Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Důsledky dvouvektorové theorie gravitační pro otáčenou zeměkouli

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 2-3, 232--243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124093

Důsledky dvouvektorové theorie gravitační pro otáčenou zeměkouli.

Napsal prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Označení vyskytujících se veličin a některé numerické hodnoty. *)

Obyčejný gravitační vektor Newtonův měří

$$|x|\,\frac{cm}{sec^2}.$$

Druhý gravitační vektor měří

$$|l|\,\frac{cm^2}{sec^3}.$$

Rychlost hodnoty měří

$$|U|\,\frac{cm}{sec}.$$

Specifická hmota měří

$$\varrho\,\frac{g}{cm^3};\ \text{pro zemi } 5{\cdot}50\,\frac{g}{cm^3}.$$

Energie krychlové jednotky měří

$$|W|\,\frac{g}{cm\,sec^2}.$$

Gravitační konstanta

$$\varkappa = \frac{66{\cdot}9}{10^9}\,\frac{cm^3}{g\,sec^2}.$$

Úhlová rychlost zeměkoule

$$\omega = \frac{72{\cdot}921}{10^6}\,\frac{1}{sec}.$$

Střední poloměr zeměkoule

$$a = 6{\cdot}371103\,.\,10^8\,cm.$$

Rychlost poruchů gravitačních

$$c = 2{\cdot}9989\,.\,10^{10}\,\frac{cm}{sec}.$$

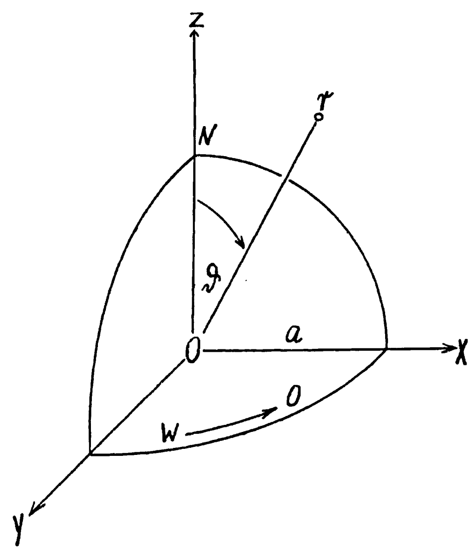
---

*) Numerické hodnoty jsou vzaty ze Strouhalovy „Mechaniky“, vyd. 2. z r. 1910; $\varkappa$ a ϱ na str. 274; „a“ na str. 274; ω na str. 357. Rychlost světla „c“ je Michelsonova z r. 1902.

Vyjádření theorie rovnicemi.

$$x_t - 4\pi\varkappa\varrho U = curl\, l; \quad -4\pi\varkappa\varrho = div\, x,$$
$$-l_t = c^2\, curl\, x; \quad 0 = div\, l,$$
$$W = C - \frac{|x|^2}{8\pi\varkappa} - \frac{|l|^2}{8\pi\varkappa c^2}.$$

Specialisace vzorců pro zeměkouli. Položíme počátek souřadnic do středu zeměkoule, osa „z“ nechť míří k severní točně; viz obr. 1.



Obr. 1.

Pak jest *uvnitř* zeměkoule

$$-4\pi\varkappa\varrho U = curl\, l; \quad -4\pi\varkappa\varrho = div\, x$$
$$0 = curl\, x; \quad 0 = div\, l.$$

A *vně* zeměkoule jest

$$0 = curl\, l; \quad 0 = div\, x$$
$$0 = curl\, x; \quad 0 = div\, l.$$

Tyto rovnice vyjadřují, že k stationární rotaci země náleží též stationární pole gravitační prvého i druhého vektoru.

Dvojí vyjádření rotace zemské. Rychlost hmotné částice v bodě x, y, z nazvali jsme „U", čím naznačeno, že složky rychlosti dle os jsou u, v, w. Poněvadž zeměkoule se točí od západu na východ (viz obr. 1.), vyjadřuje se rychlost rotace rovnicemi

$$u = \omega y$$
$$v = -\omega x$$
$$w = 0,$$

kde úhlovou rychlost ω třeba považovati za kladnou.

