Josef Kounovský

Rozšířená věta Dandelinova

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 257--268

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124102

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Rozšířená věta Dandelinova.

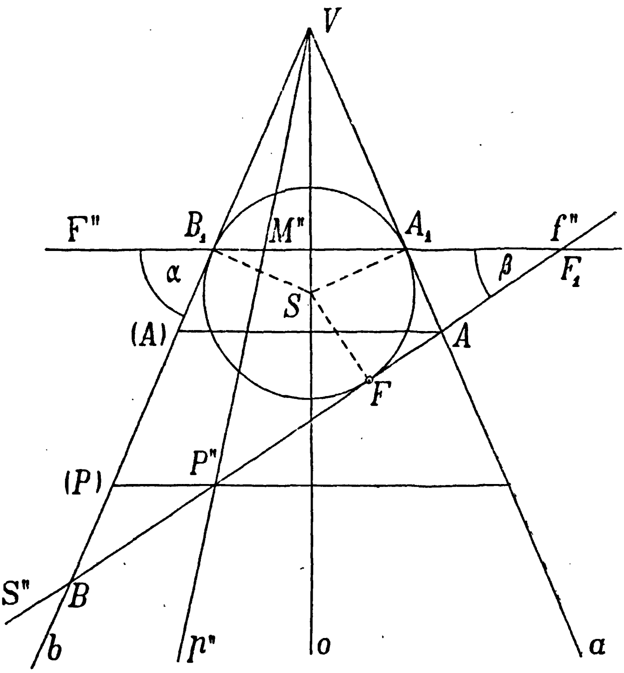
Píše dr. Jos. Kounovský.

Všeobecně známa jest věta, že *rovinný průsek rotační plochy kuželové jest kuželosečka, mající ohnisko v dotyčném bodě kulové plochy kuželové ploše vepsané a současně roviny sečné se dotýkající.* Méně známým jest *rozšíření platnosti této věty též na rotační plochy druhého stupně, a to vejčitý elipsoid, oba hyperboloidy a paraboloid.* U rotačního elipsoidu sploštělého taková kulová plocha neexistuje, ježto sploštělý elipsoid nachází se celý uvnitř kulové plochy, která dotýká se ho podél kterékoli rovnoběžky.

1. K důkazu poslouží nám *definice kuželosečky jako geometrického místa bodu, majícího stálý poměr vzdáleností od pevného bodu a pevné přímky v rovině své, t. j. od svého ohniska a jemu příslušné přímky řídící.*

Pokládáme-li kuželosečku za rovinný průsek rotační kuželové plochy a vepíšeme-li jí kulovou plochu, která dotýká se roviny sečné v jeho ohnisku, pak jemu příslušnou *přímkou řídící jest průsečnice roviny sečné s rovinou kružnice, podél které se kulová plocha dotýká plochy kuželové.*

V obr. 1. zvolen nárys rotační kuželové plochy na rovinu (nákresnu) procházející její osou o, kuželová plocha určena oběma protějšími povrchovými přímkami a a b, které se protínají ve vrcholu V na ose a svírají úhel α s rovinou řídicí kružnice kuželové plochy. Rovina sečná **S** zvolena nárysně promítací, což nijak neomezuje, jak známo, obecnost důkazů, pokládáme-li nárysnu jen za rovinu procházející osou o a kolmou na libovolnou rovinu sečnou **S**. V obr. vyznačen úhel β, který svírá rovina sečná s rovinou řídící kružnice. Průsek jest elipsa, parabola nebo hyperbola, je-li resp. $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$, $\beta > \alpha$. Rovina sečná protíná obrysové povrchové přímky ve vrcholech A a B hlavní (ohniskové) osy průseku, je-li průsek parabolou, jest B jejím bodem úběžným.



Obr. 1.

