Matyáš Lerch

Zjednodušení Lejeune-Dirichletova postupu při odvození vzorců pro počet tříd kvadratických forem záporného diskriminantu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 4, 425--446

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124045

Zjednodušení Lejeune-Dirichletova postupu při odvození vzorců pro počet tříd kvadratických forem záporného diskriminantu.

Sdílí **M. Lerch.**

Buď $-\varDelta$ libovolný záporný diskriminant, t. j. $\varDelta$ celistvé kladné číslo tvaru $4k+3$ neb $4k$, a Legendreovské znaménko v Kroneckerově úpravě

$$\left(\frac{-\varDelta}{m}\right),$$

jež značí nullu, mají-li čísla $\varDelta$ a m společného dělitele > 1, dále pro $m = 2^a n$, n liché

$$\left(\frac{-\varDelta}{m}\right)=\left(\frac{2}{\varDelta}\right)^a\left(\frac{-\varDelta}{n}\right),$$

při čemž pro *lichá* $\varDelta$, n a rozklady $\varDelta = D'\varDelta'$, $n = n'n''$ platí

$$\left(\frac{-\varDelta' D'}{n}\right)=\left(\frac{-\varDelta'}{n}\right)\left(\frac{D'}{n}\right),\quad \left(\frac{-\varDelta}{n'n''}\right)=\left(\frac{-\varDelta}{n'}\right)\left(\frac{-\varDelta}{n''}\right)$$

a zákon reciprocity

$$\left(\frac{-\varDelta}{n}\right)=\left(\frac{n}{\varDelta}\right).$$

Při tom dále buď vzpomenuto základních vlastností

$$\left(\frac{-\varDelta}{m+k\varDelta}\right)=\left(\frac{-\varDelta}{m}\right),\quad (m>0,\ k\geqq 0),$$

$$\left(\frac{-\varDelta}{\varDelta-m}\right)=-\left(\frac{-\varDelta}{m}\right),\quad (0<m<\varDelta),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{-\varDelta}{\nu}\right)=0.$$

Definice symbolu pro záporné jmenovatele, která spočívá v rovnici

$$\left(\frac{-\varDelta}{m}\right)=\left(\frac{-\varDelta}{-m}\right),$$

je pro následující úvahy bez významu.

Při označení $Cl\,(-\varDelta)$ počtu tříd kvadratických forem kladných a prvotních typu

$$ax^2+bxy+cy^2 \quad \text{či} \quad (a,\ b,\ c)$$

s daným diskriminantem $-\varDelta=b^2-4ac$ zní základní výsledek Dirichletův*)

$$Cl\,(-\varDelta)=\frac{\tau\sqrt{\varDelta}}{2\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{-\varDelta}{h}\right)\frac{1}{h}, \tag{1}$$

s významem litery τ

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \quad \text{pro} \quad \varDelta > 4,\\ \tau &= 4 \quad\ \ „ \quad\ \ \varDelta = 4,\\ \tau &= 6 \quad\ \ „ \quad\ \ \varDelta = 3. \end{aligned}$$

Vyjádření řady (1) v zakončeném tvaru a odvození všech vzorců, jež podal Dirichlet pro různé tvary diskriminantu, věnovány jsou následující řádky.

Řadu

$$P=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\varDelta}{h}\right)\frac{1}{h}$$

považovati lze za limitu součtu

$$P_m=\sum_{h=1}^{m\varDelta}\left(\frac{-\varDelta}{h}\right)\frac{1}{h}$$

pro nekonečně rostoucí m. Substitucí

$$h=\nu+k\varDelta \quad (\nu=1,\ 2,\ldots\varDelta;\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots m-1)$$

máme nejprve

$$\left(\frac{-\varDelta}{h}\right)=\left(\frac{-\varDelta}{\nu}\right),\quad \frac{1}{h}=\frac{1}{\left(\frac{\nu}{\varDelta}+k\right)\varDelta},$$

*) Srov. též Rozpravy Čes. Akad., ročník VII. číslo 5, str. 21, 29 a 40.

tedy

$$P_m = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\Delta}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\frac{\nu}{\Delta}+k}.$$

Vložíme-li sem $\Delta - \nu$ za ν, reprodukují se členy, a poněvadž

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta-\nu}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

vyjde sečtením obou tvarů

$$2P_m = \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\Delta}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\frac{\nu}{\Delta}+k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\frac{\nu}{\Delta}-k}\right);$$

tu pak jest dle elementárního vzorce

$$\pi \, cotg \, x\pi = \lim_{m=\infty}\sum_{k=-m}^{m}\frac{1}{x+k} = \lim_{m=\infty}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{x+k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x-k}\right)$$

vnitřní součet konvergentním výrazem pro $m = \infty$ a jeho hodnota

$$\pi \, cotg \frac{\nu\pi}{\Delta};$$

tím vychází vzorec

$$\frac{2\Delta P}{\pi} = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) cotg \frac{\nu\pi}{\Delta} \tag{2}$$

aneb vzhledem k (1) t. j.

$$P = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{\Delta}} Cl(-\Delta)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) cotg \frac{\nu\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta), \tag{2*}$$

jejž po mém vědomí první podal V. A. Lebesgue*), a jenž platí pro veškery záporné diskriminanty.

Z tohoto vzorce vycházeje podal jsem**) r. 1898 algebraické odvození elementárních vzorců Dirichletových, jež platí

*) Journal de mathém. pures et appl. t. 15 (1e série) 1850.

