Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Rössler

O grupě kolineací kubické křivky ekvianharmonické

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 3, 166--171

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123936`

O grupě kolineací kubické křivky ekvianharmonické.

Karel Rössler.

(Došlo 1. listopadu 1930.)

V článku „Kolineace kubických křivek harmonických a ekvianharmonických"[1]) nalezl pan prof. Bydžovský jednotné vyjádření 54 kolineací, jež reprodukují ekvianharmonickou kubiku

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 x'_{\lambda_1} : \alpha_2 x'_{\lambda_2} : x'_{\lambda_3},$$

kde α_1, α_2 jsou třetí odmocniny z jedné a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ je permutace indexů *1, 2, 3.* Za souřadný trojstran je zvolen Hessián kubiky. Ukáži, že tohoto vyjádření lze s výhodou užíti k studiu kolineací ekvianharmonické kubiky.

Má-li permutace $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ právě t transposic, budeme krátce říkati, že příslušná kolineace má t transposic. Jednu z obou komplexních třetích odmocnin z jedné označme ε.

Věta 1. *Rozdělíme-li kolineace grupy* $\mathfrak{G}_{54}$ *podle modulů* ($m = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$) *a podle počtu transposic* ($t = 0, 1, 2$), *obdržíme tabulku:*

<table>
<tr><td>t \ m</td><td colspan="2">*1*</td><td>ε</td><td>ε^2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">*0*</td><td>*identita*</td><td>*2 kol. 3. ř.*</td><td colspan="2">*6 kol. 3. ř.*</td></tr>
<tr><td>E</td><td>H, H^{-1}</td><td>R_1, R_2, R_3</td><td>$R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">*1*</td><td colspan="2">*9 involucí*</td><td colspan="2">*18 kol. 6. ř.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_1, \ldots, I_9$</td><td>$S_1, \ldots, S_9$</td><td>$S_1^{-1}, \ldots, S_9^{-1}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">*2*</td><td colspan="2">*6 kol. 3. ř.*</td><td colspan="2">*12 kol. 3. ř.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">$K_1, K_2, K_3, K_1^{-1}, K_2^{-1}, K_3^{-1}$</td><td>$T_1, \ldots, T_6$</td><td>$T_1^{-1}, \ldots, T_6^{-1}$</td></tr>
</table>

Důkaz: 1. Třetí mocnina kolineace $x_k = \alpha_k x'_{\lambda_k}$ $(\alpha_3 = 1)$, kde $t \neq 1$, je $x_k = \alpha_k \alpha_{\lambda_k} \alpha_{\lambda^2_k} x'_k$, což je patrně identita. Symbol

[1]) Časop. pro pěst. mat. a fys. Roč. LIX, str. 168.

$(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ značí čtverec permutace $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Máme výsledek: Charakteristická vlastnost kolineace 3. řádu (a identity) je $t \neq 1$.

2. Čtverec kolineace $x_k = a_k x'_{\lambda_k}$ $(a_3 = 1)$, kde $a_1 a_2 = 1$, $t = 1$, je $x_k = a_k a_{\lambda_k} x'_k$, což je identita, neboť $a_1 a_{\lambda_1} = a_2 a_{\lambda_2} = a_3 a_{\lambda_3}$. Charakteristická vlastnost involuce je tedy $m = 1$, $t = 1$.

3. Šestá mocnina každé kolineace, pro niž $t = 1$, je identita, neboť $a_k a_{\lambda_k} \ldots a_{\lambda^5_k} = (a_k a_{\lambda_k})^3 = 1$. Charakteristická vlastnost kolineace 6. řádu je tedy $m \neq 1$, $t = 1$.

Věta 2. *Ke každému inflexnímu bodu přísluší právě jedna involuce I. Má tento bod za centrum a jeho harmonickou poláru za osu. Involuci, jež má inflexní bod k za samodružný, označme I_k, $k = 1, \ldots, 9$. V každém inflexním trojstranu reprodukuje involuce I_k stranu, procházející bodem k a zbývající dvě strany involutorně zaměňuje.*

Důkaz: Sestrojme na základě harmonické vlastnosti poláry 9 involucí se středy v inflexních bodech, jež reprodukují kubiku. Podle věty 1. jsou to právě involuce $I_1, \ldots, I_9$.

