Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Řehořovský

O plochách rozvinutelných. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 1, 31--42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123992

barevné pruhy. Zajímavé zjevy vidíme někdy, když není staniol dobře přilepen na kovové tabulce, tak že uchází mezi staniolem i tabulkou tenký proud étherových par; týž okazuje obyčejně živé barvy.

O plochách rozvinutelných.

Napsal

V. Řehořovský v Praze.

Plochy přímočárné mohou býti dvojího druhu. 1) Takové, u kterých dvě soumezné přímky se neprotínají — *plochy zborcené* a 2) ony, u kterých dvě soumezné přímky se protínají; plochy ty zovou se *rozvinutelné*, poněvadž kterýkoliv plošný prvek obsažený mezi dvěma soumeznými přímkami plochy možno převésti do roviny libovolného jiného plošného prvku a tedy celou plochu v jedinou rovinu.

Jakým spůsobem analyticky vyšetřovati lze plochy zborcené, ukázal jsem na jiném místě*); účelem řádků následujících jest rozšířiti onen spůsob analytického vyšetřování i na plochy rozvinutelné.

Rovnice ploch rozvinutelných.

1. Buďtež

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ z &= \gamma x + \delta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

rovnice přímky v prostoru, která dle určitého zákona polohu svou spojitě mění; zákon ten vyjádříme tím spůsobem, že koefficienty α, β, γ, δ, podmiňující polohu přímky, považujeme za funkce jediné proměnné t, kteréž aspoň v jistém intervallu této proměnné spojitě se mění. Každé hodnotě t náleží pak jedna poloha přímky (1) a veškeré přímky ty vyplňují přímočarou plochu, která všeobecně bude zborcenou. Jedná se tudíž především o to nalezti podmínku pro koefficienty α, β, γ, δ, aby plocha rovnicemi (1) určená udávala plochu rozvinutelnou.

---

*) Archiv mathematiky a fysiky, svaz. II., číslo IV.

Podmínka ta plyne z poznámky, že vždy dvě soumezné přímky povrchové se mají protínati. Přímce (1) soumezná přímka bude míti rovnice:

$$y = \alpha (t + dt) x + \beta (t + dt),$$
$$z = \gamma (t + dt) x + \delta (t + dt);$$

aby obě přímky se protínaly, platí známá podmínka:*)

$$\frac{\alpha (t + dt) - \alpha (t)}{\beta (t + dt) - \beta (t)} = \frac{\gamma (t + dt) - \gamma (t)}{\delta (t + dt) - \delta (t)}.$$

Dělíme-li čítatele i jmenovatele obou stran dt a přejdeme-li pak k mezím pro $\lim dt = 0$, přejde podmínka ta v novou

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma'}{\delta'}$$

aneb $$\alpha'\delta' = \beta'\gamma', \tag{2}$$

kdež α', β', atd. značí první derivace funkcí α, β, atd. podle t.

Mají-li tedy rovnice (1) představovati plochu rozvinutelnou, nutno, aby koefficienty α, β, γ, δ vyhovovaly podmínce (2) aneb jinými slovy, koefficienty ony nejsou libovolné, nýbrž zvolením tří jest čtvrtý úplně určen; tak jest ku př. z rovnice (2)

$$\delta = \int \frac{\beta' \gamma'}{\alpha'} dt + C,$$

a rovnice plochy rozvinutelné vůbec jsou tedy

$$y = \alpha x + \beta,$$
$$z = \gamma x + \int \frac{\beta'\gamma'}{\alpha'} dt + C.$$

V následujícím uváděti budeme rovnice plochy vždy ve tvaru (1), majíce při tom na paměti, že současně platí též rovnice (2).