**) l. c. str. 40 a násl.

pro t. zv. diskriminanty *základní* neb *hlavní*, t. j. takové, které nemají forem imprimitivních, takže tu je Δ prosto kvadratických dělitelů lichých, a v případě sudého Δ je toto číslo tvaru

$$4\,(4k+1) \text{ neb } 8\,(4k\pm 1).$$

K témuž cíli lze dospěti značně jednodušším apparátem formálním, jak nyní ukážeme.

Pro hlavní diskriminanty platí vztahy, jež v podstatě pocházejí od Gausse

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)e^{\frac{2\nu h\pi i}{\Delta}}=\left(\frac{-\Delta}{h}\right)i\sqrt{\Delta},\quad h>0. \tag{3}$$

Dále jest

$$cotg\,\frac{\nu\pi}{\Delta}=i\frac{\xi^\nu+1}{\xi^\nu-1},\quad \xi=e^{\frac{2\pi i}{\Delta}},$$

či lépe

$$cotg\,\frac{\nu\pi}{\Delta}=2i\frac{\xi^\nu}{\xi^\nu-1}-i. \tag{a}$$

Podle toho lze rovnici (2*) psáti

$$\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta)=\frac{i}{\sqrt{\Delta}}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\xi^\nu}{\xi^\nu-1}, \tag{2^a}$$

a pravá strana se snadno určí, užije-li se interpolačního vzorce Lagrangeova

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varphi(x_\nu)}{f'(x_\nu)\,(x-x_\nu)},$$

$$f(x)=(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

v němž $\varphi(x)$ značí polynom stupně $n-1$.

Klademe-li zde $f(x)=x^\Delta-1$, a za $\varphi(x)$ polynom

$$Q(x)=\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)x^\nu, \tag{4}$$

vyjde vzhledem k rovnici (3), kterou lze psáti

$$Q(\xi^h)=\left(\frac{-\Delta}{h}\right)i\sqrt{\Delta},$$

vzorec:

$$Q(x) = (x^{\Delta} - 1) \sum_{h=1}^{\Delta-1} \frac{\left(\frac{-\Delta}{h}\right) i\sqrt{\Delta}}{\Delta \xi^{\nu\Delta-\nu}(x-\xi^{\nu})},$$

t. j.

$$Q(x) = \frac{i}{\sqrt{\Delta}}(x^{\Delta}-1) \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\xi^{\nu}}{x-\xi^{\nu}}, \quad \xi = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}. \quad (5)$$

Z tohoto vztahu vychází derivováním na místě $x = 1$

$$Q'(1) = \frac{i}{\sqrt{\Delta}} \Delta \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{\xi^{\nu}}{1-\xi^{\nu}},$$

tedy dle (2^a)

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu = -\Delta \cdot \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta), \quad (6)$$

hlavní vzorec v Kroneckerově úpravě theorie Dirichletovy; platí pro veškery záporné diskriminanty hlavní.

Tento poslední vzorec možno psáti

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \Re\left(\frac{\nu}{\Delta}\right) = -\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta), \quad (b)$$

kde $\Re(x)$ značí periodickou funkci $x - [x]$, nejmenší kladný zbytek veličiny x.

Vložíme-li sem za ν libovolnou úplnou soustavu zbytků $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{\Delta}$ modulu Δ, avšak složenou z kladných čísel, obdržíme součet (b) ve tvaru

$$\sum_{1}^{\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\varrho_\nu}\right) \Re\left(\frac{\varrho_\nu}{\Delta}\right).$$

Toho užijeme kladouce pro složený diskriminant

$$-\Delta = -\Delta' \cdot D,$$

kde $-\Delta'$ a D jsou hlavní diskriminanty patrně nesoudělné, první záporný, druhý kladný, za čísla ν soustavu čísel

$$\nu = \alpha\Delta' + \beta D \quad (\alpha = 1, 2, \ldots D; \quad \beta = 1, 2, \ldots \Delta').$$

Tím vznikne

$$\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(\frac{-\Delta'}{\nu}\right)\left(\frac{D}{\nu}\right) = \left(\frac{-\Delta'}{\beta D}\right)\left(\frac{D}{\alpha\Delta'}\right)$$

a poněvadž o diskriminantech platí

$$\left(\frac{-\Delta'}{D}\right)=\left(\frac{D}{\Delta'}\right),$$

vyjde

$$\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\left(\frac{-\Delta'}{\beta}\right)\left(\frac{D}{\alpha}\right).$$

Dále

$$\Re\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)=\Re\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta'}\right),$$

a tedy nacházíme vztah*) (zvláštní případ ještě obecnějšího)

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)\Re\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right)=-Cl\,(-\Delta D), \tag{7}$$

při čemž psáno samozřejmě $\tau=2$, ježto zde diskriminant jest absolutně větší než 4 a vynechána čárka u Δ; summační podmínky jako výše znějí

$$0<\alpha<D$$
$$0<\beta<\Delta.$$

Zavedeme-li hodnotu

$$\Re\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right)=\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}-E\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right),$$

odpadne část první

$$\sum_1^D\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sum_1^\Delta\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right)=\sum_1^D\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sum_1^\Delta\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)\frac{\beta}{\Delta}=0$$

následkem vztahů

$$\sum_1^D\left(\frac{D}{\alpha}\right)=0,\quad \sum_1^\Delta\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)=0,$$

a zbude rovnice**)

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)E\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right)=Cl\,(-\Delta D), \tag{8}$$

---

*) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut national de France, T. XXXIII., n⁰ 2 (předloženo v září 1899), str. 40, vzorec (15). Též Acta mathematica, T. 29, str. 373, vzorec (16).