Sestrojme kulovou plochu o středu S, dotýkající se kuželové plochy podél řídící kružnice v rovině **F** ($A_1 B_1$ jest její průměr v nákresně) a roviny **S** v ohnisku F průseku. Pak průsečnice $f \equiv$ **F** . **S**, jejíž nárysná stopa označena F_1, jest řídící přímkou průseku, příslušnou ohnisku F. Uvažujeme-li o proměnném bodu P průseku, sestrojíme jím povrchovou přímku p kuželové plochy a označíme dotyčný bod obou M, pak vskutku, ježto $PF = PM = (P)B_1$, je-li (P) průsečík přímky b s řídící kružnicí bodu P, a vzdálenost bodu P od přímky f (nárysně promítací)

$= P''F_1$ v nákresně,

$$\frac{PF}{P''F_1} = \frac{PM}{P''F_1} = \frac{(P)B_1}{P''F_1} = \frac{BB_1}{BF_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = konst.$$

Je-li (A) průsečík přímky b s řídící kružnicí bodu A, pak tento konstantní poměr jest $\varepsilon = \frac{B(A)}{BA}$; $B(A) = 2e =$ dvojnásobné lineární výstřednosti průseku, jak snadno se ukáže (na př. pro elipsu $B(A) = BB_1 - (A)B_1 = BF - AA_1 = BF - AF = 2e$), a $BA = 2a =$ délce hlavní jeho osy; tedy $\varepsilon = \frac{e}{a} =$ číselné výstřednosti průseku. Při průseku parabolickém $(P)B_1 = P''F_1$.

Dělící poměry vrcholů A a B vzhledem k základním bodům F a F_1 mají číselnou hodnotu ε a liší se toliko znamením, tedy $(ABFF_1) = -1$; t. j. ohnisko a příslušná přímka řídící dělí hlavní osu harmonicky.

2. Budiž v obr. 2. dána kuželová plocha a její rovina sečná **S** jako v článku předešlém. Vepišme nyní kuželové ploše libovolnou plochu kulovou o středu S.

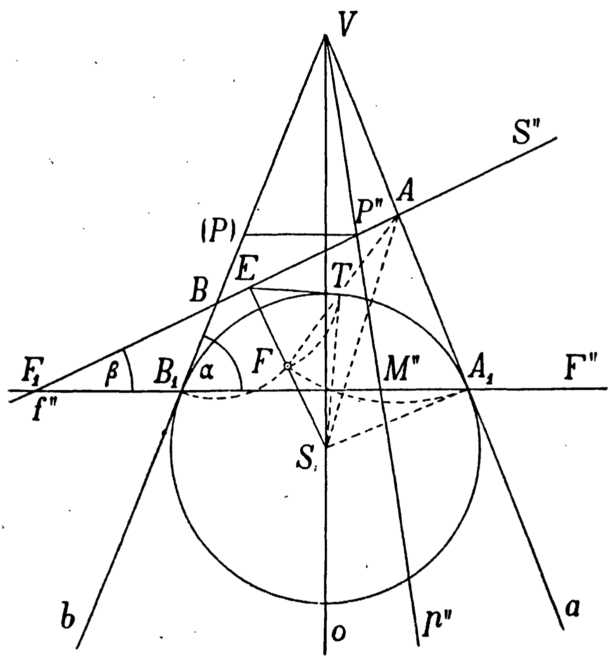
Docela obdobně budiž délka tečny, sestrojené proměnným bodem P průseku ku ploše kulové na povrchové přímce p kuželové plochy, $PM = (P)B_1$ převedena rotací kolem osy o na povrchovou přímku b a budiž vytčena zase průsečnice f roviny sečné **S** a roviny **F** dotykové kružnice plochy kulové a kuželové, jakož i nárysná její stopa F_1, takže opět $P''F_1$ udává vzdálenost bodu P od přímky f. I jest

$$\frac{PM}{P''F_1} = \frac{(P)B_1}{P''F_1} = \frac{BB_1}{BF_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = konst.$$

Platí tedy:

Pro libovolnou kuželosečku na rotační ploše kuželové jest poměr délky tečny, sestrojené proměnným jejím bodem k libovolné kulové ploše, jež jest vepsána uvažované ploše kuželové, a jeho vzdálenosti od průsečnice roviny kuželosečky s rovinou dotykové kružnice rovný číselné výstřednosti kuželosečky.