2. V rovnicích (1) a (2) objevují se tři zdánlivě neodvislé koefficienty ku př. α, β, γ co funkce jediné proměnné t; poněvadž však možná jeden z těchto koefficientů ku př. α voliti přímo za proměnnou t, načež β a γ se přiměřeně přetvoří, zbývají vlastně jen tyto co úplně neodvislé funkce; z toho soudíme, že *každá plocha rozvinutelná určena jest dvěma podmínkami.* Podmínky ty mohou býti rozmanité jako: dvě křivky, dvě

*) Dr. F. J. Studnička: Anal. geometrie v prostoru str. 42.

plochy, křivka a bod (kužel), plocha a přímka (opsaný válec) atd. Jakým spůsobu tu pokračovati lze při určování koefficientů α, β, γ, δ, vidno z případu následujícího, kde předpokládáme ku př. že plocha určena *dvěmi křivkami.*

Buďtež rovnice křivky první K_1

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0, \tag{1'}$$

křivky druhé K_2

$$F_2(x, y, z) = 0, \; f_2(x, y, z) = 0 \tag{2'}$$

Má-li přímka povrchová plochy

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta \tag{3'}$$

protínati křivku první K_1, nutno, aby souřadnice x, y, z průsečného bodu vyhovovaly současně čtyřem rovnicím (1′) a (3′), což nastane, pak-li koefficienty α, β, γ, δ vyhovují podmínce, kterou obdržíme vyloučením x, y, z z rovnic (1′) a (3′); podmínečná rovnice ta budiž

$$\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0. \tag{4'}$$

Podobně vede druhá podmínka, aby přímka (3′) protínala křivku K_2, k druhé rovnici

$$\varphi_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0. \tag{5'}$$

Připojíme-li k tomu ještě podmínku známou pro rozvinutelné plochy

$$\alpha' \delta' - \beta' \gamma' = 0,$$

obdržíme v celku tři rovnice pro čtyry neznámé; jednu z těchto neznámých možno libovolně voliti co jistou funkci proměnné t anebo přímo co proměnnou t samu, načež ostatní tři úplně určeny jsou. Zároveň z toho vidíme, že *tutéž plochu přerozmanitými rovnicemi udati lze* a záleží tu velmi mnoho na prospěšné volbě jedné z těchto funkcí, aby ostatní a tím i rovnice plochy (1) co nejjednoduše̜ji se obdržely.

Podobně udány jsou rovnicemi

$$\begin{aligned} y - n &= \alpha(x - m), \\ z - p &= \gamma(x - m) \end{aligned} \tag{6'}$$

veškeré *plochy kuželové*, značí-li m, n, p souřadnice vrcholu; podmínce (2) jest již tvarem uvedených rovnic vyhověno, neboť jest tu

$$\beta = n - \alpha m, \qquad \delta = p - \gamma m$$

a tedy $\quad \beta' = -\alpha' m, \qquad \delta' = -\gamma' m,$

což vloženo do (2) identicky převádí tuto na nullu.

Koefficienty α a γ ustanoví se pak dále z podmínky, že každá přímka povrchová má protínati křivku řídící plochy kuželové; je-li tato křivka dána rovnicemi

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0, \qquad (7')$$

obdržíme opět vyloučením x y, z z rovnice (6′) a (7′) podmínečnou rovnici

$$\varphi(\alpha, \gamma) = 0$$

pro koefficienty α a γ, z nichž opět jeden libovolně voliti lze.

Plochy válcové určeny jsou rovnicemi

$$y = ax + \beta,$$
$$z = bx + \delta,$$

kdež a a b jsou konstanty udávající směrnice průmětů přímky řídící na rovinách XY a XZ; koefficienty β a δ ustanoví se jako u ploch kuželových z podmínky, že přímka povrchová v každé své poloze protínati má křivku řídící.