**) l. c. str. 41.

kterou nyní přetvoříme tím, že u vnitřním součtu

$$\sum_\beta \sum_\alpha \left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)\left(\frac{D}{\alpha}\right) E\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right)$$

podržíme členy $\alpha = 1, 2, \ldots [\frac{D}{2}]$, a v ostatních píšeme $D - \alpha$ za α; jelikož

$$\left(\frac{D}{D-\alpha}\right)=\left(\frac{D}{\alpha}\right),$$

máme

$$Cl\,(-\Delta D) = \sum_{\beta=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)\sum_{\alpha=1}^{[\frac{D}{2}]}\left(\frac{D}{\alpha}\right) E\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right)\sum_{1}^{[\frac{D}{2}]}\left(\frac{D}{\alpha}\right) E\left(1+\frac{\beta}{\Delta}-\frac{\alpha}{D}\right). \qquad (c)$$

Čísla

$$E\left(\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}\right),\quad E\left(1+\frac{\beta}{\Delta}-\frac{\alpha}{D}\right)$$

mají hodnoty 0 neb 1; nullové členy vynecháme, a od nully různou hodnotu podá první výraz při

$$\frac{\alpha}{D}+\frac{\beta}{\Delta}>1 \text{ t. j. } \beta > \Delta\left(1-\frac{\alpha}{D}\right),$$

takže první agregát na pravé straně (c) zní

$$\sum_{\alpha=1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sum_{\beta>\Delta-\frac{\alpha\Delta}{D}}\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right);$$

píšeme-li zde $\beta = \Delta - \nu$, obdrží tento výraz tvar

$$-\sum_{1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sum_{\nu=1}^{[\frac{\alpha\Delta}{D}]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right). \qquad (d)$$

V druhém součtu na pravé straně (c) jsou členy od nully různé pro

$$\beta > \frac{\alpha\Delta}{D},$$

součet ten zní tedy

$$\sum_{1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sum_{\beta > \frac{\alpha \Delta}{D}}\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right),$$

a užije-li se rovnice

$$\sum_{1}^{\Delta}\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right) = 0,$$

obdržíme jej ve tvaru

$$-\sum_{\alpha}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sum_{\beta=1}^{\frac{\alpha\Delta}{D}}\left(\frac{-\Delta}{\beta}\right),$$

t. j. součet ten splývá s prvním (d).

Máme tedy vztah *)

$$\sum_{k=1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{k}\right)\sum_{h=1}^{\left[\frac{k\Delta}{D}\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = -\frac{1}{2}\,Cl(-\Delta D), \tag{9¹}$$

a podobným způsobem bychom vyvinuli

$$\sum_{h=1}^{[\frac{1}{2}\Delta]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sum_{k=1}^{\left[\frac{hD}{\Delta}\right]}\left(\frac{D}{k}\right) = \frac{1}{2}\,Cl(-\Delta D), \tag{9²}$$

provádějíce sečítání v opačném pořádku.

Tyto vzorce jeví se tedy jako bezprostřední důsledek základní rovnice (6); při dřívějších příležitostech jsme jejich bezprostřední pramen, t. j. rovnici (7) odvodili prostředky analytickými různými způsoby.

Obraťme se ještě ke vzorci (b)

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\Re\left(\frac{\nu}{\Delta}\right) = -\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

Je-li Δ liché, probíhají kladná čísla 2ν opět úplnou soustavu zbytků *mod.* Δ, a bude tedy

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)\Re\left(\frac{2\nu}{\Delta}\right) = -\frac{2}{\tau}\,Cl(-\Delta)$$

*) l. c. str. 42., vzorec (17) a (18).

čili

$$(\alpha)\quad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\Re\left(\frac{2\nu}{\Delta}\right)=-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta).$$

Pro $2\nu < \Delta$ jest

$$\Re\left(\frac{2\nu}{\Delta}\right)=\frac{2\nu}{\Delta},\qquad \left(\nu=1,2,\ldots\left[\frac{\Delta}{2}\right]\right)$$

a pro $2\nu > \Delta$

$$\Re\left(\frac{2\nu}{\Delta}\right)=\frac{2\nu}{\Delta}-1,\quad \left(\nu>\left[\frac{\Delta}{2}\right]\right),$$

tedy zní poslední rovnice

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{2\nu}{\Delta}-\sum_{\nu>\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta).$$

Druhý člen substitucí $\nu=\Delta-\mu$ přejde na

$$\sum_{1}^{[\frac{1}{2}\Delta]}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right),$$

první má hodnotu $-2\,.\,\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta)$, takže jeho převedením na pravou stranu vzniká

$$\sum_{1}^{[\frac{1}{2}\Delta]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta). \tag{10}$$

Rovnice ta platí také pro sudá Δ. V tom případě $\Delta=4n$ a součet (6) lze psáti

$$S=\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda,\qquad (\lambda=1,3,5,\ldots 4n-1).$$

Rozštěpme členy v $\lambda<2n$ a v $\lambda>2n$, pro něž kladme $2n+\lambda$ za λ:

$$S=\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda+\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)(2n+\lambda)\quad(\lambda<2n).$$

Zde je buď $\Delta=4D$, D lichý diskriminant, aneb

$$\Delta=8D,\ 8\Delta';$$

v prvním případě

$$\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)=\left(\frac{-4}{2D+\lambda}\right)\left(\frac{D}{\lambda}\right)=-\left(\frac{-4D}{\lambda}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right),$$

v druhém

$$\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)=\left(\frac{-8}{4D+\lambda}\right)\left(\frac{D}{\lambda}\right)=-\left(\frac{8D}{\lambda}\right)=-\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)$$

a podobně v případě třetím, takže vždy

$$\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right),$$

a poslední rovnice bude zníti

$$S=-\Sigma\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right).2n;$$

avšak

$$S=-4n.\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta),$$

tedy

$$\sum_{\lambda<\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)=2.\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta),$$

t. j. rovnice (10) pro sudá Δ.

