V. Pospíšil

# Odvození Einsteinových vzorců pro Brownův pohyb z impulsů molekulárních rázů

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 58 (1929), No. 3-4, 315--318

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/124013

# Odvození Einsteinových vzorců pro Brownův pohyb z impulsů molekulárních rázů.

Dr. *V. Pospíšil.*

Einsteinovy vzorce*) pro střední čtverec posunutí brownických částic, které měly pro rozvoj atomistiky mimořádný význam, lze početní metodou Einstein-Hopfovou velmi názorně a poměrně krátce odvoditi z účinků molekulárných rázů na základě principu o superposici pohybů takto:

1. Vzorec pro pohyb translační. Kulová částice hmoty $m$ a poloměru $r$ budiž suspendována v plynném nebo tekutém prostředí teploty $T$ a vnitřního tření $\zeta$. Čas $t$, pro který hledáme velikost posunutí částice ve směru pevně volené osy, na př. $x$, rozdělme na velmi veliký**) počet $n$ stejných časových intervalů $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$. Čas počítejme od okamžiku, kdy náhodou byla částice v klidu. V prvém, velmi krátkém intervalu $\tau_1$ obdrží částice od jednoho nebo několika rázů impuls, jehož $x$-ová složka budiž $p_1$. Počáteční rychlost částice ve směru osy $x$ je tedy $u_1 = p_1/m$. Síla, kterou viskosní prostředí tlumí pohyb částice, jest podle Stokesova zákona $6\pi\zeta r u$. Označíme-li konstantní výraz $6\pi\zeta r$ písmenem $K$, máme pro pohyb částice rovnici

$$m \frac{du}{dt} = -Ku. \tag{1}$$

Odtud pro rychlost částice v libovolném čase $t$

$$u = u_1 e^{-\frac{K}{m}t},$$

*) Odvození vzorců, prvého neb obou, podali: Einstein Ann. der Phys. 1905, *17* p. 549, — 1906, *19* p. 371, Smoluchowski Ann. der Phys. 1906, *21* p. 756, Langevin C. R. 1908, *146* p. 530, Fletcher Phys. Rev. 1911, *33* p. 81, Mme de Haas-Lorentz, Brownsche Bewegung p. 51, Kar a Gosh Phys. Zeitschr. 1928 p. 143.

V tomto odvození užívám dvou početních obratů z pozdějších prací Einsteinových (Ann. der Phys. 1910, 33 p. 1105, Phys. Zeitschr. 1917 p. 121), jimiž nabývá odvození jednoduchosti a přehlednosti.

**) $n$ budiž řádově shodné s počtem rázů molekul na částici, který pro mikronovou částici činí asi $10^{15}$ až $10^{19}$ rázů za vteřinu.

a pro dráhu $\delta$, kterou částice vykoná až do úplného vyčerpání své hybnosti,

$$\delta_1 = u_1 \int_0^\infty e^{-\frac{K}{m}t} dt = \frac{p_1}{K}. \tag{2}$$

K horní integrační hranici $t = \infty$ je třeba poznamenati, že tato časová nekonečnost je prakticky doba nepředstavitelně krátká, asi $10^{-5}$ až $10^{-6}$ *sec*, neboť výraz $m/K$ pro částici mikronovou je řádu $10^{-7}$ až $10^{-8}$ *sec.*

V druhém intervalu $\tau_2$ obdrží částice impuls $p_2$, pak $p_3 \ldots$ až $p_n$. Každý impuls je nahodilé velikosti a nehodilého znamení. Pro parciální posunutí, příslušná jednotlivým impulsům, platí analogické rovnice k rovnici poslední. Celkové posunutí částice v čase $t = n\tau$ je tedy

$$\Delta_x = \pm\, \delta_1 \pm \delta_2 \pm \ldots \pm \delta_n. \tag{3}$$

Tuto rovnici umocněme. Na pravé straně obdržíme součet čtverců $\delta_i^2$ vždy positivních a součet součinů $\pm\, \delta_i \delta_k$ znamení nahodilých. Provedeme-li tedy tento počet pro mnoho případů stejného druhu a vezmeme-li z nich střed, což označíme čarou nad symboly a uvážíme-li, že střed $\overline{\delta_i}$ z jednotlivých parciálních posunutí z důvodů nahodilosti znamének vymizí, pak bude střed ze součtu součinů $\overline{\delta_i \delta_k}$ vůči středu ze součtu čtverců $\overline{\delta_i^2}$ zanedbatelně malý, takže lze psáti*)

$$\overline{\Delta_x^2} = \overline{\delta_1^2} + \overline{\delta_2^2} + \ldots + \overline{\delta_n^2}. \tag{4}$$

Jelikož průměrný čtverec parciálních posunutí $\overline{\delta_i^2}$ je pro všechny časové intervaly stejný, lze rovnici (4) psáti

$$\overline{\Delta_x^2} = n\overline{\delta_i^2} = n\,\frac{\overline{p_i^2}}{K^2}. \tag{5}$$