Podmínečné rovnici (2) i zde vyhověno, neboť jest

$$\alpha' = 0, \quad \gamma' = 0.$$

3. *Každou křivkou prostorovou* určena jest plocha rozvinutelná co geometrické místo jejích tečen, an vždy dvě soumezné tečny se protínají v bodu křivky oběma společném. Předpokládáme-li křivku danou rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

na kterýž případ převésti lze vždy onen, kde křivka dána co průsek dvou ploch, jsou rovnice tečny v bodu t křivky

$$y - \psi = \frac{\psi'}{\varphi'}(x - \varphi),$$

$$z - \chi = \frac{\chi'}{\varphi'}(x - \varphi),$$

a tedy

$$\alpha = \frac{\psi'}{\varphi'}, \quad \beta = \psi - \frac{\varphi\psi'}{\varphi'} = \psi - \varphi\alpha,$$

$$\gamma = \frac{\chi'}{\varphi'}, \qquad \delta = \chi - \frac{\varphi\chi'}{\varphi'} = \chi - \varphi\gamma,$$

kteréž funkce opět podmínečné rovnici zadost činí, jak snadno přesvědčiti se lze.

Naopak shledáme dále, že každé ploše rozvinutelné náleží určitá křivka prostorová co geometrické místo průsečných bodů jejich soumezných přímek povrchových.

Rovina tečná.

4. Určena-li plocha vůbec rovnicí

$$f(x, y, z) = 0,$$

platí

$$f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz = 0; \tag{3}$$

differencujeme-li rovnice (1) plochy rozvinutelné, obdržíme

$$dy = \alpha\, dx + (\alpha' x + \beta')\, dt,$$
$$dz = \gamma dx + (\gamma' x + \delta')\, dt$$

a vyloučíme-li dt,

$$[\alpha(\gamma' y + \delta') - \gamma(\alpha' x + \beta')]\, dx - (\gamma' x + \delta')\, dy$$
$$+ (\alpha' x + \beta')\, dz = 0,$$

kteráž zavedením

$$\delta' = \frac{\beta' \gamma'}{\alpha'}$$

z podmínečné rovnice (2) přejde v

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')(\alpha' x + \beta')\, dx - \gamma'(\alpha' x + \beta')\, dy + \alpha'(\alpha' x + \beta')\, dz = 0;$$

rovnice tato jest differencialní rovnicí plochy rozvinutelné určené rovnicemi (1); srovnáme-li ji s všeobecnou differencialní rovnicí (3) ploch vůbec, shledáváme, že pro naši plochu jest

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')(\alpha' x + \beta')\,\varrho, \\ f_2 &= -\gamma'(\alpha' x + \beta')\,\varrho, \\ f_3 &= \alpha'(\alpha' x + \beta')\,\varrho, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

kdež ϱ libovolného součinitele značí, kterého blíže udati nelze.

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice roviny tečné vůbec

$$f_1\,(X - x) + f_2\,(Y - y) + f_3\,(Z - z) = 0,$$

a dělíme-li společným faktorem $\varrho\,(\alpha' x + \beta')$, obdržíme

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\, X - x') - \gamma'(Y - y) + \alpha'(Z - z) = 0;$$

vložíme-li ještě za y a z hodnoty z (1), obdržíme konečně

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\, X - \gamma_{,} Y + \alpha' Z + \beta\gamma' - \delta\alpha' = 0 \tag{5}$$

co rovnici roviny tečné v bodu x přímky povrchové t. Poněvadž vložením hodnot za y a z veškeré členy obsahující x se vzájemně ruší a tedy rovnice (5) pouze na t závislá jest, soudíme z toho, že *veškerým bodům přímky povrchové t náleží jediná společná rovina tečná* aneb jinak, *rovina tečná v jistém bodu plochy rozvinutelné obsahuje přímku povrchovou tomuto bodu přislušnou.*

Přímce t soumezná přímka povrchová $t + dt$ bude míti rovnice

$$y = \alpha_1 x + \beta_1,$$
$$z = \gamma_1 x + \delta_1,$$

značí-li $\alpha_1 = \alpha\,(t + dt)$, atd.; jest-li x_1, y_1, z_1 některý bod této přímky $t + dt$, takže