V obr. 2. sestrojena kulová plocha specielně tak, že roviny **S** neseče. Sestrojíme-li ze středu P poloměrem PM kulovou plochu, protíná tato pravoúhle kulovou plochu S. A tu všechny kulové plochy, mající středy v rovině **S** a protínající kulovou plochu S pravoúhle, protínají se v společném bodu F na kolmici $SE \perp$ **S** (ve dvou souměrných bodech dle paty E kolmice), kde $EF = ET$ jest délka tečny sestrojené patou kolmice na uvažovanou plochu kulovou S. Pomocí pravoúhle protínající



Obr. 2.

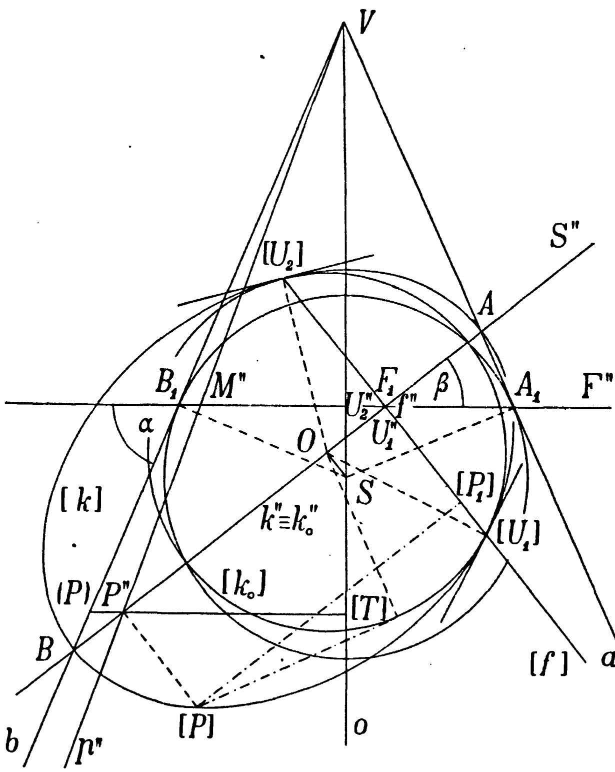
kulové plochy o středu A obdržíme bod F, učiníme-li $AF = AA_1$ (nebo obdobně $BF = BB_1$). Patrně

$$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{AA}_1^2 - \overline{AE}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{SA}_1^2 - \overline{AE}^2 = \overline{SE}^2 - \overline{ST}^2 = \overline{ET}^2,$$

tedy vskutku $EF = ET$, což platí pro libovolný bod A v rovině **S**; stačí jen rovinu ASE prohlásiti za nákresnu.

Bod F hraje tu úlohu ohniska průseku pro kulovou plochu dotýkající se roviny **S**.

S týmž označením sestrojena v obr. 3. kulová plocha S tak, že protíná rovinu **S**. Označíme-li tuto průsečnou kružnici k_0 a průsečnou kuželosečku kuželové plochy k, dotýká se kružnice k_0 dvojnásobně kuželosečky k, majíc střed na její ohniskové



Obr. 3.

ose.*) Dotyčné body U_1 a U_2 obou křivek nacházejí se na průsečnici f. Pro proměnný bod P kuželosečky k platí opět $\frac{PM}{P''F_1} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \varepsilon$. Délku tečny PM, sestrojené bodem P na

*) Vepíšeme-li kuželové ploše specielně kulové plochy dotýkající se podél kružnic, jež procházejí vrcholy A a B, protínají rovinu **S** v oskulačních kružnicích průseku v těchto vrcholech (dotyk čtyřbodový).

kulovou plochu, možno nahraditi délkou PT tečny sestrojené bodem na kružnici k_0 nebo na kulovou plochu o středu O, mající tuto kružnici za hlavní a proťatou v ní kulovou plochou S diametrálně. Tato kružnice k_0 resp. kulová plocha O má zde význam ohniska průseku pro kulovou plochu dotýkající se roviny **S**.