Na rovnicích předchozích vidíme, že

$$div\ U = 0,$$

že rychlost čisté rotace zachovává kontinuitu. Z toho plyne, že

$$U = curl\ A;\quad div\ A = 0.$$

Stačí pro náš účel, uhodneme-li jedno řešení těchto differencialních rovnic. Volím co nejjednodušší:

$$a = 0$$
$$b = 0$$
$$c = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2).$$

Na první pohled jest viděti, že vektor „A" zachovává kontinuitu; malou substitucí vyvineme *curl* tohoto vektoru a uvidíme, že to jest rychlost „U". Okolnosti té co nevidět použijeme.

Rovnice pro druhý vektor gravitační lze stáhnouti v podmínku

$$div\ l = 0;\quad -4\pi\varkappa\varrho U = curl\ l,$$

kde třeba vně zeměkoule položiti hustotu ϱ rovnu nulle. Neztratíme-li tuto okolnost z očí, smíme pro celý prostor klásti

$$div\ l = 0;\quad -4\pi\varkappa\varrho\ curl\ A = curl\ l.$$

Smluvíme nyní, že hustotu země budeme v prvém přiblížení považovati za konstantu. Pak jest

$$div\ l = 0;\quad curl\ (l + 4\pi\varkappa\varrho\ A) = 0.$$

Dimense druhého vektoru. Na výrazu pro krychlovou jednotku

$$W = C - \frac{|x|^2}{8\pi\varkappa} - \frac{|l|^2}{8\pi\varkappa c^2}$$

vidíme, že druhý vektor jest urychlením, jež násobeno rychlostí světla. Tento ohromný činitel kalí srovnávání numerických hodnot prvého a druhého vektoru gravitačního. Činitel ten nemá však přírodopisného významu, nestojí za ním žádná myšlenka. Dostal se do úvah tím, že jsme prvou serii gravitačních rovnic udělali co nejjednodušší. Můžeme však dimensi druhého vektoru do jisté míry ovládati. Zavedeme místo něho násobek s konstantou, jež má dimensi. Až budeme chtít srovnat druhé zemské pole s polem gravitačním, zavedeme vektor

$$\frac{l}{c},$$

jenž je také urychlením. Pro další počty jest však výhodnější zavésti vektor

$$h = \frac{l}{\sqrt{\varkappa}\, c},$$

pro který druhý člen gravitační energie se stane co nejjednodušším. Nově zavedený vektor „h" má rozměr intensity pole magnetického v soustavě elektromagnetické. Jest totiž

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{l}{c} \sim \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{cm}{sec^2} \sim \frac{g^{\frac{1}{2}}\,sec}{cm^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{cm}{sec^2} = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{cm^{\frac{1}{2}}\,sec}.$$

Lze tedy numerické hodnoty vektoru „h" srovnávati s numerickými hodnotami vektoru magnetického v gaussech.

Řešení rovnic. Zavedeme-li vektor „h" do rovnic pro vektor „l", obdržíme podmínky

$$div\, h = 0; \quad curl \left(h + \frac{4\pi\varkappa\varrho}{c\sqrt{\varkappa}} A \right) = 0.$$

Uvnitř země položíme ϱ rovno 5·50 $\frac{g}{cm^3}$, vně země je položíme rovno nulle. Druhá podmínka praví, že

$$h + \frac{4\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{c} A = grad\, P.$$

Spojíme-li to se sdělením prvé relace, jest

$$div \left(grad\, P - \frac{4\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{c} A \right) = 0.$$

Poněvadž *vně* zeměkoule hustota zmizí, jest venku

$$\Delta P = 0.$$

Ale relace ta platí též pro *vnitřek* zeměkoule, ježto

$$div\ A = 0.$$

Na rozhraní, na *povrchu* zeměkoule, zachovává vektor „h“ kontinuitu, t. j. normálová složka pod povrchem souhlasí s normálovou hodnotou nad povrchem. K pohodlnému vyjádření této myšlenky užijeme polárních souřadnic r, ϑ, φ. Počátek položíme do středu země, osa míří k severní točně. (Viz obr. 1.) Složka vektoru A směrem normály z koule ven jest

$$\frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)\frac{z}{r};$$

v polárních souřadnicích zní

$$\frac{\omega a^2}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta.$$

Kontinuitu normálních složek vektoru „h“ vyjadřuje rovnice:

$$\frac{\partial P_-}{\partial r} - \frac{4\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{c}\,\frac{\omega a^2}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta = \frac{\partial P_+}{\partial r},$$

kterou lze přepsati na

$$\frac{\partial P_+}{\partial r} - \frac{\partial P_-}{\partial r} = -\frac{2\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho\omega a^2}{c}(1 - \cos^2 \vartheta) \cos \vartheta.$$

