Jan Sobotka

Poznámka o involuci bikvadratické

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 3, 242--244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124055

Poznámka o involuci bikvadratické.

Napsal *J. Sobotka.*

R. Sturm odvozuje v I. svazku svého díla: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften (str. 184) větu: »Tři skupiny prvků po třech v útvaru základním dají se čtvrtými prvky tak doplniti, že vzniknou tři skupiny involuce 4. stupně.«

Větu vyslovenou vyvozuje z toho, že jsou-li dány rovnice třetího stupně $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$, lze jednoznačně stanoviti veličiny a_1, a_2, a_3, λ, μ tak, aby

$$(x - a_3) f_3(x) \equiv \lambda (x - a_1) f_1(x) + \mu (x - a_2) f_2(x).$$

Důkaz geometrický věty a zároveň konstrukci uvedených tří elementů čtvrtých můžeme snadno provésti, když přenesem zmíněné útvary na kuželosečku k.

Obdržíme takto na k skupiny bodů $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$. Body, které tyto skupiny mají doplňovati buďtež příslušně A, B, C. Mají-li skupiny $A_1 A_2 A_3 A$, $B_1 B_2 B_3 B$, $C_1 C_2 C_3 C$ náležeti též involuci bikvadratické J na k, a položíme-li prvou skupinou nějakou kuželosečku a, druhou skupinou kuželosečku b, budou tyto určovati svazek kuželoseček, protínajících se v bodech M, N, P, Q a kuželosečka c, která prochází body C_1, C_2, C_3, C a jedním z bodů právě uvedených, musí procházeti též třemi ostatními.

Jelikož kuželosečky a, b jsou jinak libovolné, můžeme je voliti tak, aby prvá se rozkládala na př. v přímky $(A_1 A_2)$, $(A_3 A)$ druhá v přímky $(B_1 B_2)$, $(B_3 B)$. Označme přímku $(A_1 A_2)$ krátce p_α, přímku $(B_1 B_2)$ pak p_β. Jejich průsečík zvolme za bod M. Kuželosečka c musí v tomto případě procházeti body M, C_1, C_2, C_3, C, musí tudíž náležeti svazku (c) kuželoseček, jež obsahují body M, C_1, C_2, C_3. Budiž c' libovolná křivka v (c). Ona protne p_α ještě v bodě N' a p_β v bodě P'. Přímky $(B_3 N')$, $(A_3 P')$ se protnou v bodě Q' a křivku c' protnou ještě v bodech B'_3, A'_3, které budou obecně od sebe různé. Kdyby ale splynuly, pak by s nimi musel splynouti též bod Q', v kterémžto případě by kuželosečka c', dále kuželosečka skládající se z přímek $(A_1 A_2)$, $(A_3 P')$ jakož i kuželosečka, skládající se z přímek $(B_1 B_2)$, $(B_3 N')$, náležely svazku o bodech základních M, N', P', Q'.

Svazek kuželoseček a promětný k němu svazek přímek, jsou-li v téže rovině, vytvořují křivku řádu třetího. Protínají-li se příslušné sobě prvky těchto svazků na přímce, pak se křivka 3. řádu rozkládá v tuto přímku a v kuželosečku. K tomu zvláštnímu vztahu jsme zde vedeni.

Poněvadž přímky p_α a p_β procházejí základním bodem M svazku (c) kuželoseček, protnou křivky toho svazku p_α a p_β v řadách bodových promětných $N', \ldots$ a $P', \ldots$

Měníme-li křivku c' dajíce jí probíhati svazek (c), popíše tudíž bod A'_3 kuželosečku u a bod B'_3 kuželosečku v. Zvolíme-li bod P' v průsečíku P'_1 přímky $(A_3 C_1)$ s p_β jest příslušná křivka c' stanovena body C_1, C_2, C_3, M a P'_1; následkem toho příslušný bod A'_3 splývá tu s C_1. Z toho plyne, že křivka u prochází body C_1, C_2, C_3. Ona prochází též bodem A_3, jak patrno z toho, že jedna křivka v (c) prochází též bodem A_3. Bodem M však křivka u neprochází. Neboť kdybychom zvolili křivku c' v (c) tak, aby se v M dotýkala přímky p_β pak seznáváme, že příslušný bod $P' \equiv M$ a příslušný průsečík A'_3 leží na přímce $(M A_3)$ a jest různý od bodu M.

Obdobně soudíme, že místem bodů B'_3 jest kuželosečka v, která prochází body C_1, C_2, C_3 a B_3, která ale rovněž neprochází bodem M.