V obr. sklopena rovina **S** kolem **S**'' do nákresny a ve sklopení vytčeny útvary $[k]$, $[k_0]$, $[U_1][U_2] \equiv [f]$, $[P]$, $[T]$ a $[P][P_1] \perp [f]$. Vztah $\frac{[P][T]}{[P][P_1]} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \varepsilon$ možno vyjádřiti větou:

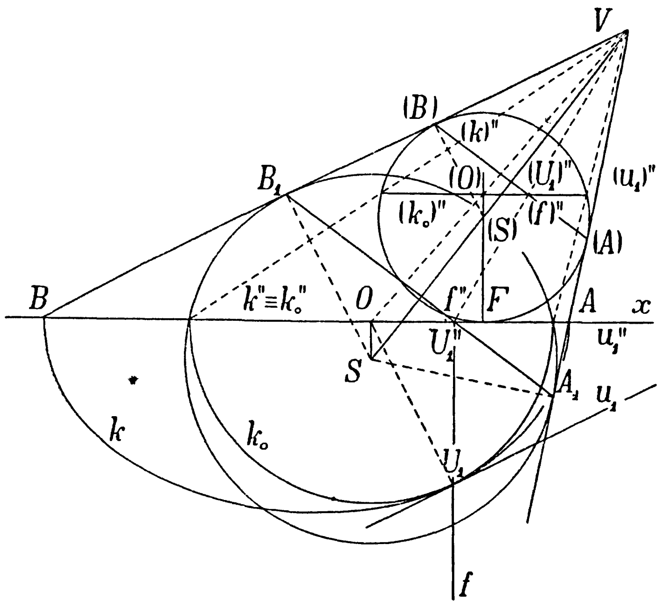
Sestrojíme-li kružnici dané kuželosečky dvojnásobně se dotýkající a mající střed na její ohniskové ose, jest poměr délky tečny, sestrojené proměnným bodem kuželosečky ku kružnici, a jeho vzdálenosti od dotykové tětivy obou křivek stálý a rovný číselné výstřednosti kuželosečky.

Sluší ovšem ukázati, že možno vždy zříditi rotační plochu kuželovou s vepsanou plochou kulovou tak, aby libovolně daná kuželosečka k a libovolná dvojnásobně se jí dotýkající kružnice k_0 se středem na její ohniskové ose byly resp. řezy obou ploch.

Buďtež v obr. 4. dány takové křivky — k elipsa — v půdorysně s ohniskovou osou v průmětné ose x. Sestrojíme-li libovolnou kulovou plochu o středu (S) a dotýkající se půdorysny v ohnisku F křivky k, určíme vrchol V rotační kuželové plochy křivkou k procházející jako průsečík tečen, sestrojených vrcholy A a B ohniskové osy křivky k na meridián té kulové plochy v nárysně. Sestrojíme-li dotykovou kružnici (k) kulové plochy (S) a kuželové plochy V, možno na ní vytknouti bod (U_1) na spojnici VU_1 (a obdobně U_2 na spojnici VU_2) vrcholu s dotyčnými body obou křivek, a jimi prochází již na kulové ploše rovnoběžka (k_0) o středu (O), jejímž středovým průmětem ze středu V na půdorysnu jest kružnice k_0 o středu O, neboť i tečny u_1 a u_2 v bodech U_1 resp. U_2 obou křivek jsou středové průměty tečen (u_1) a (u_2) v bodech (U_1) resp. (U_2) kružnice (k_0). Ze středové podobnosti v nárysně se vyskytující plyne, že spojnice $V(S)$ protíná kolmici vztyčenou v bodě O na osu x ve středu S kružnice dotýkající se přímek VA a VB resp. v bodech A_1 a

B_1 tak, že jest meridiánem kulové plochy vepsané rotační kuželové ploše V a procházející kružnicí k_0, čímž věta úplně dokázána. Obdobně pro hyperbolu a parabolu.

Patrně možno také voliti předem střed S kulové plochy procházející kružnicí k_0 a této opsati kuželovou plochu procházející kuželosečkou k.

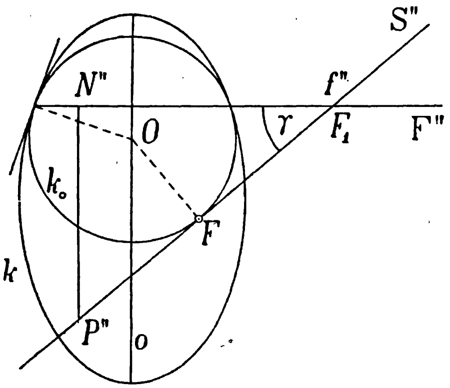


Obr. 4.