Index — značí, že jde o potencial uvnitř koule, index +, že jde o potencial zevní. Oba potencialy vyhovují rovnici Laplaceově:

$$\Delta P_+ = 0;.\ \Delta P_- = 0.$$

Potencialová úloha. Abychom nalezli rozdělení vektoru „h“ uvnitř i vně zeměkoule, třeba nalézti potencial „P“, jenž vně i uvnitř koule vyhovuje rovnici Laplaceově, při čemž na povrchu jejím normálová složka jest předepsaným způsobem rozpojitá. Úkol ten řeší se pomocí kulových funkcí. Rozpojitost normální složky rozvine se dle kulových funkcí. To jest v našem případě velice snadné, poněvadž výraz

$$(1 - \cos^2 \vartheta) \cos \vartheta$$

lze vyjádřiti pomocí I. a III. zonální funkce kulové

$$q_1 = \cos\vartheta$$
$$q_3 = \cos^3\vartheta - \frac{3}{5}\cos\vartheta.$$

Jest pak

$$\cos\vartheta - \cos^3\vartheta = \frac{2}{5}q_1 - q_3.$$

Třeba tedy nalézti potencial „P“, jenž vně i uvnitř koule vyhovuje rovnici Laplaceově

$$\Delta P = 0,$$

při čemž na povrchu koule

$$\overline{\Big/}^{r=a}\left(\frac{\partial P_+}{\partial r} - \frac{\partial P_-}{\partial r}\right) = -m\left(\frac{2}{5}q_1 - q_3\right),$$

kde zkratka

$$m = \frac{2\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho\omega a^2}{c}.$$

Pak jest vně koule

$$P_+ = +ma\left[\frac{2}{15}\left(\frac{a}{r}\right)^2 q_1 - \frac{1}{7}\left(\frac{a}{r}\right)^4 q_3\right],$$

a uvnitř koule

$$P_- = +ma\left[\frac{2}{15}\left(\frac{r}{a}\right) q_1 - \frac{1}{7}\left(\frac{r}{a}\right)^3 q_3\right].$$

Že tyto výrazy vně a uvnitř koule vyhovují rovnici Laplaceově, jest důsledkem toho, že jsou aditivně složeny z prostorových funkcí kulových. Že vyhovují podmínce povrchové, ověříme přímo. Obecně jest

$$\frac{\partial P_+}{\partial r} = +ma\left[-\frac{4}{15}\frac{a^2}{r^3}q_1 + \frac{4}{7}\frac{a^4}{r^5}q_3\right],$$
$$\frac{\partial P_-}{\partial r} = +ma\left[+\frac{2}{15}\frac{1}{a}q_1 - \frac{3}{7}\frac{r^2}{a^3}q_3\right].$$

Na povrchu země jest

$$\overline{\Big/}^{r=a}\frac{\partial P_+}{\partial r} = m\left[-\frac{4}{15}q_1 + \frac{4}{7}q_3\right],$$
$$\overline{\Big/}^{r=a}\frac{\partial P_-}{\partial r} = m\left[+\frac{2}{15}q_1 - \frac{3}{7}q_3\right].$$

Odečteme a dostaneme

$$\int^{r=a}\left(\frac{\partial P_+}{\partial r}-\frac{\partial P_-}{\partial r}\right)=m\left[-\frac{6}{15}q_1+q_3\right]=-m\left[\frac{2}{5}q_1-q_3\right],$$

jak předepsáno.

Tím jsme se zmocnili „h“-vektoru vně i uvnitř zeměkoule.

