Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Sukdol

Drobnosti z geometrie elipsy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 3, R50--R58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124117

Drobnosti z geometrie elipsy.

Dr. *Václav Sukdol*, profesor reálky v Písku.

1. Budiž M $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ bod elipsy $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. V něm sestrojme normálu

$$ax \sin \alpha - by \cos \alpha = (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha \tag{1}$$

a nanesme na ni od bodu M úsečku $\overline{MM_1}$ rovnou délce poloměru elipsy sdruženého s poloměrem $\overline{OM}$. Souřadnice bodu M_1 jsou

$$x_1 = a \cos \alpha \pm \overline{MM_1} \cos \lambda, \qquad y_2 = b \sin \alpha \pm \overline{MM_1} \sin \lambda, \tag{2}$$

kdež λ značí úhel normály (1) s osou x. Poněvadž

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a \sin \alpha}{b \cos \alpha},$$

jest

$$\cos \lambda = \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}, \tag{3}$$

$$\sin \lambda = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}. \tag{4}$$

Poloměr $a_1 = \overline{OM} = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}$ a tedy poloměr s ním sdružený $b_1 = \overline{MM_1} = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$, takže rovnice (3), (4) lze psáti takto:

$$\overline{MM_1} \cos \lambda = b \cos \alpha, \tag{4'}$$

$$\overline{MM_1} \sin \lambda = a \sin \alpha. \tag{5'}$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnic (2), obdržíme

$$x_1 = (a \pm b) \cos \alpha, \qquad y_1 = (a \pm b) \sin \alpha. \tag{6}$$

Geometrickým místem bodu M_1 je tedy kružnice k_1 opsaná kolem středu O elipsy poloměrem $a + b$, resp. kružnice k_2 o středu O a poloměru $a - b$.

2. Z bodu M_1 $[(a + b) \cos \alpha, (a + b) \sin \alpha]$ veďme k elipse tečny

$$\overline{M_1N} \equiv bx \cos \beta + ay \sin \beta - ab = 0, \tag{7}$$

$$\overline{M_1S} \equiv bx \cos \gamma + ay \sin \gamma - ab = 0, \tag{8}$$

při čemž — jak snadno vypočteme řešením rovnice poláry bodu M_1 s rovnicí elipsy — platí

$$\cos\beta = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b^2\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{(a+b)^2 b_1^2 - a^2b^2}}{b_1^2}, \tag{9}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2\sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{(a+b)^2 b_1^2 - a^2b^2}}{b_1^2}, \tag{10}$$

$$\cos\gamma = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b^2\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{(a+b)^2 b_1^2 - a^2b^2}}{b_1^2}, \tag{11}$$

$$\sin\gamma = \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a^2\sin\alpha - \cos\alpha\sqrt{(a+b)^2 b_1^2 - a^2b^2}}{b_1^2}, \tag{12}$$

kdež značí

$$b_1 = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}. \tag{13}$$

Sestrojíme-li v bodě N resp. S normálu elipsy a naneseme-li na ni úsečku $\overline{NN_1}$ resp. $\overline{SS_1}$ rovnou délce poloměru sdruženého s poloměrem $\overline{ON}$ resp. $\overline{OS}$, dospějeme k bodu N_1 $[(a+b)\cos\beta,$ $(a+b)\sin\beta]$, resp. S_1 $[(a+b)\cos\gamma,$ $(a+b)\sin\gamma]$ na kružnici k_1. Spojnice N_1S_1 má rovnici

$$x(\sin\beta - \sin\gamma) + y(\cos\gamma - \cos\beta) = (a-b)(\sin\beta\cos\gamma - \\ - \cos\beta\sin\gamma).$$

Dosadíme-li sem hodnoty (9) až (12), nabude tato rovnice tvaru

$$bx\cos\alpha + ay\sin\alpha = ab. \tag{14}$$

To však je rovnice tečny elipsy v bodě M. Tětiva $\overline{N_1S_1}$ kružnice k_1 je tečnou elipsy e.