Z analytického vyjádření kolineací R přímo plyne:

Věta 3. *Ke každému vrcholu Hessiánu přísluší právě 2 kolineace 3. řádu R, R^{-1}. Mají tento bod za centrum a protilehlou stranu Hessiánu za osu.*

Věta 4. *Utvoříme-li všechny součiny $I_1 I_2$, obdržíme právě všechny kolineace K a H. Utvoříme-li všechny součiny KR (resp. IR), obdržíme právě všechny kolineace T (resp. S).*

Důkaz: 1. Součin $I_1 I_2$ není involucí. Kdyby totiž $(I_1 I_2)(I_1 I_2) = E$, převáděla by identita E inflexní bod *3*, jenž leží na inflexní přímce *1, 2*, v inflexní bod *1*. Součin $I_1 I_2$ má modul $m = 1$ a je tedy roven kolineaci K (resp. H). Kolineace $I_1 I_2, I_1 I_3, \ldots, I_1 I_9$ jsou navzájem různé. Jsou to tedy právě všechny kolineace K, H.

2. Každý součin KR je kolineace T, neboť má dvě transposice a modul $m \neq 1$. Kolineace $K_1 R, \ldots, K_6 R, K_1 R^{-1}, \ldots, K_6 R^{-1}$ jsou navzájem různé. Jsou to tedy právě všechny kolineace T.

Poznámka 1. Budiž dána involuce I_1 a kolineace K. Platí $I_1 K I_1 = I_1 (I_1 I_k) I_1 = I_k I_1 = K^{-1}$. Máme výsledek: Transformujeme-li kolineaci K (resp. H) libovolnou involucí, obdržíme kolineaci K^{-1} (resp. H^{-1}). Odtud plyne přímo: Kolineace K, H jsou všechny mezi sebou komutativní. Jiný důsledek věty 4. je: Každou kolineaci z grupy $\mathfrak{G}_{54}$ dovedeme jednoduše sestrojiti, neboť známe její rozklad v centrické kolineace.

Věta 5. *Kolineace R, S, T cyklicky zaměňují 3 inflexní trojstrany, různé od Hessiánu.*

Důkaz: Kolineace, jež reprodukují obecnou kubiku (t. j. kolineace o modulu $m = 1$) a jenom tyto kolineace reprodukují všechny

4 inflexní trojstrany. Kolineace R, T nezaměňují inflexní trojstrany involutorně, protože jsou 3. řádu. Pro kolineace S plyne tvrzení z rozkladu $S = IR$.

Poznámka 2. Charakteristická rovnice kolineace $T \equiv x_1 : x_2 : : x_3 = \alpha_1 x'_3 : \alpha_2 x'_1 : x'_2$ zní $\lambda^3 = \alpha_1 \alpha_2$. Pro samodružné body platí $y_1 : y_2 : y_3 = \lambda^2 : \lambda\alpha_2 : \alpha_2$. Každý samodružný bod kolineace T leží na kubice, neboť $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (\alpha_1\alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2 + 1 = 0$, a není bodem inflexním, ježto neleží na žádné souřadné ose.

Věta 6. *Ke každému inflexnímu trojstranu, různému od Hessiánu, přísluší právě 2 kolineace 3. řádu K, K^{-1}. Jsou necentrické a mají vrcholy tohoto trojstranu za samodružné body. Kolineace, jež takto přísluší k Hessiánu, jsou H, H^{-1}.*

Důkaz: Kolineaci K vyjádříme jako součin involucí $K = I_1 I_2$. Z věty 2. plyne, že kolineace $I_1 I_2$ reprodukuje každou stranu toho inflexního trojstranu, v němž inflexní přímka *1*, *2* je jednou stranou. Každá kolineace K je necentrická, neboť jinak by kolineace $T = KR$ měla inflexní bod za samodružný. Pro kolineace H, H^{-1} plyne tvrzení z analytického vyjádření.

Věta 7. *Ke každému inflexnímu bodu přísluší právě 2 kolineace 6. řádu S, S^{-1}. Jsou necentrické a mají tento bod za samodružný. Kolineace, jež mají inflexní bod 1 za samodružný, označíme S_1, S_1^{-1}. Samodružné přímky těchto kolineací jsou: inflexní tečna bodu 1, harmonická polára bodu 1 a strana Hessiánu, procházející bodem 1.*