Druhé vnější pole zeměkoule. Vektor „h“ tohoto pole, jenž má rozměr intensity magnetického pole, jest gradientem potencialu

$$P=ma\left[\frac{2}{15}\left(\frac{a}{r}\right)^2 q_1-\frac{1}{7}\left(\frac{a}{r}\right)^4 q_3\right].$$

Zpracujeme jej tímže způsobem jako zemský magnetism. Vodorovnou složku „H“ budeme čítati k severu kladně, t. j. směrem ubývajícího „ϑ“ kladně. Svislou složku „V“ čítáme kladně do země, t. j. směrem klesajícího r.

Obecně jest složka vektoru „h“ směrem rostoucího „r“ a „ϑ“

$$\frac{\partial P}{\partial r}=ma\left[-\frac{4}{15}\frac{a^2}{r^3}q_1+\frac{4}{7}\frac{a^4}{r^5}q_3\right],$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \vartheta}=m\frac{a}{r}\left[\frac{2}{15}\left(\frac{a}{r}\right)^2 q'_1-\frac{1}{7}\left(\frac{a}{r}\right)^4 q'_3\right],$$

proto jest na povrchu (s obráceným znaménkem)

$$V=m\left[\frac{4}{15}q_1-\frac{4}{7}q_3\right],$$

$$H=m\left[-\frac{2}{15}q'_1+\frac{1}{7}q'_3\right].$$

Úhel inklinace jest „i“, čítaný jako při zemském magnetismu. Jest pak

$$tg\, i=\frac{\frac{4}{15}q_1-\frac{4}{7}q_3}{-\frac{2}{15}q'_1+\frac{1}{7}q'_3}.$$

Dosadíme-li v posledních vzorcích

$$q_1=\cos\vartheta;\quad q'_1=-\sin\vartheta,$$

$$q_3=\cos^3\vartheta-\frac{3}{5}\cos\vartheta\qquad q'_3=-3\left(\cos^2\vartheta-\frac{1}{5}\right)\sin\vartheta,$$

dostaneme

$$V = m\left[\frac{4}{15} + \frac{12}{35} - \frac{4}{7}\cos^2\vartheta\right]\cos\vartheta,$$

$$H = -m\left[-\frac{2}{15} - \frac{3}{35} + \frac{3}{7}\cos^2\vartheta\right]\sin\vartheta,$$

$$tg\, i = -\frac{\frac{64}{105} - \frac{4}{7}\cos^2\vartheta}{-\frac{23}{105} + \frac{3}{7}\cos^2\vartheta}\, cotg\,\vartheta,$$

což lze upraviti na tvar

$$V = \frac{m}{105}[64 - 60\cos^2\vartheta]\cos\vartheta,$$

$$H = \frac{m}{105}[23 - 45\cos^2\vartheta]\sin\vartheta,$$

$$tg\, i = \frac{64 - 60\cos^2\vartheta}{23 - 45\cos^2\vartheta}\, cotg\,\vartheta.$$

Zaveďme ještě místo polové distance „ϑ“ geografickou šířku „φ“, kde

$$\sin\vartheta = \cos\varphi; \qquad \cos\vartheta = \sin\varphi,$$

(viz obr. 2.) pak jest

$$\begin{aligned} V &= 0{\cdot}609\, m\,[1 - 0{\cdot}94\cos^2\vartheta]\cos\vartheta \\ &= 0{\cdot}609\, m\,[1 - 0{\cdot}94\sin^2\varphi]\sin\varphi, \\ H &= 0{\cdot}219\, m\,[1 - 1{\cdot}96\cos^2\vartheta]\sin\vartheta \\ &= 0{\cdot}219\, m\,[1 - 1{\cdot}96\sin^2\varphi]\cos\varphi, \end{aligned}$$

$$tg\, i = 2{\cdot}79\,\frac{1 - 0{\cdot}94\sin^2\varphi}{1 - 0{\cdot}96\sin^2\varphi}\, tg\,\varphi.$$

Nyní si vypočítáme numerickou hodnotu konstanty

$$m = \frac{2\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho\omega a^2}{c}.$$

Nejprvé vypočítáme onen díl konstanty „m“, jenž jest všem rotujícím koulím společný

