Jan Schuster

Sestrojení tečen jistých křivek rovinných

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 3, R58--R67

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124118

jest

$$p = -a \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha + \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b},$$

$$= \frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{a + b}.$$

Parametr paraboly, mající ohnisko na elipse e v bodě M a dotýkající se elipsy ve dvou bodech, jest

$$2p = \frac{2b_1{}^2}{a + b}, \tag{54}$$

kdež b_1 je délka poloměru elipsy sdruženého s poloměrem OM.

Osa paraboly má rovnici

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = (a - b) \sin \alpha \cos \alpha. \tag{55}$$

Derivujme tuto rovnici podle proměnného parametru α:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = (a - b)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \tag{56}$$

Z rovnic (55), (56) vypočteme

$$x = (a - b) \cos^3 \alpha, \tag{57}$$

$$y = -(a - b) \sin^3 \alpha. \tag{58}$$

Eliminací α z těchto dvou rovnic obdržíme

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a - b)^{\frac{2}{3}}. \tag{59}$$

Tedy obálkou os všech parabol, majících ohnisko na elipse e a dotýkajících se elipsy ve dvou bodech, jest *asteroida.*

Sestrojení tečen jistých křivek rovinných.

Dr. *Jan Schuster.*

1. V ročníku X. na str. 51—54 tohoto časopisu udán jednoduchý vznik některých křivek rovinných. Zde chci podati další příspěvek pro sestrojení tečen, takže potom konstrukce přejde v proložení křivky jistým opsaným polygonem.

Buďte dány dvě křivky procházející počátkem soustavy

$$x = \varphi(t), \; y = t\varphi(t); \; x = \psi(t), \; y = t\psi(t).$$

Na paprsku $y = tx$ přidružme k počátku nový bod dvojpoměrem λ k průsečíkům s danými křivkami jako základním bodům. Hledaný bod je pak určen rovnicí

$$\frac{1-\lambda}{\omega}=\frac{1}{\varphi}-\frac{\lambda}{\psi}, \tag{1}$$

a vyplňuje křivku:

$$x=\omega(t),\ y=t\omega(t).$$

Tečny k těmto třem křivkám v jejich průsečících s paprskem $y=tx$ mají rovnice:

$$y-x\left(t+\frac{\varphi}{\varphi'}\right)=-\frac{\varphi^2}{\varphi'},\ y-x\left(t+\frac{\psi}{\psi'}\right)=-\frac{\psi^2}{\psi'},$$

$$y-x\left(t+\frac{\omega}{\omega'}\right)=-\frac{\omega^2}{\omega'}.$$

Determinant koeficientů těchto tří rovnic jest:

$$\begin{vmatrix} 1, & t+\frac{\varphi}{\varphi'}, & \frac{\varphi^2}{\varphi'} \\ 1, & t+\frac{\psi}{\psi'}, & \frac{\psi^2}{\psi'} \\ 1, & t+\frac{\omega}{\omega'}, & \frac{\omega^2}{\omega'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \frac{\varphi}{\varphi'}, & \frac{\varphi^2}{\varphi'} \\ 1, & \frac{\psi}{\psi'}, & \frac{\psi^2}{\psi'} \\ 1, & \frac{\omega}{\omega'}, & \frac{\omega^2}{\omega'} \end{vmatrix} = \frac{\varphi^2\psi^2\omega^2}{\varphi'\psi'\omega'} \begin{vmatrix} \frac{\varphi'}{\varphi^2}, & \frac{1}{\varphi}, & 1 \\ \frac{\psi'}{\psi^2}, & \frac{1}{\psi}, & 1 \\ \frac{\omega'}{\omega^2}, & \frac{1}{\omega}, & 1 \end{vmatrix},$$

kde druhý výraz vznikl odečtením t-násobného prvního sloupce od druhého, a třetí vytčením třetího členu z každého řádu jako činitele před závorku.

Derivujeme-li rovnici (1), vznikne

$$(1-\lambda)\frac{\omega'}{\omega^2}=\frac{\varphi'}{\varphi^2}-\frac{\lambda\psi'}{\psi^2}.$$

Když tedy v posledním determinantu znásobíme druhý řádek číslem $-\lambda$, přičteme-li k němu první, obdržíme $(1-\lambda)$-násobný třetí, čímž dokázáno vymizení determinantu, a tedy tečny všech tří křivek, sestrojené v bodech ležících na témž paprsku $y=tx$, jdou týmž bodem.