3. Provedeme-li rotaci obou vzájemně se dotýkajících křivek k a k_0 kolem ohniskové osy, dospíváme hned k větě:

Je-li rotačnímu elipsoidu vejčitému, rotačnímu hyperboloidu dvojplochému nebo rotačnímu paraboloidu vepsána kulová plocha, jest poměr délky tečny, sestrojené proměnným bodem rotační plochy ku ploše kulové, a jeho vzdálenosti od roviny dotykové rovnoběžky stálý a rovný číselné výstřednosti meridiánu plochy.

Sestrojme nyní průsek takové rotační plochy rovinou tečnou ku vepsané ploše kulové. Na př. v obr. 5. zvolen rotační elipsoid vejčitý s meridiánem k a osou o v nákresně, vepsaná plocha kulová má v nákresně hlavní kružnici k_0 o středu O dvojnásobně se křivky k dotýkající. Rovina sečná **S** budiž zase bez omezení obecnosti nárysně promítací, **S**$''$ dotýká se k_0 v dotyčném bodě F roviny s plochou kulovou. Označme zase rovinu dotykové kružnice **F**, průsečnici **S** . **F** $\equiv f$ a F_1 její nárysnou stopu. Značí-li nyní P proměnný bod uvažovaného rovinného průseku a N patu kolmice $PN \perp$ **F** na této rovině, platí dle poslední věty $\frac{PF}{PN} =$ *konst* ε, kde ε jest číselná výstřednost meridiánu; a ježto $PN = P''N'' = P''F_1 \, . \, sin \, \gamma$, kde $P''F_1$ jest vzdálenost bodu P



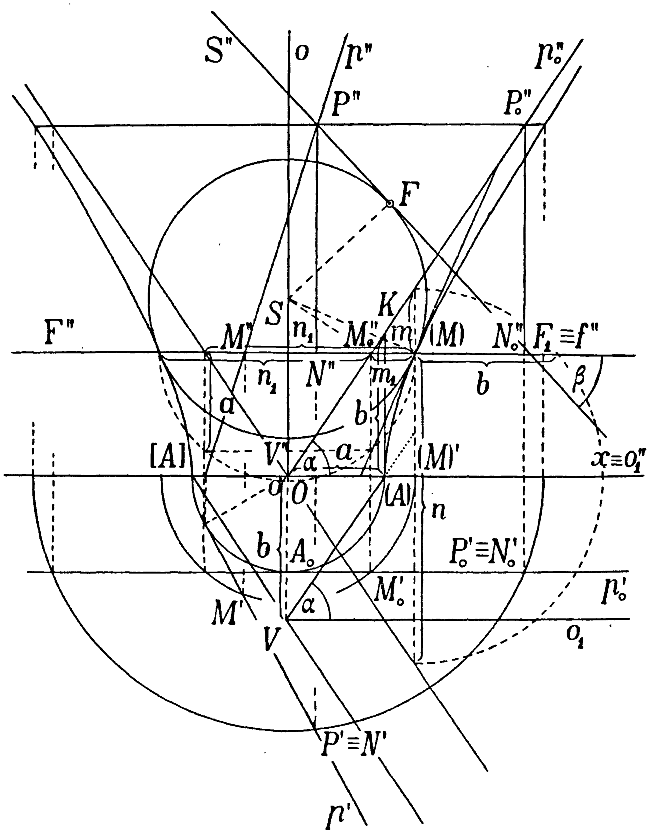
Obr. 5.

od přímky f a γ stálý úhel rovin **S** a **F**, platí i $\frac{PF}{P''F_1 \, . \, sin \, \gamma} = \varepsilon$, t. j. $\frac{PF}{P''F_1} = \varepsilon \, sin \, \gamma$; uvažovaný rovinný průsek jest tedy v našem případě elipsa o ohnisku F, příslušné řídící přímce f a číselné výstřednosti $\varepsilon \, sin \, \gamma$. Tím dokázána rozšířená věta Dandelinova pro uvedené tři plochy rotační.