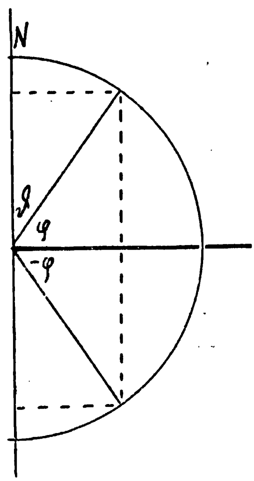
$$\frac{2\pi\sqrt{\varkappa}}{c} = \frac{2\pi}{3\,.\,10^{10}}\sqrt{\frac{669}{10^{10}}} = 54{\cdot}4\,.\,10^{-15}.$$

Pak vypočítáme díl vztahující se na zeměkouli

$$\varrho \omega a^2 = 5{\cdot}5 \,.\, \frac{72{\cdot}9}{10^6} (6{\cdot}37 \,.\, 10^8)^2 = 0{\cdot}163 \,.\, 10^{15}.$$

Součin těchto dvou hodnot dává pro zemi

$$m = 54{\cdot}4 \,.\, 0{\cdot}163 = 8{\cdot}87.$$



Obr. 2.

Dosadíme do rovnic pro „*V*, *H*, *i*" a dostaneme

$$V = 5{\cdot}40 \sin\varphi \,[1 - 0{\cdot}94 \sin^2\varphi],$$
$$H = 1{\cdot}95 \cos\varphi \,[1 - 1{\cdot}96 \sin^2\varphi],$$
$$tg\, i = 2{\cdot}77\, tg\,\varphi \frac{1 - 0{\cdot}94 \sin^2\varphi}{1 - 1{\cdot}96 \sin^2\varphi}.$$

V těchto rovnicích má „*V*, *H*" dimensi intensity magnetického pole. Jest přirozeno, že toto pole porovnáme s polem zemského magnetismu. Toto dá se dle Gaússe a sl. Bezolda*) vyjádřiti v absolutní míře relacemi

$$V = 0{\cdot}660 \sin\varphi,$$
$$H = 0{\cdot}330 \cos\varphi,$$
$$tg\, i = 2\, tg\,\varphi.$$

---

*) Viz Arrhenius „Kosmische Physik", svazek II. R. 1903. Str. 973.

Vzorci těmi vyjádřen arci zemský magnetism jen v prvém přiblížení. Ale také naše složitější vzorce „h"-vektoru jsou jen přiblížením. Nedbali jsme různé hustoty zeměkoule v hlubinách. Proto jsou číselné hodnoty u „V" i „H" příliš veliké. Ale přes to stačí srovnání přibližných relací, aby se nám takřka vnutil závěr:

Vektor „h", mající rozměr magnetické intensity, jest opravdu magnetickým vektorem.

Druhý gravitační vektor

$$l = c\sqrt{\varkappa}\, h$$

liší se jen rozměrem od vektoru magnetického, jest vektorem magnetickým vyjádřeným v nezvyklé míře.

Nyní pochopíme úchylku v numerických hodnotách. Vždyť jsme při počtu se nestarali o permeabilitu povrchových vrstev zeměkoule, jež se projevuje jižní magnetisací hor a ostrovů na severní polokouli, a opačnou na polokouli jižní. Hlavním činitelem emitujícím silokřivky zemĕmagnetické jest asi hutné jádro, jehož rozměry se podaří časem určiti pomocí zemětřesných vln. Ty (silokřivky magnetické) se pak lámou od kolmice vstupujíce do obalu aspoň slabé magnetisace schopného. V geologické struktuře jeho třeba hledati příčiny pro odchýlení zemského magnetismu od schematického rotačního rozdělení. Je naděje, že časem na základě těchto theorií dostaneme informace o hustotě a permeabilitě nitra zemského a geologická sdělení o její kůře.

K této theorii zemského magnetismu poznamenávám, že jsem svými studiemi gravitačními byl k ní doveden. Nehledal jsem ji, ba musím se přiznati, že dříve o theorii zemského magnetismu vůbec jsem se nezajímal.