2. Tato věta zobecňuje jistou větu o svazcích kuželoseček. Dána-li kuželosečka

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

budou křivkám φ, ψ odpovídat části obsažené mezi dotykovými body tečen vedených z počátku.

Průseky kuželosečky se sečnou $y=tx$ plynou z rovnice

$$x^2(a+2bt+ct^2)+2x(d+et)+f=0,$$

takže

$$\varphi(t) = \frac{-(d+et) + \sqrt{(d+et)^2 - f(a+2bt+ct^2)}}{a+2bt+ct^2},$$

$$\psi(t) = \frac{-(d+et) - \sqrt{(d+et)^2 - f(a+2bt+ct^2)}}{a+2bt+ct^2}.$$

Geometrické místo bodů dvojpoměru λ bude tedy dáno rovnicemi:

$$\frac{1-\lambda}{\omega} = \frac{a+2bt+ct^2}{-(d+et) + \sqrt{(d+et)^2 - f(a+2bt+ct^2)}} -$$

$$-\lambda \frac{a+2bt+ct^2}{-(d+et) - \sqrt{(d+et)^2 - f(a+2bt+ct^2)}}, \quad y = tx$$

nebo

$$\frac{1}{\omega}(1-\lambda) f(a+2bt+ct^2) = (a+2bt+ct^2) \,.\, [-(d+et)(1-\lambda) -$$

$$-(1-\lambda)\sqrt{(d+et)^2 - f(a+2bt+ct^2)}].$$

Faktor $a + 2bt + ct^2$, jenž odpovídá dvěma přímkám mířícím k úběžným bodům kuželosečky, můžeme vynechati a zbude výraz, který lze uvésti na tvar racionální:

$$(1-\lambda^2)[f + \omega(d+et)^2] = [(d+et)^2 - f(a+2bt+ct^2)]\,\omega^2.$$

Když zavedeme

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \mu, \quad \omega = x, \quad t = \frac{y}{x},$$

vznikne

$$(f + dx + ey)^2 = \mu^2 [(dx+ey)^2 - f(ax^2 + 2bxy + cy^2)].$$

Tedy vidíme, že odpovídá-li jeden oblouk kuželosečky hodnotě

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = +\mu, \text{ t. j. } \lambda = \frac{\mu-1}{\mu+1},$$

odpovídá druhý dvojpoměru plynoucímu z

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = -\mu, \text{ t. j. } \lambda = -\frac{\mu+1}{\mu-1}.$$

Nalezená kuželosečka patří tedy svazku určenému dvojnou přímkou

$$f + dx + ey = 0$$

a křivkou diskriminantní

$$(dx+ey)^2 - f(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0.$$

První z nich je polára dané kuželosečky vzhledem na počátek, druhá pár tečen vedených počátkem, takže všecky kuželosečky patřící k různým μ^2 tvoří svazek, jehož základní body jsou dva páry splývajících bodů.

Vidíme tedy, že pro tyto kuželosečky tečny vedené v průsecích s touž přímkou $y = t\,x$ se protnou v témž bodě poláry příslušné k počátku.

3. Uvažujme obecnou křivku stupně $k + 2$, která má v počátku soustavy bod k-násobný. Její tvar bude

$$v_k = v_{k+1} + v_{k+2}, \tag{2}$$

kde v_k, v_{k+1}, v_{k+2} značí homogenní funkce veličin x, y stupně rovného indexu. Dosadíme-li $y = tx$, vznikne

$$u_k = xu_{k+1} + x^2 u_{k+2},$$

kde $u_h = v_h : x^h$, pro $h = k, k + 1, k + 2$, takže pro souřadnice průseků platí:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2u_{k+2}}\left[-u_{k+1} \pm \sqrt{u^2_{k+1} + 4u_k u_{k+2}}\right].$$