Z bodu Q_1 $[-(a+b)\cos\alpha,$ $-(a+b)\sin\alpha]$ na kružnici k_1 — souměrného s bodem M_1 podle středu O — veďme k elipse e tečny

$$\overline{Q_1P} \equiv bx\cos\gamma + ay\sin\gamma + ab = 0 \tag{15}$$

$$\overline{Q_1R} \equiv bx\cos\beta + ay\sin\beta + ab = 0. \tag{16}$$

Bod dotyčný P $(-a\cos\gamma,$ $-b\sin\gamma)$ jest ovšem souměrně sdružen s bodem S $(a\cos\gamma,$ $b\sin\gamma)$, bod dotyčný R $(-a\cos\beta,$ $-b\sin\beta)$ s bodem N $(a\cos\beta,$ $b\sin\beta)$ podle středu O.

Tečna Q_1P protíná kružnici k_1 ještě v bodě N_1 $[(a+b)\cos\beta,$ $(a+b)\sin\beta]$ a tečna Q_1R ještě v bodě $S_1[(a+b)\cos\gamma,$ $(a+b)\sin\gamma]$, neboť pro oboje tvrzení je společnou podmínkou

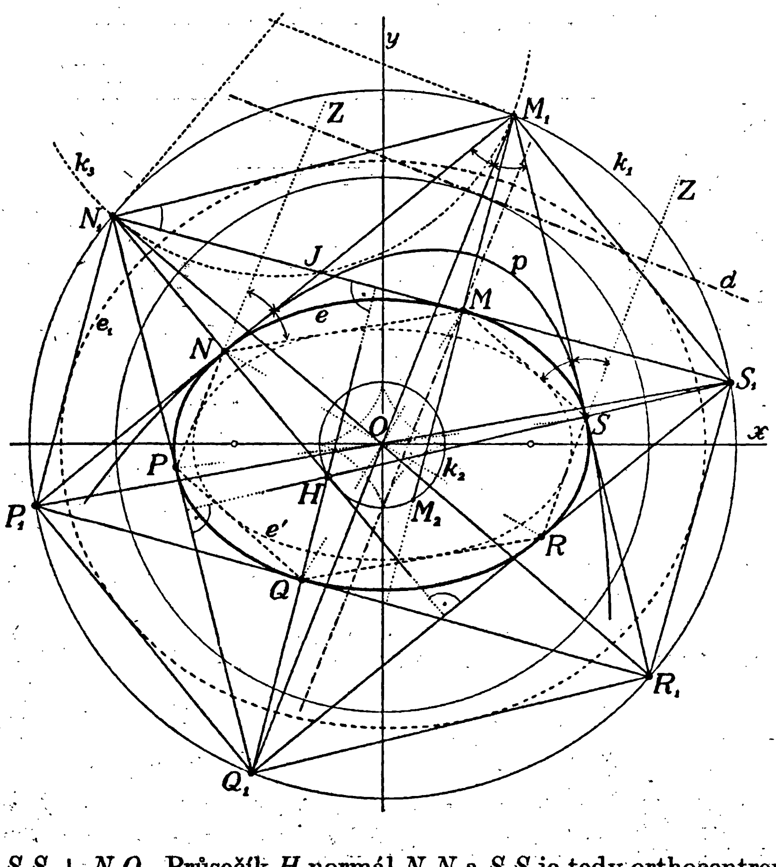
$$b(a+b)\cos\beta\cos\gamma + a(a+b)\sin\beta\sin\gamma + ab = 0. \tag{17}$$

Že tato podmínka jest identicky splněna, snadno se přesvědčíme dosazením hodnot (9) až (12) a pak (13).

Tedy tětivy $\overline{N_1Q_1}$ a $\overline{Q_1S_1}$ kružnice k_1 jsou tečnami elipsy e.

Trojúhelník $N_1Q_1S_1$ jest elipse e opsán a kružnici k_1 vepsán.

