Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 1, 91--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123999

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1918

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

22. J. I. k. $6^h\ 58^m\ 52^s$; Slunce zapadá v 6^h 15. — 10^h *konjunkce* Saturna s Měsícem.
23. *Min. Algolu* $12^h\ 17^m$.
25. J. II. k. $8^h\ 26^m\ 52^s$.
26. 2^h *konjunkce* Marta s Měsícem. — *Min. Algolu* $9^h\ 5^m$.
27. 17^h Merkur v přísluní.
29. J. I. k. $8^h\ 54^m\ 20^s$.

S.

Úlohy.

a) Z mathematiky.

1.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a$$
$$x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 = b.$$

(Speciálně pro $a = 15$, $b = 85$.)

Dr. *Jar. Bílek.*

2.

Ohniskem F kuželosečky vedena tetiva M_1M_2. Sestrojme bod G tak, že $M_1F = M_2G$. Jaké je geometrické místo bodu G, otáčí-li se tetiva M_1M_2 kolem ohniska.

Prof. *Fr. Granát.*

3.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = a$$
$$x^2 - y^2 + xy = b.$$

Rudolf Hruša.

4.

Na rameni daného úhlu γ jsou dány body A, B, jichž vzdálenosti od vrcholu k úhlu γ jsou a, b; nalézti na druhém rameni bod D tak, aby úhel ADB byl co největší.

Škol. rada *Václav Hübner.*

5.

Sestrojiti konfokální ellipsu a hyperbolu, je-li dán jich průsečík, střed a ohnisko.

Jan Kodl, posl. č. techn. v Praze.

6.

V libovolném šestiúhelníku $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ buďtež po řadě strany půleny body Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6. Dokázati, že trojúhelníky $Q_1Q_3Q_5$ a $Q_2Q_4Q_6$ mají společné těžiště.

Zásob. off. *J. Kroupa.*

7.

Který trojúhelník s vrcholy na třech soustředných kružnicích má největší plochu?

Prof. *Ant. Lochmann.*

8.

Sestrojiti kuželosečku, dáno-li

a) ohnisko, tečna a dva body,

b) ohnisko, dvě tečny a jeden bod.

Mádle, posl. č. techn. v Praze.

9.

Jsou-li a, b, c strany trojúhelníku, a_1, b_1, c_1 vzdálenosti libovolného bodu od jeho vrcholů, dokažte, že platí nerovnosti

$$aa_1 + bb_1 \geqq cc_1$$
$$bb_1 + cc_1 \geqq aa_1$$
$$cc_1 + aa_1 \geqq bb_1.$$

Prof. *Jaromír Pilnáček.*

10.

Dokažte, že kružnice opsaná polárnímu trojúhelníku kuželosečky $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ protíná pod pravým úhlem kružnici $x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2$.

Týž.

11.

Jsou dány tři kružnice K_1, K_2, K_3 o středech O_1, O_2, O_3; jest sestrojiti kružnici K, aby chordála kružnice K_1 a K procházela bodem A_1, chordála kružnice K_2 *a* K bodem A_2 a chordála kružnic K_3 a K bodem A_3.

Prof. *Pleskot.*

12.

Jsou dány tři kružnice K_1, K_2, K_3 o poloměrech r_1, r_2, r_3, které se navzájem vně dotýkají; těch dotýkají se jiné dvě kružnice K a K', jichž poloměry nechť jsou ϱ a ϱ'. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = 2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

Týž.

13.

Jest dán pravý úhel o vrcholu O a kružnice K o středu J, která se obou ramen dotýká: dále je dán bod P. Jest sestrojiti ke kružnici K tečnu, která protíná rameno úhlu v bodech A a B a to tak, že spojnici AB lze zříti z bodu P pod pravým úhlem.

Týž.

14.

Strany trojúhelníka jsou kořeny rovnice

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

Jsou-li α, β, γ úhly jeho, čemu se rovná

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma?$$

Týž.

15.

Danému trojúhelníku opsati trojúhelník rovnostranný o největší ploše. Prof. *Ed. Pleva.*

16.

Dokažte, že kružnice opsaná z ohniska ellipsy jako středu poloměrem b jest půlena kružnicí opsanou nad hlavní osou jako průměrem. Na základě této vlastnosti sestrojiti ellipsu, je-li dáno ohnisko F, délka vedlejší osy b a dvě tečny t_1 a t_2.

Týž.

17.

Dokažte, že

$$1 + \frac{1}{2}\binom{k+1}{1} + \frac{1}{2^2}\binom{k+2}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k} = 2^k$$

Prof. *Jan Schuster.*

18.