Bod podle obou sdružený s počátkem ve dvojpoměru λ bude:

$$\frac{1-\lambda}{\omega} = \frac{2u_{k+2}}{-u_{k+1} + \sqrt{u^2_{k+1} + 4u_k u_{k+2}}} - \lambda \frac{2u_{k+2}}{-u_{k+1} - \sqrt{u^2_{k+1} + 4u_k u_{k+2}}},$$

nebo když zase zavedeme μ a odstraníme iracionalitu umocněním a také zase funkce v_h za u_k, obdržíme

$$(2v_k - v_{k+1})^2 = \mu^2 (v^2_{k+1} + 4v_k v_{k+2}).$$

Body dvojpoměru λ naplňují křivku stupně $2(k + 1)$, která má v počátku bod $2k$-násobný. Body dvojpoměrů $\frac{\mu - 1}{\mu + 1}$ a $-\frac{\mu + 1}{\mu - 1}$ patří téže křivce.

Průseky této křivky s paprskem $y = tx$ (mimo počátek) mají tečny procházející týmž bodem pro všecky hodnoty μ.

Kdyby diskriminant kvadratické rovnice byl úplný čtverec, t. j.

$$u^2_{k+1} + 4u_k u_{k+2} = \bar{u}^2_{k+1},$$

pak by bylo

$$2v_k - v_{k+1} = \pm \bar{v}_{k+1}.$$

Geometrické místo průseků odpovídajících tečen v bodech téhož paprsku dáno parametricky rovnicemi:

$$y - xt - x\frac{x_1}{x_1'} = -\frac{x_1^2}{x_1'}, \qquad y - xt - x\frac{x_2}{x_2'} = -\frac{x_2^2}{x_2'}.$$

Odtud

$$x\left(\frac{x_2}{x_2'}-\frac{x_1}{x_1'}\right)=\frac{x_2^2}{x_2'}-\frac{x_1^2}{x_2'}$$

nebo

$$x\,x_2^2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)'=x_1^2x_2^2\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)',$$

tedy

$$x\,\frac{(u_{k+1}\,\overline{u}_{k+1})'}{u^2{}_{k+2}}=\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)',$$

$$(y-xt)\,\frac{(u_{k+1}\,\overline{u}_{k+1})'}{-\,u_k\overline{u}_{k+1}}=\frac{\overline{u}_{k+1}}{u_{k+2}}$$

jako parametrické vyjádření křivky.. Vyloučením t z obou těchto rovnic vznikne výraz hledaný.

4. Obrátíme se ke speciálním příkladům. Daná křivka buď stupně čtvrtého a rozpadej se na paraboly

$$y^2=2px,\;\; x^2=2qy,$$

tudíž křivka

$$(y^2-2px)\,(x^2-2qy)=0\equiv 4pqxy=2x^3p+2y^3q+x^2q^2.$$

Odtud

$$v_2=4pqxy,\quad v_3=2\,(x^3p+y^3q),\quad v_4=-\,x^2y^2.$$

Vznikne nová křivka dvojpoměrem λ:

$$[8pqxy-2\,(x^3p+y^3q)]^2=\mu^2\,[4\,(x^3p+y^3q)^2-16pqx^3y^3]=$$
$$=\mu^2 4\,(x^3p-y^3q)^2$$

a rozpadá se na dvě:

$$4pqxy-(x^3p+y^3q)=\pm\,\mu\,(x^3p-y^3q)$$

nebo

$$4pqxy=x^3p\,(1\pm\mu)+y^3q\,(1\mp\mu).$$

Jedna z nich bude list Descartesův, když $p\,(1+\mu)=q\,(1-\mu)$ a

$$\frac{4pq}{p\,(1+\mu)}=3a,$$

takže

$$x^3+y^3=3axy.$$

Druhá je pak

$$p^2x^3+q^2y^3=3apqxy.$$

Když tedy z obou podmínek pro p, q, μ určíme jednu křivku jako list Descartesův, je přidružených křivek ještě počet ∞^1. Neboť, když z první podmínky určíme $4q=3a\,(1+\mu)$, dá druhá $\mu=\dfrac{q-p}{p+q}$, takže $4q=3a\,\dfrac{2q}{p+q}$ nebo $p+q=\frac{3}{2}a.$

Druhou křivku lze bráti za list Descartesův tak přetvořený, že jeho úsečka zvětšena v poměru $\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, pořadnice v poměru $\sqrt[3]{\frac{q}{p}}$.