Jakého druhu průsečná kuželosečka jest, posoudíme pomocí výrazu $\varepsilon \, sin \, \gamma$ pro číselnou její výstřednost, což zvláště pro vymezení průseků eliptických, parabolických a hyperbolických na dvojplochém rotačním hyperboloidu jest instruktivní.

4. Abychom ukázali platnost rozšířené věty Dandelinovy i pro rotační hyperboloid jednoplochý, vytvoříme jej otáčením

přímky p kolem mimoběžné osy o. Zvolme osu o v nárysně kolmo k průmětné ose x a přímku p_0 v poloze rovnoběžné s nárysnou a svírající s půdorysnou úhel α, jich půdorysné



Obr. 6.

stopy O resp. A_0; OA_0 jest nejkratší příčka obou mimoběžek, bod A_0 vytvoří rotací v půdorysně rovník plochy (obr. 6.).

Chceme-li vepsati hyperboloidu kulovou plochu s libovolným středem S na ose o, obdržíme její poloměr jako vzdálenost SM_0 středu S od přímky p_0, $SM''_0 \perp p''_0$. Otočíme-li bod M_0 kolem osy o do polohy (M) v nárysně, jest $S(M)$ poloměr kulové plochy, dotýkající se hyperboloidu podél rovnoběžky, vytvořené bodem M_0 v rovině F.

Uvažujeme-li nyní proměnný bod P hyperboloidu a sestrojíme-li jím plošnou přímku p, dotýkající se kulové plochy v bodě M, jest pravá velikost tečny $PM = P_0M_0 = P''_0M''_0$ na přímce p_0 rovnoběžné s nárysnou. Je-li dále $PN = P''N''$ vzdálenost bodu P od roviny F, platí $\frac{PM}{PN} = \frac{P_0M_0}{P_0N_0} = \frac{P''_0M''_0}{P''_0N''_0} = \frac{1}{\sin\alpha} = konst$; tedy:

Je-li rotačnímu hyperboloidu jednoplochému vepsána kulová plocha, jest poměr délky tečny, sestrojené proměnným bodem hyperboloidu ku ploše kulové, a jeho vzdálenosti od roviny dotykové rovnoběžky stálý.

Tato konstanta souvisí opět s meridiánem hyperboloidu, který jest hyperbola, určená průměrem $(A)[A]$ rovníku jako osou a asymptotou p''_0, což možno snadno ukázati. Označme $O(A) = a$ a kolmici vztýčenou v bodě (A) na $O(A)$ až k průsečíku K s přímkou p''_0 pak $(A)K = b$ a sestrojme rotační kuželovou plochu, jejímž průsekem nárysnou jest takto určená hyperbola; vrchol té kuželové plochy budiž V, kde $OV \perp x$, $OV = b$, osa $o_1 \parallel x$, její diametrálně protiležící povrchové přímky v půdorysně jsou $V(A)$ a $V[A]$.

Sestrojujeme-li body průseku nárysnou této kuželové plochy pomocí jejích kruhových řezů — v obr. sestrojen takový bod (M) —, patrna pro hyperbolu tato konstrukce:

Sestrojíme-li rovnoběžku s vedlejší osou hyperboly a vyznačíme na ní úseky od bodu hyperboly k oběma asymptotám, jest vedlejší poloosa střední měřicky úměrnou těchto úseků (v obr. $m \, . \, n = b^2$).

Dále pak platí:

Sestrojíme-li rovnoběžku s hlavní osou hyperboly a vyznačíme na ní úseky od bodu hyperboly k oběma asymptotám, jest hlavní poloosa střední měřicky úměrnou těchto úseků (v obr. $m_1 \, . \, n_1 = a^2$). Platnost této věty plyne z úměry $m : m_1 = n : n_1 = b : a$ a z rovnosti $m \, . \, n = b^2$.

Tato druhá věta vyjadřuje však tu konstrukci hyperboly s hlavní osou $(A)[A]$ a asymptotou p''_0, která jest totožnou s konstrukcí průseku hyperboloidu nárysnou, vytvořujeme-li jej rotací přímky, jak jest patrno z půdorysu otáčení.

Meridiánem hyperboloidu jest tedy hyperbola o poloosách a, b; označíme-li její lineární výstřednost e, jest hodnota konstantního poměru $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{e}{b}$.

