeta_{n+j} = l) =$$

$$= P(\sum_{j=1}^{m} \zeta_{n+j} = 0) P(\eta_{n+m}^1 = 0) + \sum_{l=1}^{c} P(\sum_{j=1}^{m} \zeta_{n+j} = l,\ \eta_{n+m}^1 = 0) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{c} \sum_{i=1}^{l} P(\sum_{j=1}^{m} \zeta_{n+j} = l,\ \eta_{n+m-i}^1 = 0,\ \eta_{n+m-i+1}^1 = 1) =$$

$$= (1 - q)^{n+m} \sum_{l=0}^{c} P(\sum_{j=1}^{m} \xi_{n+j} = l) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{c} \sum_{i=1}^{l} P(\sum_{j=1}^{m} \xi_{n+j} = l - i)\, q(1 - q)^{n+m-i} =$$

$$= (1 - q)^{n+m} L(m, c, p) + \sum_{i=1}^{c} q(1 - q)^{n+m-i} L(m - i,\ c - i,\ p),$$

где символ L использован для обозначения операционной характеристики

$$L(m, c, p) = \sum_{i=0}^{c} \binom{m}{i} p^i (1 - p)^{m-i}.$$

Обозначая далее

$$A = (1 - q)^{n+m} L(m, c, p),$$

можно легко доказать, что для всякого $i = 1, 2, \ldots$

$$\alpha_i = \alpha_1 A^{i-1}.$$

Очевидно, что $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ и для всякого $i \geqq 2$

$$\alpha_i + \beta_i = \alpha_{i-1},$$

т. е.

$$\beta_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i = \alpha_1 A^{i-2}(1 - A).$$

Определим теперь вероятности γ_i. Для $i = 1$ имеем: $\gamma_1 = \beta_1 = 1 - \alpha_1$. Учитывая независимость последовательностей $\{\eta_i^j\}$ можно доказать, что для $i \geqq 2$

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_j \beta_{i-j} + \beta_i.$$

Решение этого уравнения сводится к решению разностного уравнения

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i(1 + A - \alpha_1) - \gamma_{i-1}(A - \alpha_1).$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$\gamma_i = \frac{A - 1 - \alpha_1[A - \alpha_1]^i}{A - 1 - \alpha_1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Можно также доказать, что это соотношение верно и при $i = 1$.

Среднее число замен устройства после k периодов управления, V_k, равно

$$V_k = M\left[\sum_{i=1}^{k} d_i\right] = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i =$$

$$= \frac{1}{A - 1 - \alpha_1}\left[k(A - 1) - \alpha_1(A - \alpha_1)\frac{(A - \alpha_1)^k - 1}{A - 1 - \alpha_1}\right].$$

В следующей части этого параграфа мы будем заниматься определением среднего числа бракованных изделий в k-ом периоде управления. Для его вычисления определим вероятности

$$P(\zeta_{(k-1)(n+m)+j} = 0)$$

для всех k и j. Имеем для $1 \leqq j \leqq n + m$

$$P(\zeta_j = 0) = P(\xi_j = 0)\,P(\eta_j^1 = 0) = (1 - p)(1 - q)^j$$

и

$$P(\zeta_{(k-1)(n+m)+j} = 0) = (1 - q)^j(1 - p)\sum_{i=0}^{k-1}\gamma_i A^{k-1-i} =$$

$$= \frac{(1 - q)^j(1 - p)}{A - 1 - \alpha_1}\left[(A - \alpha_1)^k - 1\right], \quad \text{где} \quad \gamma_0 = 1.$$

Поэтому среднее число бракованных изделий в k-ом периоде, C_k, равно сумме

$$C_k = \sum_{j=i}^{n+m} P(\zeta_{(k-1)(n+m)+j} = 1) =$$

$$= (n + m) - (1 - q)\frac{1 - (1 - q)^{n+m}}{q}(1 - p)\frac{(A - \alpha_1)^k - 1}{A - 1}.$$