Tečny všech křivek odpovídajících proměnnému μ při pevných p, q v průsečících s týmž paprskem $y = tx$ jdou týmž bodem, totiž průsečíkem tečen základních parabol

$$x = \frac{2p}{t^2}, \quad y = \frac{2p}{t} \quad \text{a} \quad x = 2qt, \quad y = 2qt^2,$$

tedy bodem, jehož souřadnice hoví rovnicím:

$$2yt = xt^2 + 2p, \quad 2xt = y + 2qt^2.$$

Když se paprsek otáčí, leží tyto průsečíky na křivce 4-ho stupně

$$4\,(x^2 - 2qy)\,(y^2 - 2px) - (4pq - xy)^2 = 0.$$

nebo

$$3x^2y^2 - 8qy^3 - 8px^3 + 24pqxy - 16p^2q^2 = 0.$$

Důsledek: Tečnu v bodě Descartesova listu obdržíme jako spojnici tečen obou základních parabol v jejich průsečících s paprskem spojujícím dvojný bod listu s daným bodem.

5. Ještě jednodušší sestrojení dávají kružnice

$$x^2 + y^2 = 2px, \quad x^2 + y^2 = 2qy.$$

Geometrické místo bodů přidružených bikvadratice

$$(x^2 + y^2 - 2px)\,(x^2 + y^2 - 2qy) = 0 \equiv$$
$$\equiv 4pqxy = (x^2 + y^2)\,2\,(px + qy) - (x^2 + y^2)^2$$

je

$$[8pqxy - 2\,(x^2 + y^2)\,(px + qy)]^2 =$$
$$= \mu^2\,[4\,(x^2 + y^2)^2\,(px + qy)^2 - 16\,(x^2 + y^2)^2\,pqxy]$$

nebo

$$4pqxy - (x^2 + y^2)\,(px + qy) = \pm\ (x^2 + y^2)\,(px - qy),$$

tedy

$$4pqxy = (x^2 + y^2)\,[px\,(1 \pm \mu) + qy\,(1 \mp \mu].$$

Položíme-li

$$p\,(1 + \mu) = a, \quad q\,(1 - \mu) = b, \quad 4pq = c^2,$$

vznikne strofoida

$$c^2xy = (x^2 + y^2)\,(ax + by).$$

Druhá větev nebo přidružená křivka se obdrží z hodnot:

$$(1-\mu^2)\,c^2 = 4ab,$$

tedy

$$\mu = \frac{1}{c}\sqrt{c^2-4ab},\quad p = \frac{ac}{c+\sqrt{c^2-4ab}},\quad q = \frac{ac}{c-\sqrt{c^2-4ab}},$$

což dá:

$$c^2xy = (x^2+y^2)\left[\frac{acx}{c+\sqrt{c^2-4ab}}\,\frac{c-\sqrt{c^2-4ab}}{c} + \right.$$
$$\left. + \frac{bcy}{c-\sqrt{c^2-4ab}}\,\frac{c+\sqrt{c^2-4ab}}{c}\right]$$

nebo

$$4abc^2xy = (x^2+y^2)\,[ax\,(c-\sqrt{c^2-4ab})^2 + by\,(c+\sqrt{c^2-4ab})^2].$$

Průseky základních kružnic s paprskem $y = tx$ jsou

$$x = \frac{2p}{1+t^2},\quad y = \frac{2pt}{1+t^2},\quad \text{resp. } x = \frac{2qt}{1+t^2},\quad y = \frac{2qt^2}{1+t^2}.$$

V nich sestrojené tečny kružnic jsou:

$$x\,(1-t^2) + 2\,ty = 2p,\quad 2tx + y\,(1-t^2) = 2qt^2.$$

Vyloučení parametru t z obou dá jako geometrické místo průseku

$$4\,(y^2+2qy-x^2)\,(y^2+2px-x^2) = [xy + (2p-x)\,(y+2q)]^2$$

nebo

$$(y^2-x^2+2qy)\,(y^2-x^2+2px) = (py-qx+2pq)^2.$$

6. Odtud možná odvodit jednoduchý vztah mezi Neilovou parabolou a kissoidou.

Dioklova kissoida $y^2\,(2a-x) = x^3$ se dá psát parametricky

$$y = tx,\quad x = \frac{2at^2}{1+t^2},$$

takže značíme-li x_1, x_2 úsečky průseků křivek zatím neznámých s paprskem $y = tx$, jež jsou body daného dvojpoměru λ vzhledem na bod kuspidální a průsek s kissoidou, bude se muset rovnice