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1, \quad z_1 = \gamma_1 x_1 + \delta_1,$$

a dosadí-li se souřadnice tohoto bodu do rovnice (5) roviny tečné, obdrží se výraz

$$V_1 = (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\,x_1 - \gamma'\,(\alpha_1 x_1 + \beta_1) + \alpha'\,(\gamma_1 x_1 + \delta_1) + \beta\gamma' - \delta\alpha'$$
$$= -\gamma' x_1\,(\alpha_1 - \alpha) + \alpha' x_1\,(\gamma_1 - \gamma) - \gamma'\,(\beta_1 - \beta) + \alpha'\,(\delta_1 - \delta);$$

přejdeme-li pak k mezím pro lim $dt = 0$, promění se výraz v

$$V = -\alpha'\gamma' x_1 + \alpha'\gamma' x_1 - \gamma'\beta' + \alpha'\delta' = 0$$

pro jakékoliv x_1; z toho patrno, že rovina tečná obsahuje též přímku soumeznou, čímž potvrzena známá věta:

Tečná rovina plochy rozvinutelné obsahuje dvě soumezné přímky povrchové a dotýká se tedy plochy podle plošného prvku omezeného těmito dvěma přímkami povrchovými.

5. Kdybychom předpokládali tuto vlastnost roviny tečné co známou, mohli bychom cestou pohodlnější odvoditi rovnici roviny tečné.

Aby totiž rovina

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6}$$

obsahovala přímku povrchovou t, platí známé podmínky*)

$$A + B\alpha + C\gamma = 0,$$
$$B\beta + C\delta + D = 0;$$

aby obsahovala současně přímku soumeznou $t + dt$, platí podobně

$$A + B\alpha_1 + C\gamma_1 = 0,$$
$$B\beta_1 + C\delta_1 + D = 0,$$

kdež α_1, β_1, atd. má význam týž co v článku předcházejícím.

Poslední čtyry homogenní rovnice pro koefficienty A, B, C, D připouštějí jiná řešení mimo nully, pak-li

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \delta & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \delta_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kterýž determinant odečtěním první řádky od třetí a druhé od čtvrté a vymezením pro lim $dt = 0$ přejde v

*) Dr. F. J. Studnička: Anal. geometrie v prostoru str. 45.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \delta & 1 \\ 0 & \alpha' & \gamma' & 0 \\ 0 & \beta' & \delta' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

aneb rozvedeme-li

$$\begin{vmatrix} \beta & \delta & 1 \\ \alpha' & \gamma' & 0 \\ \beta' & \delta' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{vmatrix} = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 0;$$

této podmínce jest však u ploch rozvinutelných vyhověno. Rovnici roviny tečné tedy obdržíme, vyloučíme-li z (6) a kterýchkoliv tří ostatních rovnic koefficienty A, B, C, D; výsledek vyloučení, užijeme-li prvních tří rovnic, jest

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \delta & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \gamma_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

kterýž determinant opět odečtěním druhé řádky od čtvrté a vymezením pro lim $dt = 0$ přejde v

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \delta & 1 \\ 0 & \alpha' & \gamma' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

jenž rozveden podává

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\,x - \gamma' y + \alpha' z + \beta\gamma' - \delta\alpha' = 0,$$

tedy tutéž rovnici jako dříve.

Podotýkáme ještě, že rovnici roviny tečné lze psáti též v jiném tvaru, v kterém místo α', γ' objevují se β', δ'; dělíme-li rovnici uvedenou γ' a zavedeme-li na základě (2) $\frac{\beta'}{\delta'}$ místo $\frac{\alpha'}{\gamma'}$, obdrží rovnice tvar

$$(\alpha\delta' - \gamma\beta')\,x - \delta' y + \beta' z + \beta\delta' - \delta\beta' = 0. \qquad (7)$$

Přímky obrysové.

6. Má-li některá přímka povrchová býti přímkou obrysovou plochy vzhledem k některé rovině t. j. má-li průmět její na rovinu tuto býti obrysem průmětu plochy na tutéž rovinu, třeba, aby rovina tečná přímce té náležející byla normalná k rovině, vzhledem ku které má přímka ta býti obrysovou.