Rovnice (10) platí tedy pro veškery hlavní diskriminanty, sudé jako liché.

Rovnice (9^2) v případě $\Delta=4$ podá

$$\frac{1}{2}\,Cl\,(-4D)=\sum_{1}^{[\frac{1}{4}D]}\left(\frac{D}{k}\right), \tag{11}$$

dále pro $\Delta=8$, píšeme-li ε_ν za $\left(\frac{D}{\nu}\right)$,

$$\frac{1}{2}\,Cl\,(-8D)=\sum_{1}^{[\frac{1}{8}D]}\varepsilon_k+\sum_{1}^{[\frac{3}{8}D]}\varepsilon_k;$$

pro kladné diskriminanty D však jest

$$\sum_{1}^{[\frac{1}{2}D]}\varepsilon_\nu=0,$$

tedy po odečtení tohoto výrazu zbývá

$$\frac{1}{2}\,Cl(-8D)=\sum_{1}^{[\frac{1}{8}D]}\left(\frac{D}{\nu}\right)-\sum_{[\frac{3}{8}D]+1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{\nu}\right). \tag{12}$$

V rovnicích (11) a (12) značí D kladný lichý diskriminant hlavní.

Pro diskriminanty tvaru -8Δ podá nám rovnice (9′) volbou $D=8$:

$$-\frac{1}{2}\,Cl(-8\Delta)=\sum_{1}^{[\frac{1}{8}\Delta]}\varepsilon_h-\sum_{1}^{[\frac{3}{8}\Delta]}\varepsilon_h,\qquad \varepsilon_h=\left(\frac{-\Delta}{h}\right);$$

v pravo tvoří první součet částku druhého, takže po redukci vznikne

$$\frac{1}{2}\,Cl(-8\Delta)=\sum_{[\frac{1}{8}\Delta]+1}^{[\frac{3}{8}\Delta]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right), \tag{13}$$

při čemž $-\Delta$ je lichý hlavní diskriminant.

Uvažujme nyní formy typu

$$ax^2+2bxy+cy^2,\quad (a,\,2b,\,c),$$

jaké předpokládá theorie Gaussova a Dirichletova; číslo b^2-ac sluje determinant; je-li tento záporný $-n$, omezíme se na formy kladné a primitivní; počet tříd determinantu-n znamenáme h.

Je-li $n=\Delta$ tvaru $4x+3$, existují formy *nevlastně primitivní* $(2a,\,2b,\,2c)$, jichž determinant $-\Delta=b^2-4ac$ je diskriminant primitivní formy $(a,\,b,\,c)$; znamenáme-li h' počet Gaussových tříd nevlastně primitivních, máme dle (10), ježto pro liché Δ platí

$$\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\Delta}\right),$$

vzorec

$$\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)h'=\sum_{1}^{[\frac{1}{2}\Delta]}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right),\qquad \underset{\Delta>3}{\Delta\equiv 3}\ (mod\ 4). \tag{10°}$$

Ostatní primitivní formy determinantu $-\Delta$

$$(a,\,2b,\,c)$$

mají $a + c$ liché, jsou vlastně primitivní, a mají diskriminant $4b^2 - 4ac = -4\Delta$; podle obecné theorie jest

$$Cl(-4\Delta) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}\, Cl(-\Delta),$$

a počet tříd $h = Cl(-4\Delta)$, má dle (10) hodnotu

$$h = \sum_{1}^{[\frac{1}{2}\Delta]} \left(\frac{\nu}{\Delta}\right), \quad n = \Delta \equiv 3 \ (mod\ 4). \qquad (10^1)$$

Pro ostatní liché determinanty, t. j. pro lichá n ($= 4x + 1$) prostá čtverečních dělitelů je diskriminant formy

$$(a, 2b, c)$$

číslo $-4n$, a vzorec (10) podává

$$h = Cl(-4n) = \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{-4n}{\lambda}\right), \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots 2n - 1).$$

Zde

$$\left(\frac{-4n}{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{n}\right),$$

tedy

$$h = \frac{1}{2}\sum_{\lambda}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \ n \equiv 1 \ (mod\ 4); \ (\lambda = 1, 3, \ldots 2n - 1) \qquad (10^2)$$

a zároveň podává (11)

$$h = 2\sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{4}n]}\left(\frac{\nu}{n}\right). \qquad (11^0)$$

Na př. pro $n = 5$ máme v (10^2) vesměs členy kladné, pro $\lambda = 5$ ovšem nullu, a

$$h = \frac{4}{2} = 2.$$

V rovnici (11^0) zní pravá strana $2\left(\frac{1}{5}\right) = 2$; máme dvě třídy zastoupené formami

$$(1, 0, 5), \ (2, 2, 3).$$

Pro $n = 13$ podává (11^0)

$$h = 2\,(1 - 1 + 1) = 2,$$

takže opět jsou tu dvě třídy a sice příslušné k formám

$$(1,\ 0,\ 13),\quad (2,\ 2,\ 7).$$

Vzorec (10^2) by tu vyžadoval 13 členů.

Pro determinanty sudé máme dvojí případ:

$$n = 2P,\ P \equiv 1\ (mod\ 4)\ \text{a}\ P \equiv 3\ (mod\ 4),$$

t. j. buď je $P = D$ diskriminant kladný a základní, aneb je $-P = -\varDelta$ hlavní diskriminant záporný.