$$\frac{1+t^2}{2at^2} = \frac{1}{x_1} - \frac{\lambda}{x_2}$$

splnit identicky, což při $\lambda = -1$ vede na harmonický vztah Dioklovy kissoidy ke křivkám

$$x = 2at^2,\ y = 2at^3 \text{ a } x = 2a,\ y = 2at.$$

Vidíme tedy, že k Neilově parabole $x^3 = 2ay^2$ v jejím průseku s přímkou $y = tx$ sestrojená tečna se protne s tečnou sestrojenou k Dioklově kissoidě nebo (při obecném dvojpoměru λ) ke kissoidě

$$x = \frac{2at^2}{1 - \lambda t^2}, \quad y = tx$$

čili

$$x(x^2 - \lambda y^2) = 2ay^2$$

v průseku téže přímky $y = tx$ s přímkou $x = 2a$.

Kdybychom byli vyšli od křivek $y^2 = 2ax$, $x = 2b$, vznikla by dvojpoměrem λ křivka $\frac{1 - \lambda}{x} = \frac{t^2}{2a} - \frac{\lambda}{2b}$, tedy $by^2 - \lambda ax^2 = 2ab(1 - \lambda)x$, což je elipsa v poloze vrcholové. Tečny v odpovídajících bodech elipsy a paraboly se protnou na rovnoběžce s osou y. Kdyby bylo $b = -\lambda a$, vznikne kruh $x^2 + y^2 = 2(a + b)x$.

7. Úvahy, jež vedly na Descartesův list, lze velmi zobecnit převedením do homogenní soustavy.

Základní kuželosečky vztahujme na souřadný trojúhelník, jehož jeden vrchol je v průseku kuželoseček, protější strana ve společné tečně obou a dotykové body její dalšími vrcholy jeho.

Jde tedy o kuželosečky

$$a_{22}x_2^2 - 2a_{13}x_1x_3 = 0, \quad a_{33}x_3^2 - 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

nebo

$$x_2^2 - 2px_1x_3 = 0, \quad x_3^2 - 2qx_1x_2 = 0.$$

Bod oddělený od vrcholu 1 dvojpoměrem λ podle průseků paprsku $x_2 = t_2x_3$ s kuželosečkami, tedy podle bodů

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{t^2}{2p} : t : 1, \quad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{2qt} : t : 1,$$

má souřadnice

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left(\frac{t^2}{2p} - \frac{\lambda}{2qt}\right) : t(1 - \lambda) : (1 - \lambda),$$

tedy naplňuje křivku:

$$2pq(1 - \lambda)x_1x_2x_3 = qx_2^3 - \lambda px_3^3.$$

Průsečíky tečen obou kuželoseček v bodech na paprsku $x_2 = tx_3$, t. j. přímek

$$-2px_1 + 2tx_2 - t^2x_3 = 0, \quad -2qt^2x_1 - x_2 + 2x_3t = 0,$$

naplňují křivku

$$x_1 : x_2 : x_3 = 3t^2 : (2qt^2 + 4pt) : (2p + 4qt^3). \qquad (\alpha)$$

Spojnice jednoho z bodů těch s vrcholem 1 je $x_2 = 2tx_3$.

Její tečna v bodě parametru t jakožto přímka jdoucí třemi body, z nichž dva splývají, jest:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2 & , x_3 \\ 3t^2, & 2qt^4 + 4pt, & 2p + 4qt^3 \\ 6t, & 8qt^3 + 4p, & 12qt^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Když vyloučíme první člen druhého řádku, přičtouce k němu $-\frac{1}{2}t$ násobný třetí řádek, vznikne

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2 & , x_3 \\ 0, & -2qt^4 + 2pt, & 2p - 2qt^3 \\ 6t, & 8qt^3 + 4p & , 12qt^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (\beta)$$

Můžeme tedy krátiti druhý řádek číslem $2(p - qt^3)$, třetí číslem 2. Tím obdržíme

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2 & , x_3 \\ 0, & t & , 1 \\ 3t, & 4qt^3 + 2p, & 6qt^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tato tečna protne paprsek $x_2 = tx_3$ na straně trojúhelníka $x_1 = 0$, neboť přičteme-li $-t$-násobný třetí sloupec k druhému, zbudou v tomto dvě nuly a $2p - 2qt^3$, takže se determinant převede na rovnici $x_1 = 0$.