Poněvadž Q_1S_1 je tečnou elipsy v bodě R souměrně sdruženém s bodem N podle středu O, jest $Q_1S_1 \parallel M_1N$, a dále N_1N je normálou elipsy v bodě N, je tedy $N_1N \perp Q_1S_1$. Podobně je patrno,



že $S_1S \perp N_1Q_1$. Průsečík H normál N_1N a S_1S je tedy orthocentrem $\triangle N_1Q_1S_1$. Jeho souřadnice obdržíme řešením rovnic

$$ax \sin\beta - by \cos\beta = (a^2 - b^2) \sin\beta \cos\beta, \tag{18}$$
$$ax \sin\gamma - by \cos\gamma = (a^2 - b^2) \sin\gamma \cos\gamma. \tag{19}$$

Tím obdržíme, přihlížejíce k rovnicím (9) až (12):

$$x_H = \frac{a - b}{b_1^2} [b^2 - (a + b)^2 \sin^2\alpha] \cos\alpha, \tag{20}$$

$$y_H = \frac{a-b}{b_1^2}\,[(a+b)^2 \cos^2 \alpha - a^2] \sin \alpha. \tag{21}$$

Zdvojmocněním a sečtením těchto rovnic obdržíme

$$x_H^2 + y_H^2 = (a-b)^2,$$

t. j. geom. místem orthocentra $\triangle N_1Q_1S_1$ jest kružnice k_2.

Podobně je také $\triangle M_1P_1R_1$ opsán elipse e a vepsán do kružnice k_1. Máme tedy dva šestiúhelníky: $MNPQRS$ vepsaný do elipsy e a $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$ vepsaný do kružnice k_1. Spojnice vrcholů MM_1, NN_1, PP_1, QQ_1, RR_1, SS_1 jsou normálami elipsy e v bodech M, N, P, Q, R, S. Úhlopříčky M_1P_1, N_1Q_1, P_1R_1, Q_1S_1, R_1M_1, S_1N_1 šestiúhelníka $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$ jsou tečnami elipsy e v bodech N, P, Q, R, S, M.

3. Počítejme délky stran šestiúhelníka $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$:

$$\overline{M_1N_1}^2 = \overline{Q_1R_1}^2 = (a+b)^2\,[(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2],$$
$$\overline{N_1P_1}^2 = \overline{R_1S_1}^2 = (a+b)^2\,[(\cos\beta + \cos\gamma)^2 + (\sin\beta + \sin\gamma)^2],$$
$$\overline{P_1Q_1}^2 = \overline{S_1M_1}^2 = (a+b)^2\,[(\cos\alpha - \cos\gamma)^2 + (\sin\alpha - \sin\gamma)^2].$$

Dosadíme-li sem hodnoty (9) až (12), obdržíme

$$\overline{M_1N_1}^2 + \overline{N_1P_1}^2 + \overline{P_1Q_1}^2 + \overline{Q_1R_1}^2 + \overline{R_1S_1}^2 + \overline{S_1M_1}^2 = \\ = 8\,(a^2 + ab + b^2). \tag{22}$$

Tedy součet čtverců stran šestiúhelníka $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$ jest konstantní.

Počítejme délky stran šestiúhelníka $MNPQRS$:

$$\overline{MN} = \sqrt{a^2 (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + b^2 (\sin\beta - \sin\alpha)^2},$$
$$= 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cos(\alpha + \beta)}. \tag{23}$$

Poněvadž bod $N_1\,[(a+b)\cos\beta,\ (a+b)\sin\beta]$ leží na tečně

$$MN_1 \equiv bx \cos\alpha + ay \sin\alpha - ab = 0,$$

platí

$$b\,(a+b)\cos\alpha\cos\beta + a\,(a+b)\sin\alpha\sin\beta - ab = 0. \tag{24}$$

Mimo to jest

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha). \tag{25}$$

Z rovnic (24), (25) vypočteme

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{a}{a^2 - b^2}\,[(a+b)\cos(\beta - \alpha) - b],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{b}{a^2 - b^2}\,[a - (a+b)\cos(\beta - \alpha)].$$