Křivky u, v se protínají v bodech C_1, C_2, C_3; mají tudíž ještě jeden bod společný Q^*, kterým prochází jedna křivka svazku (c). Libovolná křivka c' tohoto svazku má tu vlastnost, že mimo body C_1, C_2, C_3 protíná u v bodě A'_3, v v bodě B'_3 tak, že přímka $(A'_3 A_3)$ prochází jejím průsečíkem P' s p_β a přímka $(B'_3 B_3)$ jejím průsečíkem N' s p_α Křivka v (c) obsahující body C_1, C_2, C_3, M a Q^*, pro niž tedy jest $A'_3 \equiv B'_3 \equiv Q^*$, má tudíž tu vlastnost, že její další průsečík s p_β leží na přímce $(A_3 Q^*)$ a průsečík s p_α na přímce $(B_3 Q^*)$. **Tyto body jsou tudíž hledané body P a N, kdežto Q^* splývá s bodem Q. Křivka tato jest tedy totožná s křivkou c.**

Máme tu body M, N, P, Q jakožto základní body ve svazku kuželoseček, v němž jedna se rozkládá v přímku $(A_1 A_2)$ a přímku $(A_3 P)$, která protíná k ještě v bodě A. Další kuželosečka toho svazku se rozkládá v přímku $(B_1 B_2)$ a v přímku $(B_3 N)$, která protíná k ještě v bodě B a oba páry těchto přímek se protínají právě v bodech M, N, P, Q, jimiž prochází též křivka c. Tím jest vyslovená věta dokázána.

Shrneme-li tento výsledek, docházíme k následující konstrukci: Dva z bodů prvé skupiny, na př. A_1, A_2 spojíme přímkou p_α, dva z bodů druhé skupiny, na př. B_1, B_2 přímkou p_β průsečík obou přímek jest M. Ve svazku kuželoseček o základních bodech M, C_1, C_2, C_3 zvolíme si dvě, které degenerují v páry přímek; na př. (MC_1), $(C_2 C_3)$ a (MC_2), $(C_1 C_3)$. Protneme $(C_2 C_3)$ přímkami p_α, p_β v bodech N_1, P_1 a přímku (MC_1) přímkou $(A_3 P_1)$ v bodě A'_3, přímkou $(B_3 N_1)$ v bodě B'_3; obdobně protneme $(C_1 C_3)$ přímkami p_α. p_β v bodech N_2, P_2 a přímku (MC_2) přímkou $(A_3 P_2)$ v bodě A''_3, přímkou $(B_3 N_2)$ v bodě B''_3.

Body C_1, C_2, C_3, A_3, A'_3, A''_3, prochází kuželosečka u, body C_1, C_2, C_3, B_3, B'_3, B''_3, kuželosečka v. Ze známé vlastnosti plyne tu, **že přímky $(A'_3 A''_3)$, $(B'_3 B''_3)$ se protínají v bodě, jehož spojnice** s bodem C_3 prochází zbývajícím bodem průsečným křivek u, v, jejž lze lineárně pomocí věty Pascalovy sestrojiti. Tím jest křivka c

dána. Obdobně sestrojíme pro křivku c další bod průsečný C s k, kdežto konstrukce bodů A a B byla již prve uvedena.

Konstrukci tu lze ale ještě poněkud zjednodušiti. Když jsme sestrojili bod Q a tím i body A a B, můžeme přímky $(A_1 A_2)$, $(A_3 A)$ protnouti přímkou $(C_1 C_2)$ v bodech H_1, H_2, které s B_1, B_2, B_3, B leží na kuželosečce. Sestrojíme průsečík druhý této kuželosečky s přímkou $(A_1 A_2)$ anebo $(A_3 A)$ a spojíme průsečík ten s bodem C_3 přímkou, na níž leží hledaný bod C.

Správnost konstrukce jest patrna z toho, že skupinami $A_1 \dots A$, $B_1 \dots B$, $C_1 \dots C$ lze položiti kuželosečky ve svazku, jemuž náleží dvojice přímek $(A_1 A_2)$, $(A_3 A)$ a $(C_1 C_2)$ $(C_3 C)$, takže body H_1, H_2 a průsečíky prvé dvojice s $C_3 C$ leží s body B_1, B_2, B_3, B na kuželosečce.

Konstrukce jest nezávislá na tom, zda-li $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ jsou dvojice bodů reálných či sdruženě imaginárních.

*

Remarque concernant l'involution biquadratique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne une démonstration géométrique du théorème qui dit qu'on peut compléter trois ternes d'éléments d'une figure fondamentale respectivement par un quatrième élément de sorte qu'on obtienne trois groupes d'une involution biquadratique; il y ajoute la construction respective.