František Velísek

O jistém druhu ploch translačních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 194--198

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124106`

O jistém druhu ploch translačních.

Fr. Velísek.

Při známé ploše, jejíž čáry křivoznačné se určí quadraturami, o rovnici

$$e^z = \cos x \cos y$$

tvoří čáry $x =$ konst., $y =$ konst. systém čar diagonálních. Jest totiž lin. element dán výrazem

$$ds^2 = \frac{dx^2}{\cos^2 x} + \frac{dy^2}{\cos^2 y} + 2 tg\, x\; tg\, y\; dx\, dy,$$

koefficienty druhé základní formy theorie ploch D, D', D'' pak

$$D = -\frac{\cos y}{\cos x \sqrt{1 - \sin^2 x \sin^2 y}}, \quad D' = 0.$$

$$D'' = -\frac{\cos x}{\cos y \sqrt{1 - \sin^2 x \sin^2 y}},$$

tudíž podmínka charakterisující čáry diagonální

$$D' = 0, \quad \frac{D}{E} = \frac{D''}{G}$$

jest splněna.

Zavedeme-li nové proměnné substitucí

$$u = \int \frac{dx}{\cos x} = -\lg tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

$$v = \int \frac{dy}{\cos y} = -\lg tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right),$$

nabude lin. element tvaru

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2 \frac{1 - e^{-2u}}{1 + e^{-2u}} \cdot \frac{1 - e^{-2v}}{1 + e^{-2v}} du dv.$$

V tomto systému čar souřadných jest tudíž

$$E = G, \quad F = \frac{1 - e^{-2u}}{1 + e^{-2u}} \cdot \frac{1 - e^{-2v}}{1 + e^{-2v}}, \quad D = D'', \quad D' = 0.$$

Tážeme se, jaké jsou obecně funkce U, V argumentů u, resp. v v lin. elementu plochy

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2U \cdot V du dv, \tag{1}$$

tvoří-li čáry $u =$ konst, $v =$ konst. systém čar diagonálních.

Jelikož
$$E = G = 1, \quad D = D'', \ D' = 0,$$
dávají Christoffelovy symboly

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)} = -\frac{UU'V^2}{1 - U^2V^2},$$
$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{-F\frac{\partial G}{\partial v} + 2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)} = \frac{UV'}{1 - U^2V^2},$$
$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)} = 0,$$
$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{-F\frac{\partial E}{\partial u} + 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)} = \frac{U'V}{1 - U^2V^2}, \tag{2}$$
$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)} = 0,$$
$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)} = \frac{-U^2VV'}{1 - U^2V^2}.$$

Rovnice Codazziho redukují se pro tyto hodnoty na výrazy

$$\frac{\partial \lg D}{\partial v} = -\frac{U'V}{1 - U^2V^2}, \quad \frac{\partial \lg D}{\partial u} = -\frac{UV'}{1 - U^2V^2}, \tag{3}$$
$$K = \frac{D^2}{1 - U^2V^2} = \frac{U'}{\sqrt{U^2 - V}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{V}{\sqrt{1 - U^2V^2}}.$$

Podmínka integrability prvních dvou rovnic dává
$$\begin{aligned} &V(1 - U^2V^2)\,U'' + 2UV^3U'^2 = \\ &U(1 - U^2V^2)\,V'' + 2U^3VV'^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Píšeme-li rovnici tuto ve tvaru
$$\frac{U''}{U} - V^2(UU'' - 2U'^2) = \frac{V''}{V} - U^2(VV'' - 2V'^2)$$
a derivujeme dle u a v, obdržíme
$$VV'(UU'' - 2U'^2)' = UU'(VV'' - 2V'^2)'.$$

Není-li tudíž
$$U' = 0, \quad V' = 0,$$
musí býti
$$(2U'^2 - UU'')' = 2kUU', \quad (2V'^2 - VV'')' = 2kVV',$$
z čehož integrací plyne
$$UU'' = 2U'^2 - kU^2 - k_1, \quad VV'' = 2V'^2 - kV^2 - k_2,$$
při čemž k, k_1, k_2 značí konstanty. Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice (4), obdržíme
$$2V^2U'^2 - k_1V^2 + k_1U^2V^4 = 2U^2V'^2 - k_2U^2 + k_2U^4V^2,$$
neb
$$2\frac{U'^2}{U^2} - \frac{k_1}{U^2} - k_2U^2 = 2\frac{V'^2}{V^2} - \frac{k_2}{V^2} - k_1V^2 = 2k_3,$$
kde k_3 značí novou konstantu. Srovnáme-li hodnoty pro U'' a V'' z posledních rovnic plynoucí s hodnotami předešlými, nalezneme
$$k_3 = k,$$
$$2U'^2 = k_2U^4 + 2kU^2 + k_1, \quad 2V'^2 = k_1V^4 + 2kV^2 + k_2.$$
Jelikož pak z třetí rovnice systému (3) jde pro D
$$D^2 = \frac{U'V'}{1 - U^2V^2},$$
dává první rovnice téhož systému
$$(1 - U^2V^2)V'' + 2U^2VV'^2 + 2U'VV' = 0,$$
po dosazení V'' pak
$$k_1V^2 + k + kU^2V^2 + k_2U^2 + 2U'V' = 0.$$
Povýšíme-li rovnici na druhou a použijeme hodnot pro U'^2, V'^2, redukuje se tato na
$$(k^2 - k_1k_2)(1 + U^4V^4 - 2U^2V^2) = 0,$$
musí tudíž býti
$$k^2 = k_1k_2,$$
a výrazy
$$2U'^2 = k_2U^4 + 2kU^2 + k_1, \quad 2V'^2 = k_1V^4 + 2kV^2 + k_2$$
se redukují na čtverce hodnot
$$\sqrt{k_2}U^2 + \sqrt{k_1}, \quad \sqrt{k_1}V^2 + \sqrt{k_2},$$