Kdybychom znali střední čtverec parciálních impulsů $\overline{p_i^2}$, byla by již poslední rovnice řešením našeho úkolu. Přímý výpočet této veličiny byl by stejně obtížný jako nejistý, z důvodů nasnadě jsoucích (v. na př. odvození Smoluchowskiho). Lze však jej pohodlně určiti z teorému ekvipartičního. Označíme-li totální

*) Správnost tohoto početního obratu, který je podstatou početní metody Einstein-Hopfovy, nahlédneme takto: Na pravé straně umocněné rovnice 3. máme součiny tvaru $\pm\, \delta_i\, 2\,(\delta_{i+1} \pm \delta_{i+2} \pm \ldots \pm \delta_n)$. Pravděpodobnou hodnotu výrazu v závorce označme $A$. Je-li $q$ počet případů, pro něž tento počet provádíme, pak střed z předchozích součinů bude $\dfrac{\pm\, \delta_{i_1} \pm \delta_{i_2} \pm \ldots \pm \delta_{i_q}}{q}\, 2\, A = \overline{\delta_i}\, 2\, A$. Protože $\overline{\delta_i}$ lze volbou dosti velkého $q$ snížiti pod libovolnou hodnotu, je učiněné zanedbání oprávněno. Zároveň vidíme, že vzorec hledaný neplatí pro jednotlivé případy, nýbrž pouze pro statistický střed.

rychlost částice ve směru osy $x$ písmenem $U$ a je-li $P = mU$ totální hybnost částice, a $k$ Boltzmannova konstanta, můžeme teorém ekvipartiční $\frac{1}{2}\overline{mU^2} = \frac{1}{2}kT$ psáti ve formě

$$\overline{P^2} = mkT. \tag{6}$$

Na počátku intervalu $\tau_i$ má částice hybnost $P_i = mU_i$, která se během intervalu $\tau_i$ zmenší vlivem odporu prostředí o $KU_i\tau$ a zároveň účinkem molekulárních rázů se změní o parciální impuls $\pm p_i$. Má tedy částice na počátku intervalu $\tau_{i+1}$ totální hybnost

$$P_{i+1} = P_i - KU_i\tau \pm p_i. \tag{7}$$

Tuto rovnici umocněme a vezměme opětně střed z mnoha případů. Podle 6 platí $\overline{P_{i+1}^2} = \overline{P_i^2}$. Členy, které obsahují $p_i$, vymizí z důvodu nahoře vyloženého. Člen s $\tau^2$ zanedbáme, jelikož je řádově značně nižší nežli členy ostatní. Zbývá

$$\overline{p_i^2} = 2K\overline{P_iU_i}\tau. \tag{8}$$

Dosadíme-li tento výraz do (5) a uvážíme-li, že $\overline{P_iU_i} = kT$, $n\tau = t$ a $K = 6\pi\zeta r$, obdržíme Einsteinův vzorec

$$\overline{\Delta_x^2} = \frac{kT}{3\pi\zeta r}t. \tag{9}$$

2. Vzorec pro pohyb rotační. Opakujeme-li předchozí úvahu téměř doslova, s týmiž rovnicemi, při čemž $m$ bude značiti moment setrvačnosti částice, $p$ otáčivé impulsy (impulsmomenty) rázů molekulárních vzhledem k pevně volené ose (na př. $z$), $u$ parciální a $U$ totální úhlové rychlosti částice, a píšeme-li za $\delta_i$ úhel parciálního otočení $\varphi_i$ a za $\Delta_x$ úhel totálního otočení $\Phi_z$, a dosadíme-li za $K$ výraz $8\pi\zeta r^3$ (což je síla, kterou prostředí brzdí rotaci částice při jednotkové úhlové rychlosti), pak obdržíme pro střední čtverec úhlového otočení

$$\overline{\Phi_z^2} = \frac{kT}{4\pi\zeta r^3}t. \tag{10}$$

*

## Les formules d'Einstein pour le mouvement brownien, déduites de la considération des chocs moléculaires.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur fait usage, pour établir les formules d'Einstein pour le mouvement brownien, des méthodes de calcul, employées par M. Einstein dans son étude des phénomènes de variation dans le domaine de la radiation. Au temps $t$, la particule subit, de la part des molécules du milieu, $n$ impulsions $p_1, \ldots, p_n$ de grandeur et de signes fortuits. On calcule les déplacements partiels $\delta_i$ dans le milieu visqueux (2). Le déplacement total de la particule est donné par $\Delta_x = \Sigma\delta_i$; on a $\overline{\Delta_x^2} = \Sigma\overline{\delta_x^2}$ (5). Le carré moyen de l'impulsion $\overline{p_i^2}$ est calculé, par la méthode bien connue de M. Einstein, en partant du théorème d'équivalence (6 à 8); en substituant dans (5), on obtient la formule (9) pour le mouvement de translation. La même méthode conduit à la formule pour le mouvement rotatoire (10).