Formy tohoto determinantu $-n = -2P$ mají diskriminant $-4n$ t. j. $-8D$ aneb $-8\varDelta$. Rovnice (12) a (13) tu podávají

$$\frac{1}{2}h = \sum_{1}^{[\frac{1}{8}D]}\left(\frac{\nu}{D}\right) - \sum_{[\frac{3}{8}D]+1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{\nu}{D}\right),\quad n = 2D, \tag{12^0}$$

$$\frac{1}{2}h = \sum_{[\frac{1}{8}\varDelta]+1}^{[\frac{3}{8}\varDelta]}\left(\frac{\nu}{\varDelta}\right),\quad n = 2\varDelta, \tag{13^0}$$

$$(D \equiv 1,\ \varDelta \equiv 3\ mod\ 4),$$

kdežto rovnice (10) by poskytla v prvním případě

$$2h = \sum_{\nu=1}^{4D-1}\left(\frac{-2}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{D}\right),\quad \left(\frac{-2}{\nu}\right) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}(-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}},$$

a v druhém

$$2h = \sum_{\nu=1}^{4\varDelta-1}\left(\frac{2}{\nu}\right)\left(\frac{\nu}{\varDelta}\right);\quad \left(\frac{2}{\nu}\right) = (-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}.$$

Na př. máme dle (12^0) a (13^0)

$$n = 26,\quad \frac{1}{2}h = \left(\frac{1}{13}\right) - \left(\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{6}{13}\right)\right) = 3,\ h = 6,$$

a skutečně jsou tu redukované formy

$$(1,\ 0,\ 26)\ (2,\ 0,\ 13),\ (3,\ \pm 2,\ 9),\ (5,\ \pm 4,\ 6);$$

$$n = 14,\quad \frac{1}{2}h = \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{2}{7}\right) = 2,\ h = 4;$$

redukované formy jsou zde

$$(1,\ 0,\ 14),\ (2,\ 0,\ 7),\ (3,\ \pm 2,\ 5).$$

Z předcházejícího jasně vysvítá, jak jsou Dirichletovy výsledky (10^0) (10^1) 10^2), (11^0), (12^0), (13^0) skoncentrovány ve vzorcích Kroneckerovy úpravy (10) a našich vzorcích (9).

Pokud theorie sama tímto postupem se zjednodušila, vynikne srovnáním s příslušnými výklady u Bachmanna (Analytische Zahlentheorie, str. 188—218).

Leč i jinak jsou vzorce (9) výhodny. Jde-li na př. o formy determinantu $-n = -385 = -5 \cdot 7 \cdot 11$, máme diskriminant $-20 \cdot 77$, a položíme tedy ve vzorci (9^2) $D = 77$, $\Delta = 20$. Hodnoty h, jež třeba vzíti v úvahu, jsou $h = 1, 2, 7, 9$ a pro všechny jsou znamení $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ kladná. Objeví se tak pro počet tříd H vztah

$$\frac{1}{2} H = \sum_1^3 \varepsilon_\nu + \sum_1^{11} \varepsilon_\nu + \sum_1^{26} \varepsilon_\nu + \sum_1^{34} \varepsilon_\nu, \quad \varepsilon_\nu = \left(\frac{77}{\nu}\right).$$

Odečteme-li dvakráte výraz

$$\sum_1^{38} \varepsilon_\nu = 0,$$

vyjde

$$\frac{1}{2} H = \sum_1^3 \varepsilon_\nu + \sum_1^{11} \varepsilon_\nu - \sum_{27}^{38} - \sum_{35}^{38}$$

$$\varepsilon_1 = 1, \ \varepsilon_2 = -1, \ \varepsilon_3 = -1,$$
$$\varepsilon_4 = 1, \ \varepsilon_5 = -1, \ \varepsilon_6 = 1, \ \varepsilon_7 = 0, \ \varepsilon_8 = -1, \ \varepsilon_9 = 1,$$
$$\varepsilon_{10} = 1, \ \varepsilon_{11} = 0,$$
$$\varepsilon_{27} = -1, \ \varepsilon_{28} = 0, \ \varepsilon_{29} = -1, \ \varepsilon_{30} = -1, \ \varepsilon_{31} = -1,$$
$$\varepsilon_{32} = -1, \ \varepsilon_{33} = 0, \ \varepsilon_{34} = -1, \ \varepsilon_{35} = 0, \ \varepsilon_{36} = 1,$$
$$\varepsilon_{37} = 1, \ \varepsilon_{38} = -1.$$
$$\tfrac{1}{2} H = -1 + 1 + 5 - 1 = 4$$
$$H = 8;$$

redukované formy jsou (1, 0, 385), (5, 0, 77), (7, 0, 55). (11, 0, 35), (2, 2, 193), (10, 10, 41), (14, 14, 31), (22, 22, 23).

Dodatky.

1. Do rovnice (b)

$$\sum_1^{\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \Re\left(\frac{\nu}{\Delta}\right) = -C', \quad C' = \frac{2}{\tau}\, Cl\,(-\Delta),$$

vložme za ν čísla $m\nu$, kde m je kladné a nesoudělné s Δ; násobíme-li výsledek $\left(\frac{-\Delta}{m}\right)$, obdržíme

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\mathfrak{R}\left(\frac{m\nu}{\Delta}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)C'.$$

Píše-li se v levo hodnota

$$\mathfrak{R}\left(\frac{m\nu}{\Delta}\right)=\frac{m\nu}{\Delta}-\left[\frac{m\nu}{\Delta}\right],$$

objeví se levá strana ve tvaru

$$-mC'-\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\left[\frac{m\nu}{\Delta}\right]$$

a tak vychází rovnice

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\left[\frac{m\nu}{\Delta}\right]=-\left[m-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right]\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-\Delta), \quad (14)$$

o které jsem svého času*) ukázal, že platí také pro ostatní m, takže podmínka nesoudělnosti s Δ odpadá. Pro následující applikaci však stačí tato rovnice za uvedeného omezení.