Úlohu tuto řešiti lze pomocí rovnic (5) a (7) roviny tečné. Nejdůležitějšími při zobrazování ploch rozvinutelných jeví se býti přímky obrysové vzhledem k rovinám souřadným a stanovením těchto přímek chceme se tuto zanášeti.

Pro přímky obrysové vzhledem k rovině XY nutno, aby jich roviny tečné byly normalné k rovině XY, což nastane jsou-li rovnice těchto rovin tvaru

$$ax + by + c = 0,$$

t. j. rovná-li se koefficient u z 0; srovnáme-li tedy tuto rovnici s rovnicemi (5) a (7), shledáváme, že tu třeba, aby

$$\alpha' = 0, \ \beta' = 0. \qquad (8)$$

Společné kořeny t těchto rovnic udávají hledané přímky obrysové; rovnice jich obdržíme vložením vypočtěných hodnot t do rovnic (1) přímky povrchové. Rovina tečná pak má rovnici tutéž jako průmět přímky povrchové na XY, jak nutno býti; výsledek ten plyne i z rovnic (5) a (7), neboť vložíme-li do první $\alpha' = 0$, a do druhé $\beta' = 0$, obdržíme

$$a\gamma' x - \gamma' y + \beta\gamma' = 0,$$
$$a\delta' x - \delta' y + \beta\delta' = 0,$$

kteréž, dělíme-li první γ' a druhou δ', podávají stejnou rovnici

$$ax - y + \beta = 0,$$

což jest průmět přímky povrchové na rovinu XY.

Podobnou úvahou nalezáme, že společnými kořeny t rovnic

$$\gamma' = 0, \ \delta' = 0 \qquad (9)$$

určeny jsou přímky obrysové vzhledem ku rovině XZ a společnými kořeny rovnic

$$a\gamma' - \gamma\alpha' = 0, \ a\delta' - \gamma\beta' = 0 \qquad (10)$$

přímky obrysové vzhledem k rovině YZ; rovnice přímek samých obdrží se opět dosazením vypočtěných hodnot t do rovnic (1).

Křivka vratu.

7. Dle základní vlastnosti ploch rozvinutelných protínají se vždy dvě soumezné přímky povrchové; veškeré tyto průsečné body vytvořují na ploše zvláštní křivku, která obdržela jmeno *křivka vratu* z důvodů, jež později poznáme (čl. 28). Souřadnice bodu průsečného přímek t a $t + dt$ obdržíme dle známých vzorců*); jest tu

*) Dr. F. J. Stndnička: Analytická geometrie v prostoru str. 42.

$$x = -\frac{\beta(t+dt)-\beta(t)}{\alpha(t+dt)-\alpha(t)},$$

aneb dělíme-li čítatele i jmenovatele dt a vymezíme-li pro $lim\, dt = 0$,

$$x = -\frac{\beta'}{\alpha'} \text{ aneb též dle (2) } = -\frac{\delta'}{\gamma'} \tag{10}$$

načež, dosadíme-li tuto hodnotu do (1),

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\alpha'} = -\frac{\alpha^2}{\alpha'}D\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta^2}{\alpha'}D\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \\ z &= \frac{\gamma\delta'-\delta\gamma'}{\gamma'} = -\frac{\gamma^2}{\gamma'}D\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) = \frac{\delta^2}{\gamma'}D\left(\frac{\gamma}{\delta}\right), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

kdež značí D derivaci funkce za ním stojící podle t.

Rovnice tyto podávají souřadnice bodů křivky vratu co funkce proměnné t, tedy polohu bodu křivky té na příslušné přímce povrchové. Vyloučíme-li vždy ze dvou těchto rovnic proměnnou t, obdržíme průměty křivky vratu na rovinách souřadných XY, YZ, ZX.

Poněvadž každá přímka povrchová protíná předcházející a následující přímku, má s křivkou vratu dva body nekonečně blízké společné a jest tedy *tečnou křivky vratu.* (Srovnej čl. 3).