В частном случае, когда $c = 0$, имеем:

$$L(m, 0, p) = (1 - p)^m; \quad A = (1 - q)^{n+m}(1 - p)^m;$$

$$\alpha_i = A^i,$$

$$\beta_i = A^{i-1}(1 - A),$$

$$\gamma_i = 1 - A; \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$V_k = k(1 - A),$$

$$C_k = (n + m) - \frac{1 - q}{q}(1 - p)\left[1 - (1 - q)^{n+m}\right]; \quad k = 1, 2, \ldots$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

В этом параграфе мы будем заниматься определением оптимальных планов управления с точки зрения критериев, введенных в § 2. По k циклам управления средние расходы на одно произведенное изделие определяются следующим соотношением

$$\bar{N}_k = \frac{1}{k(n + m)}\left\{Kkm + Z\sum_{j=1}^{k} C_j + RV_k\right\}.$$

Для заданных k и $(n + m)$ можно определить план (n, m, c) так, чтобы средние расходы $\bar{N}_k$ были минимальными. Этим случаем, интересным с точки зрения практики, мы будем заниматься в одной из следующих статей. Здесь же мы ограничимся лишь рассмотрением стационарного случая, то есть случая, когда $k \to \infty$. Тогда

$$\bar{N}_\infty = \lim_{k\to\infty} \bar{N}_k = \frac{1}{n + m}\left\{Km + Z(n + m) - \right.$$

$$\left. - Z\frac{1 - q}{q}(1 - p)\left[1 - (1 - q)^{n+m}\right]\frac{1}{1 + \alpha_1 - A} + R\frac{1 - A}{1 + \alpha_1 - A}\right\},$$

и средняя доля бракованных изделий равна

$$p_\infty = 1 - \frac{1 - q}{q}\,\frac{(1 - p)\left[1 - (1 - q)^{n+m}\right]}{n + m}\,\frac{1}{1 + \alpha_1 - A}.$$

Определим сейчас план управления для критерия (a). Пусть задано $p_\infty = P_0$ и нужно определить (n, m, c) так, чтобы $\bar{N}_\infty = \min$. В этом случае, очевидно,

$$\bar{N}_\infty = \frac{1}{n + m}\left\{Km + Z(n + m)P_0 + R\frac{1 - (1 - q)^{n+m}L(m, c, p)}{1 + \sum_{i=1}^{c} q(1 - q)^{n+m-i}L(m - i, c - i, p)}\right\}.$$

Полное аналитическое решение можно провести лишь в случае $c = 0$. Тогда $\alpha_1 = A$ и значение P_0 определяет $n + m$ непосредственно из уравнения

$$\frac{1 - (1 - q)^{n+m}}{n + m} = \frac{1 - P_0}{1 - p}\,\frac{q}{1 - q}.$$

С помощью подстановки

$$y = -(n + m)\log(1 - q)$$

это уравнение приводится к виду

$$\frac{1 - e^{-y}}{y} = -\frac{1 - P_0}{1 - p} \frac{q}{1 - q} \frac{1}{\log(1 - q)}.$$

Это уравнение можно решить, используя таблицу 1. Подставляя решение y_0

Таблица 1.