V rovnici (14) klaďme za Δ kmenné číslo p tvaru $4k+3$, za m postupně 2μ a μ, a odečtěme dvojnásob vzatý výsledek druhý od prvního, užívajíce označení jako výše

$$\left(2-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau}\,Cl\,(-p)=h.$$

Vyjde

$$\sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{\nu}{p}\right)\left(\left[\frac{2\mu\nu}{p}\right]-2\left[\frac{\mu\nu}{p}\right]\right)=-\left(\frac{\mu}{p}\right)h;$$

zde klaďme za μ hodnoty $1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2}=m$ a sečtěme; podle (10^1) objeví se v pravo $-h^2$, a levou stranu lze psáti v přehledném tvaru, zavede-li se označení

$$i_\nu=\sum_{\mu=1}^{m}\left(\left[\frac{2\mu\nu}{p}\right]-2\left[\frac{\mu\nu}{p}\right]\right),\quad m=\frac{p-1}{2}. \quad (15)$$

---

*) Bulletin des Sciences mathématiques, 2e sér., T. XXI. (1897).

Zde i_ν udává počet *lichých* čísel v posloupnosti

$$\left[\frac{2\nu}{p}\right], \left[\frac{4\nu}{p}\right], \left[\frac{6\nu}{p}\right], \ldots \left[\frac{2m\nu}{p}\right],$$

a je z theorie kvadratických zbytků známo, že

$$\left(\frac{\nu}{p}\right) = (-1)^{i_\nu}.$$

Náš výsledek pak bude zníti

$$\sum_{1}^{p-1} (-1)^{i_\nu} i_\nu = -h^2. \tag{16}$$

Z rovnice (15) a ze základní věty elementárné

$$[x] + [-x] = -1$$

snadno vychází vztah

$$i_{p-\nu} = m - i_\nu,$$

jehož pomocí se rovnice (16) přepíše na

$$-h^2 = \sum_{1}^{m} (-1)^{i_\nu} i_\nu + \sum_{1}^{m} (-1)^{i_{p-\nu}} i_{p-\nu}$$

$$= 2\sum_{1}^{m} (-1)^{i_\nu} i_\nu - m \sum_{1}^{m} (-1)^{i_\nu};$$

druhý součet v posledním výrazu jest

$$\sum_{1}^{m} (-1)^{i_\nu} = \sum_{1}^{m} \left(\frac{\nu}{p}\right) = h, \tag{17}$$

a tak přicházíme k rovnici

$$\sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{i_\nu} i_\nu = \frac{mh - h^2}{2}. \tag{18}$$

Kdežto (17) praví, že v řadě $\nu = 1, 2, \ldots m = \frac{p-1}{2}$ mají sudá i_ν převahu nad lichými a sice o h, obsahuje (18), že také součet sudých i_ν převyšuje součet lichých $i_\nu \left(\nu < \frac{p}{2}\right)$ o číslo, jež se vyjadřuje pomocí počtu tříd h ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}(m - h)\, h.$$

Naproti tomu dle (16) v celkovém intervallu $o < \nu < p$ je stejný počet i_ν sudých jako lichých, ale lichá i_ν mají větší součet, a sice o h^2.

Na př. pro $p = 7$ máme

$$i_1 = 0,\ i_2 = 2,\ i_3 = 1,\ i_4 = 2,\ i_5 = 1,\ i_6 = 3$$
$$2 - 1 + 2 - 1 - 3 = -1,\quad h = 1.$$

Z (15) vychází velmi snadno

$$\sum_1^{p-1} i_\nu = m^2,$$

a tedy ve spojení s (16)

$$\sum_1^{p-1} \frac{1 + (-1)^{i_\nu}}{2}\, i_\nu = \frac{m^2 - h^2}{2},$$

t. j. součet sudých i_ν celého intervallu $o < \nu < p$ obnáší

$$\frac{m^2 - h^2}{2}.$$

2. V mých studiích z poslední doby vyskytla se rovnice

$$2 \sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{2}\varDelta]}{}' \left(\frac{\nu}{q}\right) s_\nu = H^2 + m,$$

kde q je kmenné číslo tvaru $4k + 3$, dále

$$m = \frac{q-1}{2},\quad H = \left(2 - \left(\frac{2}{q}\right)\right) Cl\,(-q)$$

a kde s_ν značí součet $\sum\limits_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{\alpha}{q}\right)$.

Tuto rovnici zobecníme a zároveň ji dokážeme způsobem elementárnějším.

Uvažujme součet

$$A = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^2 s_{\nu-1}^2,\quad \left(\varepsilon_\nu = \left(\frac{-\varDelta}{\nu}\right),\ s_\varkappa = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\varkappa\right),$$

kde n je libovolné číslo celistvé kladné a menší než $\varDelta$.

Znamenejme

$$\mu_0 = 1,\ \mu_1,\ \mu_2, \ldots \mu_\omega$$

čísla $\leqq n$ nesoudělná s Δ v přirozeném pořádku; pak bude náš součet

$$A = \sum_{\alpha=1}^{\omega} s^2_{\mu_\alpha - 1}.$$

Avšak

$$s_{\mu_\alpha - 1} = s_{\mu_{\alpha-1}},$$

poněvadž čísla ležící mezi $\mu_{\alpha-1}$ a μ_α nejsou nesoudělná s Δ, a tedy znaménka ε_β, z nichž sestává rozdíl

$$s_{\mu_\alpha - 1} - s_{\mu_{\alpha-1}} = \Sigma \varepsilon_\beta \quad (\mu_{\alpha-1} < \beta \leqq \mu_\alpha - 1),$$

jsou rovna nulle.