Nekonečně malý úhel, který dvě po sobě jdoucí přímky povrchové t. j. tečny křivky vratu uzavírají, nazýváme *úhlem kontingenčním*; vzorec pro úhel ten můžeme sobě snadno odvoditi. Značí-li opět $\alpha_1 = \alpha(t+dt)$, atd., jest přímce (1) soumezná přímka určena rovnicemi

$$y = \alpha_1 x + \beta_1, \quad z = \gamma_1 x + \delta_1$$

a úhel $d\omega$ obou přímek určen známým vzorcem *)

$$\cos d\omega = \frac{1+\alpha\alpha_1+\gamma\gamma_1}{\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}\,.\,\sqrt{1+\alpha_1{}^2+\gamma_1{}^2}},$$

z čehož

$$tg\, d\omega = \frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha)^2+(\gamma_1-\gamma)^2+[\alpha(\gamma_1-\gamma)-\gamma(\alpha_1-\alpha)]^2}}{1+\alpha\alpha_1+\gamma\gamma_1}$$

dělíme-li na obou stranách dt a vymezíme opět pro $lim\, dt = 0$, píšeme-li pak v limitě za $tg\, d\omega$ oblouk $d\omega$, obdržíme konečně

*) ibid. pag. 42.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2}}{1 + \alpha^2 + \gamma^2} \tag{11}$$

co výraz pro kontingenční úhel $d\omega$.

Dokázali jsme v čl. 4., že rovina tečná obsahuje dvě soumezné přímky povrchové t. j. dvě soumezné tečny křivky vratu; z toho jde, že *rovina tečná podle určité přímky povrchové jest rovinou oskulační křivky vratu v bodu příslušném oné přímce povrchové.*

8. Jest-li že křivka vratu má nekonečné větve, může se státi, že tečny v nekonečně vzdálených bodech křivky vratu nalezají se z části v konečnu; tyto tečny aneb přímky povrchové jsou pak *asymptotami křivky vratu.* Jedná-li se o určení možných asymptot dané křivky vratu, třeba především vyšetřiti, zda-li křivka vratu má nějaké body v nekonečnu; to se stane tím spůsobem, že se vyhledají ony hodnoty t, pro které některá souřadnice rovnic (10) se stává nekonečně velkou. Tyto hodnoty t vloženy pak do rovnic

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta, \quad \gamma y - \alpha z = \gamma\beta - \alpha\delta$$

podávají rovnice asymptot křivky vratu. Nejjistěji určí se tyto rovnice tím, že se neurčují přímo hodnoty α, β, γ, δ pro ony zvláštní hodnoty t, nýbrž úseky, které průměty přímky povrchové na rovinách souřadných určují na osách souřadných; stává se tu totiž dosti zhusta, že funkce α, β, atd. obdrží pro ona t hodnoty nekonečně velké, kdežto úseky průmětů na osách, aspoň některé, mají hodnoty konečné.

Roviny tečné podle asymptot křivky vratu jsou pak oskulačními rovinami v nekonečně vzdálených bodech této křivky a možno je zváti *asymptotickými rovinami křivky vratu*; rovnice jich se obdrží, vložíme-li hodnoty t odpovídající nekonečně vzdáleným bodům křivky vratu do rovnice (5) roviny tečné.

I zde jest výhodnější místo rovnice přímo určovati nejprvé úseky, které rovina tečná odetíná na osách souřadných a z těch pak teprvé rovnici samu.

Podotknouti sluší ještě, že průměty křivky vratu na rovinách souřadných tvoří též obrysy průmětů plochy rozvinutelné na těchto rovinách, neboť každou tečnou křivky vratu možno si mysleti roviny kolmé k rovinám souřadným a tedy prvek této křivky obsažený v těchto rovinách tvoří část křivky obrysové vzhledem k rovinám souřadným.