Odečtením druhé z těchto rovnic od prvé obdržíme

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{(a+b)^2 \cos(\beta - \alpha) - 2ab}{a^2 - b^2}. \tag{26}$$

Dosadíme-li tento výsledek do (23), vyjde

$$\overline{MN} = 2(a+b)\sin^2\frac{\beta - \alpha}{2}. \tag{27}$$

Avšak z rovnoramenného $\triangle M_1ON_1$ plyne

$$\overline{M_1N_1} = 2(a+b)\sin\frac{\beta - \alpha}{2}. \tag{28}$$

Srovnáním (27) a (28) obdržíme tedy

$$\overline{MN} = \frac{\overline{M_1N_1}^2}{2(a+b)}. \tag{29}$$

Obdobně jest také

$$\overline{NP} = \frac{\overline{N_1P_1}^2}{2(a+b)}, \quad \overline{PQ} = \frac{\overline{P_1Q_1}^2}{2(a+b)}, \quad \overline{QR} = \frac{\overline{Q_1R_1}^2}{2(a+b)},$$
$$\overline{RS} = \frac{\overline{R_1S_1}^2}{2(a+b)}, \quad \overline{SM} = \frac{\overline{S_1M_1}^2}{2(a+b)}.$$

Sečtením těchto šesti rovnic obdržíme hledíce ke (22)

$$\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{SM} = 4\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}, \tag{30}$$

t. j. **obvod šestiúhelníka** *MNPQRS je konstantní.*

4. Uvažujme nyní, co jest obálkou tětivy M_1N_1 kružnice k_1. Rovnice přímky M_1N_1 jest

$$y = x\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} + (a+b)\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha - \cos\beta}.$$

Můžeme ji upraviti na tvar

$$x\sqrt{a^2 - (a+b)^2 u} + y\sqrt{(a+b)^2 u - b^2} =$$
$$= (a+b)\sqrt{(a^2 - b^2)(1-u)}, \tag{31}$$

kdež $u = \sin^2 \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ je proměnný parametr. Derivujme tuto rovnici podle u:

$$-\frac{(a+b)^2 x}{\sqrt{a^2 - (a+b)^2 u}} + \frac{(a+b)^2 y}{\sqrt{(a+b)^2 u - b^2}} = -(a+b)\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{1-u}}. \tag{32}$$

Z rovnic (31), (32) vypočteme

$$x = \frac{a^2 + 2ab}{a + b} \sqrt{\frac{a^2 - (a + b)^2 u}{(a^2 - b^2)(1 - u)}}, \tag{33}$$

$$y = \frac{2ab + b^2}{a + b} \sqrt{\frac{(a + b)^2 u - b^2}{(a^2 - b^2)(1 - u)}}. \tag{34}$$

Dělme rovnici (33) výrazem $\sqrt{a^2 + 2ab}$, rovnici (34) výrazem $\sqrt{2ab + b^2}$, potom obě zdvojmocněme a sečtěme; čímž vznikne

$$\frac{x^2}{a^2 + 2ab} + \frac{y^2}{2ab + b^2} = 1. \tag{35}$$

Obálkou tětivy M_1N_1 kružnice k_1 je tedy elipsa e_1 konfokální s danou elipsou. Její poloosy jsou $\sqrt{a^2 + 2ab}$, $\sqrt{2ab + b^2}$.

5. Hledejme dále, co jest obálkou tětivy MN elipsy e. Rovnice přímky MN jest

$$y - b \sin \alpha = \frac{b (\sin \beta - \sin \alpha)}{a (\cos \beta - \cos \alpha)} (x - a \cos \alpha).$$

Můžeme ji uvésti na tvar

$$bx\sqrt{a^2 - (a + b)^2 u} + ay\sqrt{(a + b)^2 u - b^2} = ab\sqrt{(a^2 - b^2)(1 - u)}, \tag{36}$$

kdež opět $u = \sin^2 \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ je proměnný parametr. Derivací podle u obdržíme

$$-\frac{b (a + b)^2 x}{\sqrt{a^2 - (a + b)^2 u}} + \frac{a (a + b)^2 y}{\sqrt{(a + b)^2 u - b^2}} = -\frac{ab\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - u}}. \tag{37}$$