Meridián kulové plochy S dotýká se meridiánu hyperboloidu, čímž dána i konstrukce tečny hyperboly v bodu (M), sestrojeném ze vztahu $m_1 . n_1 = a^2$, pomocí bodu S. A dále platí věta:

Sestrojíme-li kružnici dotýkající se dvojnásobně hyperboly (o vedlejší poloose b a lineární výstřednosti e) a mající střed na její vedlejší ose, jest poměr délky tečny, sestrojené proměnným bodem hyperboly ku kružnici, a jeho vzdálenosti od dotykové tětivy obou křivek stálý a rovný poměru $\frac{e}{b}$. *)

Sestrojíme-li průsek jednoplochého hyperboloidu rovinou S (opět bez omezení obecnosti nárysně promítací), dotýkající se kulové plochy S v bodě F a svírající s rovinou F úhel β, a označíme-li průsečnici $\mathsf{S} . \mathsf{F} \equiv f$ a její nárysnou stopu F_1, jest $P''F_1$ vzdálenost proměnného bodu P průseku od přímky f; platí pak

$$\frac{PM}{PN} = \frac{P''_0 M''_0}{P''F_1 . \sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha}, \text{ t. j.}$$

$$\frac{PF}{P''F_1} = \frac{PM}{P''F_1} = \frac{P''_0 M''_0}{P''F_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{e}{b} \sin\beta = konst,$$

t. j. průsek jest kuželosečka s ohniskem F, příslušnou řídící přímkou f a číselnou výstředností $\frac{e}{b}\sin\beta$. Tím rozšířena plat-

*) Také pro elipsu platí obdobná věta: *Sestrojíme-li kružnici dotýkající se dvojnásobně elipsy a mající střed na její vedlejší ose, jest poměr poloviční tětivy kružnice, sestrojené proměnným bodem elipsy kolmo na jeho spojnici se středem kružnice, a jeho vzdálenosti od dotykové tětivy obou křivek stálý a rovný poměru* $\frac{e}{b}$. Větu možno planimetricky snadno odvoditi. A obdobná věta platí tedy pro rotační elipsoid sploštělý a dotyčnou kulovou plochu.

nost věty Dandelinovy i na jednoplochý hyperboloid rotační. Druh průseku řídí se opět výrazem $\frac{e}{b} \sin \beta$.

5. Dle čl. 3. možno prostorovou interpretací řešiti snadno úlohu: *Sestrojiti kružnici, která majíc střed na ohniskové ose dané kuželosečky dotýká se jí dvojnásobně, je-li mimo to dána tečna (kuželosečku protínající) kružnice.* Stačí danou kuželosečku pokládati za meridián rotační plochy a danou tečnu za průmět její průsečné roviny k meridiánu kolmé. Sestrojíme-li ohnisko průseku pomocí jeho os, obdržíme tak dotyčný bod kružnice na tečně, čímž úloha řešena.

V deskriptivní geometrii vyskytuje se tato úloha při sestrojování vrženého stínu přímky na kulovou plochu. Určíme-li kružnice, dotýkající se dvojnásobně meze vrženého stínu kulové plochy, mající středy na její ohniskové ose a dotýkající se vrženého stínu přímky, jsou to vržené stíny oněch rovnoběžek kulové plochy (vzhledem k rovině vrženého stínu), kterých dotýká se vržený stín přímky na kulovou plochu; dotyčné body mají vržené stíny v dotyčných bodech vržených stínů rovnoběžek na vrženém stínu přímky.

O základní úloze integrálního počtu.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

I.

Hlavní věty infinitesimálního počtu odůvodňují se obyčejně na základě grafického znázornění funkcí známého z analytické geometrie. Daná funkce $f(x)$ jest znázorněna křivkou, jež má rovnici

$$y = f(x).$$

V bodě $M(x, y)$ křivky sestrojme tečnu, která svírá s osou Ox t. zv. *tečnový úhel* α (obr. 1.). Směrnice tečny $= tg\, \alpha$ jest funkcí proměnné x, což vyjádříme rovnicí

$$tg\, \alpha = \varphi(x).$$