9. Abychom objasnili upotřebení dosud uvedených vzorců, volme následující příklad:

Jsou dány dva kužele stupně druhého s vrcholy na ose Z ve vzdálenostech a a b; řídící křivkou prvního budiž kružnice v rovině XY poloměru a, mající střed svůj v ose X a dotýkající se v bodu počátečném osy Y, podobně řídící křivkou druhého budiž kružnice v rovině XY poloměru b se středem v ose Y a procházející taktéž bodem počátečným. Rovnice obou kuželů jsou pak

$$x^2 + y^2 + 2x(z - a) = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2y(z - b) = 0;$$

průnik dvou ploch stupně druhého jest křivka prostorová stupně čtvrtého; poněvadž ale uvedené kužele mají jednu přímku povrchovou společnou, rozpadá se v našem případu křivka prostorová v přímku a křivku stupně třetího; zavedeme-li co proměnnou t tangentu úhlu, který průměty na XY přímek povrchových obou kuželů v téže promítací rovině se nalezajících s osou X uzavírají, to jest připojíme-li k hořejším rovnicím rovnici

$$y = tx,$$

obdržíme pro křivku průniku obou kuželů souřadnice

$$x = \frac{2(b-a)t}{(1-t)(1+t^2)}, \quad y = \frac{2(b-a)t^2}{(1-t)(1+t^2)},$$
$$z = \frac{a - bt}{1 - t}. \tag{12}$$

Tečny této křivky prostorové stanoví naši plochu rozvinutelnou; předpokládáme-li rovnice jedné z těchto tečen ve tvaru (1) t. j.

$$\eta = \alpha\xi + \beta,$$
$$\zeta = \gamma\xi + \delta,$$

jest tu jak známo *)

$$\alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \beta = y - x\frac{dy}{dx},$$

*) Dr. F. J. Studnička: O počtu differencialním str. 201., druhé vyd.

$$\gamma = \frac{dz}{dx}, \quad \delta = z - x\frac{dz}{dx},$$

takže zavedeme-li hodnoty z rovnic (12), obdržíme

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{t(2-t+t^3)}{1-t^2+2t^3}, \quad \beta = -\frac{2(b-a)t^2}{1-t^2+2t^3} \\ \gamma &= -\frac{(1+t^2)^2}{2(1-t^2+2t^3)}, \quad \delta = \frac{a(1-t^2)+2bt^3}{1-t^2+2t^3} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

čímž plocha rozvinutelná jest určena.

Rovinu tečnou dle určité přímky povrchové t této plochy a tedy zároveň rovinu oskulační křivky (12) v bodu t obdržíme dle vzorce (5); dosazením příslušných hodnot podává se

$$(3t^2 - 1)x - t(3-t^2)y - 2(1-t^3)z + 2(a - bt^3) = 0.$$

Vložíme-li do rovnice této souřadnice libovolného bodu v prostoru, obdržíme podmínečnou rovnici, kdy oskulační rovina prochází oním bodem; rovnice ta jest stupně třetího pro t, z čehož jde, že každým bodem v prostoru možno vésti tři oskulační roviny křivky (12); křivka ta jest tedy *třetí třídy.*

Přímky obrysové zjednáme sobě dle čl. 6. snadno tím, že hledáme ony hodnoty t, pro které jeden z koefficientů v x, y, z v rovnici roviny tečné se stává roveň nulle; tak bude rovina tečná kolma k rovině XY pro

$$1 - t^3 = 0,$$

kteráž rovnice podává jediný realný kořen

$$t = 1;$$

rovina tečná a zároveň průmět přímky obrysové pro rovinu XY jest pak

$$x - y + a - b = 0.$$

Přímky obrysové vzhledem k rovině XZ určeny jsou rovnicí
$$t(3-t^2) = 0,$$
kteráž podává kořeny

$$t = 0, \; t = \sqrt{3}, \; t = -\sqrt{3},$$

jimž příslušné přímky povrchové mají rovnice:

$$x + 2z - 2a = 0,$$

$$4x - (1 - 3\sqrt{3})z + (a - 3b\sqrt{3}) = 0,$$

$$4x - (1 + 3\sqrt{3})z + (a + 3b\sqrt{3}) = 0;$$

průměty těchto přímek na rovině XY ustanoví se snadno určením hodnot α a β pro uvedené hodnoty t.