y	$\frac{1-e^{-y}}{y}$	$e^{-y}(1+y)$	y	$\frac{1-e^{-y}}{y}$	$e^{-y}(1+y)$	y	$\frac{1-e^{-y}}{y}$	$e^{-y}(1+y)$	y	$\frac{1-e^{-y}}{y}$	$e^{-y}(1+y)$
0,001	1,0000	1,0000	0,100	0,9517	0,9953	0,200	0,9063	0,9825	0,300	0,8639	0,9631
0,005	0,9976	1,0000	0,105	0,9493	0,9949	0,205	0,9042	0,9816	0,305	0,8619	0,9619
0,010	0,9950	1,0000	0,110	0,9470	0,9944	0,210	0,9020	0,9808	0,310	0,8598	0,9608
0,015	0,9925	0,9999	0,115	0,9446	0,9939	0,215	0,8998	0,9799	0,315	0,8578	0,9597
0,020	0,9901	0,9998	0,120	0,9423	0,9934	0,220	0,8976	0,9791	0,320	0,8558	0,9585
0,025	0,9876	0,9997	0,125	0,9400	0,9928	0,225	0,8955	0,9782	0,325	0,8538	0,9573
0,030	0,9851	0,9996	0,130	0,9377	0,9922	0,230	0,8933	0,9773	0,330	0,8517	0,9562
0,035	0,9827	0,9994	0,135	0,9354	0,9917	0,235	0,8912	0,9764	0,335	0,8497	0,9550
0,040	0,9803	0,9992	0,140	0,9332	0,9911	0,240	0,8891	0,9754	0,340	0,8477	0,9538
0,045	0,9778	0,9990	0,145	0,9309	0,9905	0,245	0,8869	0,9745	0,345	0,8457	0,9526
0,050	0,9754	0,9988	0,150	0,9286	0,9898	0,250	0,8848	0,9735	0,350	0,8437	0,9513
0,055	0,9730	0,9985	0,155	0,9264	0,9892	0,255	0,8827	0,9725	0,355	0,8418	0,9501
0,060	0,9706	0,9983	0,160	0,9241	0,9885	0,260	0,8806	0,9715	0,360	0,8398	0,9488
0,065	0,9682	0,9980	0,165	0,9219	0,9878	0,265	0,8785	0,9705	0,365	0,8378	0,9476
0,070	0,9658	0,9977	0,170	0,9196	0,9871	0,270	0,8764	0,9695	0,370	0,8359	0,9463
0,075	0,9634	0,9973	0,175	0,9174	0,9864	0,275	0,8743	0,9685	0,375	0,8339	0,9450
0,080	0,9611	0,9970	0,180	0,9152	0,9856	0,280	0,8722	0,9674	0,380	0,8319	0,9437
0,085	0,9587	0,9966	0,185	0,9130	0,9849	0,285	0,8701	0,9663	0,385	0,8300	0,9424
0,090	0,9563	0,9962	0,190	0,9107	0,9841	0,290	0,8681	0,9653	0,390	0,8281	0,9411
0,095	0,9540	0,9958	0,195	0,9085	0,9833	0,295	0,8660	0,9642	0,395	0,8261	0,9398
									0,400	0,8242	0,9384

в уравнение для $\bar{N}_\infty$, получим

$$\bar{N}_\infty = \frac{|\log(1 - q)|}{y_0} \left\{ Km + Z \frac{y_0}{|\log(1 - q)|} + R\left[1 - e^{-y_0}(1 - p)^m\right] \right\}.$$

Отсюда следует, что оптимальным является план с $m = 1$.

Определение оптимального плана по критерию (б) ведет к нахождению плана (n, m, c), для которого $\bar{N}_\infty = \min$. Общее аналитическое решение в этом случае также невозможно; поэтому далее мы будем заниматься лишь случаем, когда

 $p = 0$. Тогда для всех m и c $L(m, c, 0) = 1$ и

$$\bar{N}_\infty = \frac{1}{n+m}\left\{Km + Z(n+m) - \frac{[1-(1-q)^{n+m}]\left[Z\frac{1-q}{q} - R\right]}{1 + q\sum_{i=1}^{c}(1-q)^{n+m-i}}\right\}.$$

Для заданных n и m оптимальным является $c = 0$, если $Z(1-q)/q - R > 0$, и $c = m$, если $Z(1-q)/q - R < 0$.

Мы будем заниматься только случаем $Z(1-q)/q - R > 0$; в противном случае дефектное устройство невыгодно заменять новым [$Z(1-q)/q$ — средний доход при замене устройства]. Поэтому

$$\bar{N}_\infty = \frac{1}{n+m}\left\{Km + Z(n+m) - [1-(1-q)^{n+m}]\left[Z\frac{1-q}{q} - R\right]\right\}$$

и оптимальным является план с $m = 1$. Параметр n определяется из условия:

$$\bar{N}_\infty = \frac{1}{n+1}\left\{K + Z(n+1) - [1-(1-q)^{n+1}]\left[Z\frac{1-q}{q} - R\right]\right\} = \min,$$

которое с помощью подстановки

$$y = -(n+1)\log(1-q)$$

сводится к уравнению

$$e^{-y}(1+y) = 1 - \frac{K}{Z\frac{1-q}{q} - R}.$$

Это уравнение можно решить с помощью таблицы 1.