Měření na malých modelech zeměkoule. Poloměr zeměkoule měří

$$6.370\ km.$$

Deset milionů-krát menší model její má v poloměru

$$63{\cdot}7\ cm,$$

což jest hodnota vhodná k laboratorním pokusům.

Newtonův vektor na povrchu zeměkoule měří

$$981 = \varkappa\,\frac{4\pi}{3}\,a^3\,.\,\frac{\varrho}{a^2} = \frac{4\pi\varkappa\varrho}{3}\,.\,a.$$

Je tedy vektor na povrchu poloměru koule úměrný. Proto jest intensita na povrchu malého modelu země 10 milionů-krát menší. Poprvé zjistil ji lord Cavendish, když Coulomb vynalezl točivé vážky vhodné k měření tak malinkých sil.

Potencial na povrchu rotující zeměkoule, jehož gradientem jest intensita magnetického vektoru na povrchu zeměkoule, dán přibližně vzorcem

$$\frac{2\pi\sqrt{\varkappa}\,\varrho\omega a^2}{c}\,a\left[\frac{2}{15}\left(\frac{a}{r}\right)^2 q_1 - \frac{1}{7}\left(\frac{a}{r}\right)^4 q_3\right].$$

Vzorec ten musí platiti přesně pro malý model rotující zeměkoule, je-li koule ta homogenní a není-li z materiálu feromagnetického. Vyvinou-li se z potencialu derivováním síly, ukáže se, že jsou úměrny čtverci zemského poloměru. Jsou tedy intensity řádově

100 billionů

krát menší než intensita zemského magnetismu na povrchu zeměkoule.

To vypadá beznadějně. Ale není přece nutno, aby se náš model otočil jen jednou kol své osy za 24 hodiny! Dejme jej na pružnou ocelovou osu a zasaďme do rovníku jeho parní turbinu. Turbina Lavalova s průměrem 50 *cm* může se otočiti 317-krát za vteřinu. Pak činí úhlová rychlost její

$$2000\,\frac{1}{sec},$$

kdežto úhlová rychlost zeměkoule měří jen

$$72{\cdot}9\,.\,10^{-6}\,\frac{1}{sec}.$$

Tu by se model točil

27·4 . 10^6-krát

rychleji než země a pole magnetické bude nyní asi

4 milliony-krát

slabší než pole zemského magnetismu. To je hodnota téhož řádu jako u pole gravitačního. Ale máme ještě jednu myšlenku v reservě. Uděláme-li kouli z měkkého železa, zabezpečíme si ty výhody, jež máme, vsuneme-li do solenoidu železné jádro. Řádově stane se tím intensita

1000-krát

větší, tak že celkem bude pole na povrchu

4.000-krát

slabší než intensita zemského magnetismu. Pole to měřilo by na povrchu koule řádově

několik tisícin

absolutních jednotek, t. z. gaussů. Do dálky od koule by sláblo s třetí mocninou vzdálenosti.

Jemné přístroje ku pozorování zemského magnetismu dávají ještě jednotky pátého místa za desetinnou tečkou, stačí tedy ku měření

stotisícin gaussů.

Je tedy experimentální ověření těchto myšlenek již na hranici dosažitelného. Ovšem šlo by o pokus tak nákladný a subtilní, jako jest určení gravitační konstanty. Jsou však ještě jiné možnosti a vyhlídky na ověření theorie, jež by ale vybočovaly z rámce tohoto pojednání.

Důsledky akusticko-dynamického principu.

Napsal školní rada **František Kaňka.**

I. *Napodobení obrazců pod znějícími deskami.*

A. Fysikální poznatky. — Pojednávaje experimentálně o akustickodynamickém principu [1]), vyšel jsem ode dvou význačných obrazců pod znějící deskou (obr. 1. a obr. 2. tamtéž), na nichž byla patrna spojitost i rozpojitost vírných polí s křivkami lemniskatovými. V dalším postupu práce podařilo se mi zatím napodobiti pouze trojdílný obr. 1. třemi vírnými skupinami [2]); zůstalo však otázkou, jak lze napodobiti čtyřdílný obr. 2. i jiné složité obrazce?

---

[1]) Tento Časopis roč. 42., str. 431.

[2]) Tamtéž obr. 8. a obr. 24.