Dokažte, že

$$\binom{k}{l} - \binom{k-1}{l} + \binom{k-2}{l} - \binom{k-3}{l} + \ldots = \frac{1}{2}\binom{k}{l} +$$

$$+ \frac{1}{2^2}\binom{k-1}{l-1} + \frac{1}{2^3}\binom{k-2}{l-2} + \ldots + \frac{1}{2^l}\binom{k-l+1}{l} + \frac{1}{2^l}\varepsilon,$$

kdež $\varepsilon = 0$ neb 1 dle toho, je-li $k - l$ liché neb sudé.

Týž.

19.

V kladném trojúhelníku ABC veďme těžnici do bodu D příčku DE do středu strany AC, příčku EF do středu AD, příčku FG do středu DE atd. levotočně. Stanovte souřadnice mezného bodu té spirály lomené, její délku a podobně pro spirálu pravotočnou, vzdálenost obou mezných bodů jakož i rozdíl délek obou spirál. Týž.

20.

Opište trojúhelníku rovnoramennému ellipsu nejmenší plochy. Určete sklon tečny v koncových bodech základny k výšce.

Týž.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Určiti směr světelných paprsků tak, aby vržené stíny tří daných mimoběžek na půdorysně omezovaly trojúhelník rovnostranný. Dr. *Josef Klíma.*

2.

Na kouli jest dán bod M a v půdorysně π jeho kosoúhlý průmět M'; sestrojiti k ploše kulové v bodě M tečny t_1, t_2 k sobě kolmé, aby jich šikmé průměty t_1', t_2' jdoucí bodem M' byly též k sobě kolmé. Zás. off. *J. Kroupa.*

3.

Sestrojiti kulovou plochu, která se dotýká tří stěn daného čtyřstěnu a čtvrtou stěnu protíná v kružnici daného poloměru. Prof. *Jar. Pilnáček.*

4.

Sestrojiti rotační plochu kuželovou, je-li dán vrchol její V, dva body povrchu M_1 a M_2 a rovina ϱ, jež seče plochu v parabole. Prof. *Ed. Pleva.*

5.

Danou ellipsou v půdorysně proložte rotační plochu válcovou a omezte ji kruhovou hranou tak aby se touto dotýkala nárysny. Prof. *Jar. Volf.*

c) Z fysiky.*)

1.

Odvoďte urychlení, kterým padá na Atwoodově padostroji přívažkem m zatížená hmota M na základě věty vyřčené v třetím odstavci článku. Niť považujte za bezvážnou a rovněž kladku, přes niž je vedena. *K.*

2.

Dokažte tvrzení 4. odstavce článku, zejména o profilu vlny a výpočtu poloměru křivosti, užívajíce poznatků své pomocné knihy od proff. *Bydžovského* a *Vojtěcha* „Mathematika pro nejvyšší třídu středních škol.“ Zvláště pak diskutujte vzorec (11) článku a ukažte, že existuje jistá nejmenší postupná rychlost vln na povrchu vodním a vypočtěte příslušnou délku vlnovou. Podobnou úvahu proveďte pro rtuť a znázorněte graficky vztah mezi V a λ. Jak lze z měření délky kraťounkých vlnek („čeřivých“) podmíněných hlavně povrchovým napětím vypočísti tuto fysikální konstantu kapaliny? *K.*

3.

Zkusťe na podkladě citované knihy proff. Bydžovského a Vojtěcha nahraditi elementární úvahu 5. odstavce článku úvahou

---

*) Řešení úloh předpokládá studium článku „O vodních vlnách“ v tomto sešitě obsaženého.

infinitesimální. I nedovedete-li toho, vypočtěte, na kolik procent amplitudy povrchové klesne amplituda v hloubce rovné délce vlnové. Ve které hloubce klesne rozruch způsobený mořskými vlnami délky 20 metrů a výšky ($2a_0$) 6 metrů na kmity amplitudy 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm*? *K.*

4.

Zkuste výsledek 7. odstavce článku dovoditi cestou elementární, sledujíce obdobný postup úvahy. Vypočtěte numericky energii mořské vlny dimensí v úloze 3. udaných, a horizontální šířky 10 metrů. Jak veliká je postupná rychlost té vlny a kolik koňských sil by se v nejpříznivějším případě (zařízením pracujícím s účinností rovnou 100%) dalo z ní získat na pevném stanovišti?

Model délky 10 stop potřebuje 0·5 koňské síly, aby mohl být pohybován rychlostí 3 mil za hodinu proti odporové síle vln. Kolika koňských sil potřebovala by loď modelu podobná, ale 250 stop dlouhá k dosažení „odpovídající" rychlosti $3\sqrt{250:10} = 15$ mil za hodinu proti odporující síle vznikajících vln? *K.*

5.