Пример 1. Пусть $p = 0{,}05$; $q = 10^{-3}$; $K = 1$; $Z = 2$; $R = 10^2$; $P_0 = 0{,}10$. Нужно определить оптимальный план $(n, m, 0)$ по критерию (а). На основании прежних рассуждений $m = 1$, а n определяется из уравнения

$$y_0 = -(n+1)\log(1-q),$$

где y_0 есть решение уравнения

$$\frac{1-e^{-y}}{y} = -\frac{1-P_0}{1-p}\frac{q}{1-q}\frac{1}{\log(1-q)} = 0{,}9483.$$

По таблице 1 находим $y_0 = 0{,}107$; поэтому оптимальным является план (106; 1; 0).

Пример 2. Пусть $p = 0$; $q = 10^{-3}$; $K = 1$; $Z = 2$; $R = 10^2$. Нужно определить оптимальный план (n, m, c) по критерию (б). На основании прежних рассуждений $m = 1$, а $c = 0$, так как

$$Z\frac{1-q}{q} - R = 1898 > 0 .$$

Параметр n определяется из уравнения

$$y_0 = -(n+1)\log(1-q) ,$$

где y_0, в свою очередь, есть корень уравнения

$$e^{-y}(1+y) = 1 - \frac{1}{1898} .$$

Следовательно, $y_0 = 0{,}0323$ и оптимальным будет план $(32; 1; 0)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы занимались определением оптимальных планов управления на основе критериев (а) и (б) § 2 для одного типа производственных устройств. Общее аналитическое решение было проведено для $c = 0$ в случае критерия (а) и для $p = 0$ в случае критерия (б). В остальных случаях планы (n, m, c) нужно определять постепенно.

Общей моделью производственного устройства занимался З. Коутский в [2] и с помощью аппарата цепей Макрова определил все нужные вероятности для определения оптимальных планов; эти результаты публикуются в [3].

Наша статья, которая содержит некоторые дальнейшие результаты чем [3], первоначально возникла из общей модели одного из авторов [1] и в применении к статистическому контролю качества продукции привела к специальному случаю модели Коутского.

(Поступило 21 мая 1965 г.)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. С. Кочетков: Анализ восставливаемых систем обнаружения. Автоматика и телемеханика, 1965, № 8.

[2] Z. Koutský: Markowsche Kette und Monte-Carlo-Modelle der Produktion. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto v. Guericke zu Magdeburg (в друку).

[3] Z. Koutský: Feststellung des Kontrollintervalls und des Stichprobenplanes für die Diagramme gut-schlecht. Kybernetika 1 (1965), № 5, 431–460.

Optimální statistické regulační plány pro jistý typ výrobních zařízení

E. S. KOČETKOV, J. KŘEPELA, M. ULLRICH

Práce se zabývá stanovením optimálního regulačního plánu pro výrobní zařízení o kterém předpokládáme, že vyrábí v dobrém stavu daný podíl zmetků p a ve špatném stavu 100% zmetků. Zařízení může přejít z dobrého stavu do špatného s danou pravděpodobností q, ale nemůže se vrátit zpět ze špatného do dobrého stavu.

Hledá se regulační plán: n – počet výrobků, které se nekontrolují, m – počet kontrolovaných výrobků, c – nejvýše přípustný počet zmetků mezi m kontrolovanými výrobky tak, aby průměrné náklady při známých nákladech na kontrolu, na opravu výrobního zařízení a známých ztrátách vzniklých propuštěním zmetku byly co nejmenší a to v případě, že má být zaručen daný výstupní podíl zmetků nebo i bez tohoto požadavku.

Евгений Семенович Кочетков, Институт автоматики и телемеханики АН СССР, Каланчевская 15а, Москва, СССР.
Inž. Josef Křepela, inž. Milan Ullrich, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.