kde znamení odmocnin nutno voliti dle $k = \pm\sqrt{k_1 k_2}$. Obdržíme tak

$$\begin{aligned} \sqrt{2}U' &= \pm(\sqrt{k_2}U^2 + \sqrt{k_1}), & \sqrt{2}V' &= \mp(\sqrt{k_1}V^2 + \sqrt{k_2}), \\ \sqrt{2}U' &= \pm\sqrt{k_2}U^2 \mp \sqrt{k_1}, & \sqrt{2}V' &= \pm\sqrt{k_1}V^2 \mp \sqrt{k_2}, \end{aligned} \tag{5}$$

celkem 4 systémy výrazů pro U', V'.

Označíme-li

$$k = cc_1, \quad k_1 = 2c_1^2, \quad k_2 = \frac{c^2}{2},$$

můžeme (5) psáti

$$U' = c_1 - \frac{c}{2}U^2, \quad V' = \frac{c}{2} - c_1 V^2, \tag{5*}$$

z čehož jde integrací

$$\sqrt{c}\,U = \sqrt{2c_1}\,\frac{e^{\sqrt{2cc_1}\,u} - 1}{e^{\sqrt{2cc_1}\,u} + 1}, \quad \sqrt{2c_1}\,V = \sqrt{c}\,\frac{e^{\sqrt{2cc_1}\,v} - 1}{e^{\sqrt{2cc_1}\,v} + 1}.$$

Lin. element (1) hledaných ploch má tudíž tvar

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\,\frac{e^{\sqrt{2cc_1}\,u} - 1}{e^{\sqrt{2cc_1}\,u} + 1}\cdot\frac{e^{\sqrt{2cc_1}\,v} - 1}{e^{\sqrt{2cc_1}\,v} + 1}\,du\,dv.$$

Pravoúhlé souřadnice ploch o tomto lin. elementu vypočteme z rovnic pro druhé derivace těchto souřadnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + DX, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &+ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D'X, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D''X, \end{aligned}$$

a analogických výrazů pro y a z, vznikajících záměnou X v Y, resp. Z; při tom X, Y, Z dávají kosiny positivního směru normály plochy. Vzhledem k tomu, že platí

$$E = G = 1, \quad D = D'', \quad D' = 0,$$

a při použití rovnic (2) lze psáti hořejší systém rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned}$$

Po dosazení hodnot (2) redukují se poslední rovnice na tvar

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = - U \frac{U' V^2 + V'}{1 - U^2 V^2} \frac{\partial x}{\partial u} + V \frac{U' + U^2 V'}{1 - U^2 V^2} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

Rovnici poslední vyhovuje

$$x = f(u) + \varphi(v),$$

první pak se dá pomocí této hodnoty psáti ve tvaru

$$(1 - U^2 V^2)(f'' - \varphi'') = - U (V^2 U' + V') f' + V (U' + U^2 V') \varphi'.$$

Funkcionální tato rovnice dává pomocí výrazů (5*)

$$(1 - U^2 V^2) \left(f'' - \varphi'' + \frac{c}{2} U f' - c_1 V \varphi' \right) = 0,$$

musí tudíž býti

$$f'' + \frac{c}{2} U f' = \varphi'' + c_1 V \varphi' = \frac{c_3}{2}.$$

Integrací obdržíme z těchto rovnic

$$\sqrt{\frac{cc_1}{2}} f = c_4 \, arc \, tg \, e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} u} + \frac{c_3}{2} \sqrt{\frac{2}{cc_1}} \, lg \frac{1 + e^{\sqrt{2cc_1} u}}{e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} u}}$$

$$\sqrt{\frac{cc_1}{2}} \varphi = c_5 \, arc \, tg \, e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} v} + \frac{c_3}{2} \sqrt{\frac{2}{cc_1}} \, lg \frac{1 + e^{\sqrt{2cc_1} v}}{e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} v}},$$

kde c_4, c_5 značí integrační konstanty. Zvolíme-li tedy tři lineárně neodvislé partikulární integrály systému rovnic (6), obdržíme pro souřadnice hledaných ploch hodnoty

$$\sqrt{\frac{cc_1}{2}} x = c_4 \, arc \, tg \, e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} u}, \quad \sqrt{\frac{cc_1}{2}} y = c_5 \, arc \, tg \, e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} v},$$

$$cc_1 z = c_3 \, lg \frac{1 + e^{\sqrt{2cc_1} u}}{e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} u}} \cdot \frac{1 + e^{\sqrt{2cc_1} v}}{e^{\sqrt{\frac{cc_1}{2}} v}}.$$

Jsou tudíž hledané plochy translačními, jichž tvořící křivky leží v rovinách k sobě kolmých.