Jakou rychlostí musí se táhnouti bárka v průplavu hloubky dvou metrů, aby byla vynaložená práce co nejmenší?

V mělkém průplavě hloubky H, omezeném po stranách vertikálními stěnami, nachází se na dně příčná překážka výšky a, malé proti H. Voda v průplavě se pohybuje rovnoměrně rychlostí V. Dokažte, že na povrchu vodním, právě nad překážkou, objeví se příčné vlně podobné vzedmutí vody, je-li $V > \sqrt{gH}$, a že se tamže objeví korytu podobná příčná depresse, je-li $V < \sqrt{gH}$. *K.*

Vypsání cen za řešení úloh.

Jako v letech minulých budou i letos udíleny *studujícím středních škol*, kteří jsou odběrateli »Časopisu« nebo »Přílohy«, ceny za správná řešení úloh v »Příloze«. Ceny jsou tyto:

A) **Z mathematiky:**

1. Ceny první.

Pecl, Applikace Newton-Puiseuxovy methody v geometrii.
Řehořovský, Základové vyšší algebry. Díl I.
Studnička, Slavnost půlstaletých narozenin R. Descartesa.
Příloha k „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky«, 3 ročníky.

2. Ceny druhé.

Studnička, Základové nauky o číslech.
Studnička, O původu a rozvoji nauky o číslech.
Pánek, Dr. F. J. Studnička. Nástin jeho života a činnosti.
Příloha k »Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky«, 2 ročníky.

3. Ceny třetí.

Cremona-Weyr, Úvod do geometrické theorie křivek rovinných.
Čubr, O měření země.
Šolín, Počátky arithmografie.
Příloha k »Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky«, 1 ročník.
Mimo to obdrží několik nejlepších řešitelů spis:
Studnička, Úvod do analytické geometrie v rovině (Sborník, sv. VII.).

B) **Z deskriptivní geometrie**:

Jarolímek, Deskriptivní geometrie. Díl I., II. a III.
Machovec, Zobrazování tečen a středů křivosti křivek.

C) **Z fysiky**:

Briot-Pšenička, Mechanická theorie tepla.
Petr-Kučera, Koláčkův sborník.
Seydler, Izák Newton a jeho principia.

Fond Jaromíra Mareše, abiturienta reálky v Praze-III., jednoročního dobrovolníka-desátníka c. a k. pěšího pluku, který po zranění v desáté sočské bitvě dne 4. června 1917 u S. Giovanni skonal dne 13. června 1917 v nemocnici ve Štýrském Hradci ve věku 19 let, založen byl letos jistinou 1000 K, složenou rodiči zesnulého, p. stav. radou inž. *J. Marešem* s chotí, za tím účelem, aby z výnosu jeho udílela Jednota ročně 2 ceny nejlepším řešitelům úloh v »Příloze«, a to prvou cenu (knihy v ceně 16 K) řešitelům z české reálky v Praze-III., druhou cenu (knihy v ceně 16 K) řešitelům z české reálky v Českých Budějovicích; třetí cenu (8 K) obdrží nejlepší počtář z české obecné školy v Českých Budějovicích, v Dlouhé ulici. Kdyby nebylo řešitelů z jmenovaných ústavů ani z českého gymnasia v Čes. Budějovicích, udělí se tyto ceny jiným řešitelům.

Ceny tyto vypisují se letos poprvé.

Řešení úloh.

Řešení úloh buďtež zaslána nejpozději do **20. března 1918** na adresu: S. doc. Dr. *K. Rychlík*, v Praze II., Mikulandská 3.

Páni řešitelé se žádají, aby řešení každé úlohy bylo napsáno *zvlášť* na jednu nebo několik čtvrtek papíru obyčejného formátu. V čelo *každého* řešení budiž uvedeno číslo úlohy (tekst úlohy není nutno psáti), jméno řešitele a ústavu, na němž studuje. Řešení buďtež seřazena dle čísel, a jsou-li zasílána v obalu menšího formátu než čtvrtkového, jako celek složena. Zároveň uveďte páni řešitelé při poslední zásilce na zvláštním lístku papíru seznam všech řešení, která vůbec zaslali.

Mimo to je nutno, aby páni řešitelé uvedli přesnou adresu svou, aby mohly býti ceny správně rozeslány.

Neopomeňte zásilky dostatečně frankovati: do 20 *g* 15 *h*, za každých dalších 20 *g* 5 *h*