Reálnému průseku obou kuželoseček různému od vrcholu 1 odpovídá $t = \sqrt[3]{p:q}$. Tento bod leží na křivce (α), i na kuželosečkách, neboť

$$x_2 : x_2 : x_3 = 3\sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}} : 6p\sqrt[3]{\frac{p}{q}} : 6p$$

a pro bod na kuželosečce

$$x_1 : x_2 : x_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{pq^2}} : \sqrt[3]{\frac{p}{q}} : 1,$$

což se snadno zjistí totožným.

Tečna čáry (α) v tomto bodě je dána rovnicí

$$\begin{vmatrix} x_1 & , x_2 & , x_3 \\ 0 & , \sqrt[3]{p:q}, & 1 \\ 3\sqrt[3]{p:q}, & 6p & , 6\sqrt[3]{p^2q} \end{vmatrix} = 0$$

a po rozvinutí

$$0 \,.\, x_1 + 3x_2\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - x_3\sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}} = 0.$$

Splyne tedy s paprsekm $x_2 = tx_3$ při jeho průchodu druhým průsečíkem obou kuželoseček. Tento ostatně anuluje rovnici (β) identicky, jak ukázalo horní odštěpení faktoru $p - qt^3$.

To znamená, že můžeme k průsekům tečen základních kuželoseček v bodech paprsku $x_2 = tx_3$ sestrojit hned tečnu jimi vyplněné čáry jako spojnici onoho průseku s průsekem paprsku s tečnou $x_1 = 0$ a tím dovoluje křivku vepsat do tečnového polygonu.

Jsou-li základní křivky paraboly, jsou tečny rovnoběžné s odpovídajícím paprskem $y = tx$.

Z úplné souměrnosti vztahů obou kuželoseček ke druhému průsečíku a druhé společné vnější tečně plyne, že ke dvěma kuželosečkám patří dvojí kubické křivky s dvojným bodem a dvě bikvadratiky, opsané průsekem sdružených tečen, jejichž tečny se s přidruženým paprskem protnou na společné vnější tečně.

O skupině bodů soukružných na hyperbole.

Dr. *Jan Schuster.*

V ročníku X. str. 129 a násl. jsem udal vztah dotykového bodu a dalšího průseku kruhu s elipsou a hyperbolou. Obecněji ta vlastnost byla vyšetřena ve výroční zprávě Masarykovy čsl. reálky v Praze II na r. 1931.

Zde se chci zabývati touto vlastností obecněji pro hyperbolu:

$$x = a \sec \varphi, \; y = b \operatorname{tg} \varphi.$$

Uvažujeme-li 4 body, které patří úhlům $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ a leží na kružnici, splní se determinant

$$| a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 \sec^2 \varphi, \; a \operatorname{tg} \varphi, \; b \sin \varphi, \; 1 \,| = 0,$$

kde se utvoří ostatní řádky pro argumenty α, β, γ stejně. Když píšeme $a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = a^2 \sec^2 \varphi - a^2$, a přičteme-li čtvrtý sloupec číslem a^2 násobený k prvnímu, možná vytknout v něm $a^2 + b^2$; pak lze sloupce zkrátiti postupně čísly $a^2 + b^2, a, b$. To ukazuje, že vlastnost tato nezávisí na hodnotě poměru a/b, tedy jsou úhly stejné pro všecky afinní hyperboly.

Když znásobíme řádky resp. čísly $\cos^2 \varphi$, $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$, $\cos^2 \gamma$, vznikne determinant o prvcích

$$| \, 1, \; \sin \varphi \cos \varphi, \; \cos \varphi, \; \cos 2\varphi \,| = 0$$

a když druhý znásobíme číslem 2, obdržíme po přeřadění sloupců