Z rovnic (36), (37) vypočteme

$$x = \frac{a (a^2 + 2ab)}{(a + b)^2} \sqrt{\frac{a^2 - (a + b)^2 u}{(a^2 - b^2)(1 - u)}}, \tag{38}$$

$$y = \frac{b (2ab + b)^2}{(a + b)^2} \sqrt{\frac{(a + b)^2 u - b^2}{(a^2 - b^2)(1 - u)}}. \tag{39}$$

Eliminací u z těchto dvou rovnic vychází nám rovnice

$$\frac{(a + b)^2 x^2}{a^2 (a^2 + 2ab)} + \frac{(a + b)^2 y^2}{b^2 (2ab + b^2)} = 1. \tag{40}$$

Je tedy obálkou tětivy MN elipsy e elipsa e' o poloosách $\frac{a\sqrt{a^2 + 2ab}}{a + b}$, $\frac{b\sqrt{2ab + b^2}}{a + b}$. Jak se snadno přesvědčíme, jest elipsa e' konfokální s elipsou e a tedy také s elipsou e_1.

6. Body M_1, N_1 veďme kružnici k_3 orthogonálnou ke kružnici k_1. Střed O_3 kružnice k_3 je průsečík přímek

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = a + b, \qquad x \cos \beta + y \sin \beta = a + b,$$

má tedy souřadnice

$$m = \frac{a + b}{b_1^2 + 2ab} [b (2a + b) \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{(a + b)^2 b_1^2 - a^2b^2}], \tag{41}$$

$$n = \frac{a + b}{b_1^2 + 2ab} [a (a + 2b) \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{(a + b)^2 b_1^2 - a^2b^2}]. \tag{42}$$

Poloměr kružnice k_3 jest

$$\varrho = \sqrt{m^2 + n^2 - (a + b)^2}, \tag{43}$$

tedy její rovnice

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + (a + b)^2 = 0. \tag{44}$$

Průsečík I přímek

$$MN_1 \equiv bx \cos \alpha + ay \sin \alpha - ab = 0,$$
$$NM_1 \equiv bx \cos \beta + ay \sin \beta - ab = 0$$

má souřadnice $\frac{am}{a + b}$, $\frac{bn}{a + b}$. Dosadíme-li je do rovnice (44), obdržíme na levé straně rovnice

$$(a + b)^4 - (a^2 + 2ab) m^2 - (2ab + b^2) n^2,$$

a zavedeme-li sem hodnoty (41) a (42), shledáme, že se tento výraz rovná identicky nule. Tedy kružnice k_3, protínající kružnici k_1 orthogonálně v bodech M_1 a N_1, prochází průsečíkem I přímek MN_1 a NM_1. Z toho pak plyne, že

$$\sphericalangle NM_1O = \sphericalangle MN_1M_1, \tag{45}$$

neboť jsou to v kružnici k_3 úhly obvodové nad tětivou IM_1.

Poněvadž $\sphericalangle M_1NN_1 = 90^0$, $\sphericalangle M_1MN_1 = 90^0$, jest čtyřúhelník MNN_1M_1 tětivový, takže

$$\sphericalangle MNM_1 = \sphericalangle MN_1M_1. \tag{46}$$

Srovnáním (45) a (46) dostaneme

$$\sphericalangle MNM_1 = \sphericalangle NM_1O. \tag{47}$$

7. Parabola p, která se dotýká elipsy e v bodech N, S, má patrně osu rovnoběžnou se spojnicí bodu M_1 se středem C úsečky $\overline{NS}$. Bod C má souřadnice

$$\xi = \tfrac{1}{2}a (\cos \beta + \cos \gamma) = \frac{a^2b^2 \cos \alpha}{(a + b)\, b_1^2}, \tag{48}$$

$$\eta = \tfrac{1}{2}b\,(\sin\beta + \sin\gamma) = \frac{a^2b^2\sin\alpha}{(a+b)\,b_1^2}, \tag{49}$$

jak snadno vypočteme užitím hodnot (9) až (12). Z toho plyne

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \alpha,$$

t. j. bod C leží na přímce OM_1. Parabola p má tedy osu rovnoběžnou s přímkou OM_1.