Tedy máme

$$A = \sum_{\alpha-1}^{\omega} s^2_{\mu_\alpha - 1} = \sum_{\beta=0}^{\omega-1} s^2_{\mu_\beta};$$

v tomto součtu není zastoupen člen

$$s^2_{\mu_\omega} = s^2_n,$$

a bude

$$A = \sum_{1}^{n} \varepsilon^2_\nu s^2_\nu - s^2_n,$$

při čemž nově připojené členy mají hodnotu nullu.

Vychází tak identita

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon^2_\nu s^2_{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon^2_\nu s^2_\nu - s^2_n. \tag{a}$$

Levou stranu možno ještě vyčísliti přímo, užije-li se identity

$$s_{\nu-1} = s_\nu - \varepsilon_\nu, \quad \text{tedy} \quad \varepsilon^2_\nu s^2_{\nu-1} = \varepsilon^2_\nu s^2_\nu - 2\varepsilon_\nu s_\nu + \varepsilon^2_\nu;$$

vyjde

$$\sum_{1}^{1}{}' \varepsilon^2_\nu s^2_{\nu-1} = \sum_{1}^{n} \varepsilon^2_\nu s^2_\nu - 2 \sum_{1}^{n} \varepsilon_\nu s_\nu + \varphi(\Delta, n),$$

značí-li nám $\varphi(\Delta, n)$ *počet čísel* $\leqq n$ *nesoudělných s* Δ.

Dosadíme-li tuto hodnotu za levou stranou do (a), vyjde

$$2 \sum_{1}^{n} \varepsilon_\nu s_\nu = s^2_n + \varphi(\Delta, n), \tag{19}$$

při čemž jak výše udáno

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right), \quad s_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n.$$

Důkaz a výsledek zůstávají v platnosti pro veškery diskriminanty, nejenom základní, a také pro diskriminanty kladné D, t. j. při významu liter

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{D}{\nu}\right), \quad s_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n.$$

Pro základní diskriminant záporný $-\Delta$ máme odtud, kladouce $n = [\frac{\Delta}{2}] = m$, vzhledem k rovnici (10)

$$\sum_1^m \varepsilon_\nu = H = (2 - \varepsilon_2)\, Cl\,(-\Delta), \quad \Delta > 4,$$

$$2 \sum_1^m \varepsilon_\nu s_\nu = H^2 + \tfrac{1}{2}\, \varphi\,(\Delta). \qquad (19^a)$$

Užijeme-li jí pro kladný hlavní diskriminant lichý D, a pro $n = [\frac{D}{4}]$, máme dle (11)

$$\tfrac{1}{2}\, Cl\,(-4D) = \sum_1^n \varepsilon_\nu = s_n,$$

tedy

$$2 \sum_1^{[\frac{1}{4}D]} \varepsilon_\nu s_\nu = \tfrac{1}{4}\, Cl\,(-4D)^2 + \varphi\,(D, \tfrac{1}{4}D). \qquad (19^b)$$

Na př. pro $D = 21$ máme

$\nu =$	1,	2,	4,	5	$Cl\,(-84) = 4$
$\varepsilon_\nu =$	$+$	$-$	$+$	$+$	$\varphi\,(21, 5) = 4$
$s_\nu =$	1,	0,	1,	2	

a rovnice (19^b) se verifikuje hodnotami

$$2\,(1 - 0 + 1 + 2) = 2^2 + 4.$$

Píšeme-li (19) pro $n = n$ a pro $n = n'$, a odečteme-li výsledky, vznikne

$$2 \sum_{\nu=n+1}^{n'} \varepsilon_\nu s_\nu = (s_{n'} - s_n)(s_{n'} + s_n) + \varphi\,(\Delta, n') - \varphi\,(\Delta, n). \qquad (b)$$

Zde volme

$$n = [\tfrac{1}{8}\Delta], \quad n' = [\tfrac{3}{8}\Delta],$$

a uvažme, že dle (13) při těchto hodnotách n, n'

$$s_{n'} - s_n = \tfrac{1}{2} Cl(-8\Delta), \tag{b'}$$

předpokládající $-\Delta$ jako lichý diskriminant hlavní.

Zbývá ještě vyjádřiti součet

$$s_n + s_{n'} = S(\tfrac{1}{8}) + S(\tfrac{3}{8}),$$

kde užito obecného označení jako v našem mémoiru pařížském

$$S(x) = \sum_{\nu=1}^{[\Delta x]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right),$$

při čemž druhý člen v pravo má býti nahražen nullou, jakmile Δx není celistvé.