Vedeme-li bodem N paraboly přímku $NZ \parallel OM_1$, jest

$$\sphericalangle ZNM_1 = \sphericalangle NM_1O, \tag{50}$$

neboť to jsou úhly střídavé.

Srovnáme-li (50) a (47), vidíme, že

$$\sphericalangle ZNM_1 = \sphericalangle MNM_1, \tag{51}$$

t. j. tečna paraboly NM_1 jest osou úhlu přímek NZ a NM. Ohnisko paraboly tedy leží v přímce NM.

Docela obdobně lze dokázati, že ohnisko leží v přímce SM. Ohniskem paraboly je tedy bod M. Tím jsme dokázali větu: Parabola dotýkající se elipsy e ve dvou bodech, jejichž tečny se protínají na kružnici k_1, má ohnisko na elipse e.

Řídicí přímka paraboly má rovnici

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - d = 0. \tag{52}$$

Bod N ($a\cos\beta$, $b\sin\beta$) paraboly má od řídicí přímky vzdálenost

$$-a\cos\alpha\cos\beta - b\sin\alpha\sin\beta + d,$$

a od ohniska M ($a\cos\alpha$, $b\sin\alpha$) vzdálenost $\overline{MN}$, která se podle (27) rovná $2\,(a+b)\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$, takže

$$-a\cos\alpha\cos\beta - b\sin\alpha\sin\beta + d = 2\,(a+b)\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),$$

z čehož vypočteme, přihlížejíce k rovnicím (24) a (25),

$$d = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}. \tag{53}$$

Tedy řídicí přímky parabol, které mají ohnisko na elipse e a dotýkají se jí ve dvou bodech, obalují kružnici o středu O a poloměru $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

Vzdálenost ohniska M ($a\cos\alpha$, $b\sin\alpha$) od řídicí přímky

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = 0$$

jest

$$p = -a \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha + \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b},$$

$$= \frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{a + b}.$$

Parametr paraboly, mající ohnisko na elipse e v bodě M a dotýkající se elipsy ve dvou bodech, jest

$$2p = \frac{2b_1{}^2}{a + b}, \tag{54}$$

kdež b_1 je délka poloměru elipsy sdruženého s poloměrem OM.

Osa paraboly má rovnici

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = (a - b) \sin \alpha \cos \alpha. \tag{55}$$

Derivujme tuto rovnici podle proměnného parametru α:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = (a - b)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \tag{56}$$

Z rovnic (55), (56) vypočteme

$$x = (a - b) \cos^3 \alpha, \tag{57}$$

$$y = -(a - b) \sin^3 \alpha. \tag{58}$$

Eliminací α z těchto dvou rovnic obdržíme

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a - b)^{\frac{2}{3}}. \tag{59}$$

Tedy obálkou os všech parabol, majících ohnisko na elipse e a dotýkajících se elipsy ve dvou bodech, jest *asteroida.*

Sestrojení tečen jistých křivek rovinných.

Dr. *Jan Schuster.*

1. V ročníku X. na str. 51—54 tohoto časopisu udán jednoduchý vznik některých křivek rovinných. Zde chci podati další příspěvek pro sestrojení tečen, takže potom konstrukce přejde v proložení křivky jistým opsaným polygonem.

Buďte dány dvě křivky procházející počátkem soustavy

$$x = \varphi(t), \; y = t\varphi(t); \quad x = \psi(t), \; y = t\psi(t).$$

Na paprsku $y = tx$ přidružme k počátku nový bod dvojpoměrem λ k průsečíkům s danými křivkami jako základním bodům. Hledaný bod je pak určen rovnicí