U diskriminantů záporných má tento výraz vlastnosti

$$S(1-x) = S(x),\quad S(x) + S(x+\tfrac{1}{2}) = \left(\frac{2}{\Delta}\right) S(2x) + H,$$

tedy v našem případě

$$s_n + s_{n'} = S(\tfrac{1}{8}) + S(\tfrac{3}{8}) = S(\tfrac{1}{8}) + S(\tfrac{5}{8}) = H + \varepsilon_2\, S(\tfrac{1}{4}),$$

a poněvadž dle známého vzorce

$$S(\tfrac{1}{4}) = \sum_{1}^{[\frac{1}{4}\Delta]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{2 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) - \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\, Cl(-\Delta)$$

v našem případě lichého $\Delta > 4$ máme hodnotu

$$S(\tfrac{1}{4}) = \frac{1+\varepsilon_2}{2}\, Cl(-\Delta),$$

vychází

$$\begin{aligned} s_n + s_{n'} &= \left[(2-\varepsilon_2) + \frac{1+\varepsilon_2}{2}\right] Cl(-\Delta) \\ &= \frac{5-\varepsilon_2}{2}\, Cl(-\Delta). \end{aligned} \tag{b''}$$

Dosadíme-li nalezené hodnoty (b') a (b'') do rovnice (b), obdržíme

$$2 \sum_{\nu=[\frac{1}{8}\Delta]+1}^{[\frac{3}{8}\Delta]} \varepsilon_\nu s_\nu = \frac{5-\varepsilon_2}{4}\, Cl(-\Delta)\, Cl(-8\Delta) + (\tfrac{1}{8}\Delta,\ \tfrac{3}{8}\Delta), \tag{20}$$

znamenáme li obecně symbolem (x, y) počet čísel intervallu $(x \ldots y)$ nesoudělných s Δ.

Na př. pro $\Delta = 7$ je $Cl(-\Delta) = 1$, $Cl(-8\Delta) = 4$,
$$(\tfrac{1}{8}\Delta, \tfrac{3}{8}\Delta) = 2,$$
a rovnice (20) tu zní
$$2(1+2) = 1 \,.\, 1 \,.\, 4 + 2.$$

Pro $\Delta = 19$ máme

$\nu =$	3,	4,	5,	6,	7	$Cl(-19) = 1$, $Cl(-8 \,.\, 19) = 6$
$\varepsilon_\nu =$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$(\tfrac{1}{8}\Delta, \tfrac{3}{8}\Delta) = (2+0,\ 7+0) = 5$
$s_\nu =$	-1,	0,	1,	2,	3	

$$2(1+0+1+2+3) = \tfrac{6}{4} \,.\, 1 \,.\, 6 + 5 = 14.$$

Ustanovme ještě hodnotu výrazu (20) v případě lichého kladného diskriminantu hlavního D; $\varepsilon_\nu = \left(\dfrac{D}{\nu}\right)$.

Tu nám rovnice (12) podává
$$\tfrac{1}{2}\, Cl(-8D) = s_n + s_{n'},\ n = [\tfrac{1}{8}D],\ n' = [\tfrac{3}{8}D],$$
a funkce $S(x)$ pro případ kladného diskriminantu
$$S(x) = \sum_{1}^{[Dx]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right)$$
podává
$$s_n = S(\tfrac{1}{8}),\ s_{n'} = S(\tfrac{3}{8});$$
její vlastnosti
$$S(1-x) = -S(x),\ S(x) + S(x+\tfrac{1}{2}) = \left(\frac{2}{D}\right) S(2x)$$
vedou k rovnici
$$s_n - s_{n'} = S(\tfrac{1}{8}) + S(\tfrac{5}{8}) = \varepsilon_2\ S(\tfrac{1}{4});$$
tu jest jako výše
$$S(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}\, Cl(-4D),$$
tedy
$$s_n - s_{n'} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2\ Cl(-4D).$$

Dosazením nalezených hodnot $s_{n'} \pm s_n$ do rovnice (b) plyne při analogickém významu symbolu (x, y):
$$2 \sum_{[\frac{1}{8}D]+1}^{[\frac{3}{8}D]} \varepsilon_\nu s_\nu = -\tfrac{1}{4}\varepsilon_2\ Cl(-4D)\ Cl(-8D) + (\tfrac{1}{8}D, \tfrac{3}{8}D), \tag{21}$$
při čemž $\varepsilon_\nu = \left(\dfrac{D}{\nu}\right)$, $s_\nu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\nu$, a D kladný lichý diskriminant základní.

Tento výraz může vymizeti patrně pouze při $\varepsilon_2 = +1$, t. j. pro diskriminanty tvaru $D = 8k + 1$; vymizí skutečně pro $D = 17$.

Je-li D kmenné číslo, budou všecka ε_ν od nully různa, a budou $s_{2\alpha}$ čísla sudá, $s_{2\alpha+1}$ čísla lichá. Aby

$$\sum_{n+1}^{n'} \varepsilon_\nu s_\nu = 0,$$

musí intervall $(n \ldots n' + 0)$ obsahovati sudý počet lichých čísel.

V našem případě máme intervall $(k + 0, 3k + 0)$; ten obsahuje sudý počet lichých čísel jen při sudém k, a tedy pro kmenné diskriminanty může součet (21) vymizeti jen tehdy, jsou-li tvaru $D = 16\,k + 1$. Takový jest po $D = 17$ nejblíže vyšší $D = 97$, pro nějž součet (21) má hodnotu 8.

O některých dalších konsekvencích vzorce (19) a o vztazích podobných pojednáno bude na jiném místě. Zde jenom buď ještě poznamenáno, že v případě kladného diskriminantu D a pro $n = \left[\frac{D}{2}\right]$ je

$$s_n = 0, \quad \varphi(D, n) = \tfrac{1}{2}\varphi(D),$$

a tedy pro veškery kladné diskriminanty

$$\sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{2}D]} \varepsilon_\nu s_\nu = \tfrac{1}{4}\varphi(D).$$

O jistém druhu ploch.

Dr. Frant. Velísek.

Ke každému systému čar na ploše náleží nekonečné množství křivek jiného systému, dělících s prvními plochu v infinitesimální rhomby. Je-li totiž element oblouku

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,dudu + g\,dv^2,$$

a přejde-li substitucí

$$u_1 = u, \; v_1 = \psi(u, v)$$