Důkaz: Budiž dán inflexní bod *1*, strana Hessiánu I, procházející bodem *1* a kolineace R_{I}, jež má stranu I za osu. Pak obě kolineace 6. řádu $I_1 R_{\mathrm{I}}$, $I_1 R_{\mathrm{I}}^{-1}$ mají inflexní bod *1* za samodružný. Kolineace S_1 je necentrická, neboť by měla v důsledku $S_1^3 = I_1$ harmonickou poláru bodu *1* za osu. To je ve sporu se vztahem $S_1 = I_1 R_{\mathrm{I}}$. Kolineace S_1 nemá kromě bodu *1* jiný inflexní bod za samodružný, neboť by byla centrická. Proběhne-li bod *1* všechny inflexní body, dostaneme právě všech 18 kolineací S. Je zřejmé, že S_1 má inflexní tečnu a harmonickou poláru bodu *1* za samodružné přímky. Obě procházejí protilehlým vrcholem Hessiánu. Z analytického vyjádření kolineace S_1 je patrno, že také jedna strana Hessiánu je samodružná. Je to ta strana, jež prochází inflexním bodem *1*, neboť jinak by existoval svazek samodružných přímek.

Věta 8. *Samodružné body kolineace T jsou vrcholy trojúhelníka, který je kubice vepsán a zároveň opsán.*

Důkaz: Budiž A_1 samodružný bod kolineace T. Jeho tečnový bod A_2 je opět samodružný a $A_2 \neq A_1$, neboť A_1 podle pozn. 2. není inflexní. Tečnový bod A_3 bodu A_2 je opět samodružný a je $A_3 \neq A_2$, $A_3 \neq A_1$. Tečnový bod bodu A_3 je bod A_1, neboť kolineace T je necentrická.

Věta 9. *Libovolná kubika rodu 1 má právě 24 trojúhelníků, které jsou jí vepsány a zároveň opsány.*

Důkaz: Použijeme parametrického vyjádření. Vrchol A_k trojúhelníka nechť má parametr u_k, $k = 1, 2, 3$. Pak platí $2u_1 + u_2 \equiv 0$, $2u_2 + u_3 \equiv 0$, $2u_3 + u_1 \equiv 0$, t. j. $9u_1 \equiv 0$. Počet vrcholů je $9 \,.\, 9 - 9 = 72$ (nutno vynechati inflexní body).

Poznámka 3. Místo „trojúhelník, který je kubice vepsán a zároveň opsán" budeme v následujícím říkati krátce „trojúhelník". Jak známo, platí obecně: Třemi samodružnými body, jež neleží v přímce, jsou dány právě 2 necentrické kolineace 3. řádu; z nich jedna je čtvercem druhé. Ke kolineacím T vede tedy právě 6 trojúhelníků. Je úkolem následujících vět objasniti význačné postavení těchto šesti trojúhelníků mezi 24 trojúhelníky na ekvianharmonické kubice.

Věta 10. *Na libovolné kubice rodu 1 je každý trojúhelník reprodukován jedinou z dvojic kolineací (K_1, K_1^{-1}), (K_2, K_2^{-1}), (K_3, K_3^{-1}), (H, H^{-1}) a každá z těchto kolineací reprodukuje právě 6 trojúhelníků.*

Důkaz: Budiž dán trojúhelník Δ svými parametry $\Delta = (\frac{1}{9}w, -\frac{2}{9}w, \frac{4}{9}w)$, kde w je perioda. Involuce I_1, jejíž centrum má parametr $\frac{1}{3}w_1$, převádí Δ v $\Delta' = (-\frac{1}{9}w - \frac{1}{3}w_1, \frac{2}{9}w - \frac{1}{3}w_1, -\frac{4}{9}w - \frac{1}{3}w_1)$, involuce I_k převádí Δ' v $\Delta'' = (\frac{1}{9}w + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_k, -\frac{2}{9}w + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_k, \frac{4}{9}w + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_k)$. Srovnáme-li parametry trojúhelníků Δ, Δ'', máme výsledek: Nutná a dostačující podmínka, aby kolineace $I_1 I_k$ reprodukovala trojúhelník Δ, je $\frac{3}{9}w \equiv \pm (\frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_k)$. Hledejme k danému trojúhelníku Δ všechny kolineace $I_1 I_k$, jež jej reprodukují. Pro $\frac{1}{3}w_k$ máme 2 řešení; označíme je $\frac{1}{3}w_2 \equiv \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w$, $\frac{1}{3}w_3 \equiv \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w$. Ježto $\frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3 \equiv 0$, leží inflexní body *1, 2, 3* v přímce. Máme výsledek: Daný trojúhelník Δ je reprodukován kolineací $I_1 I_2$ a k ní inversní $I_1 I_3$. Hledejme obráceně k dané kolineaci $I_1 I_k$ všechny trojúhelníky, které reprodukuje. Vychází 18 vrcholů: $\dfrac{w}{9} \equiv \pm \dfrac{w_1 - w_k}{9} + \dfrac{2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2}{3}$. Máme výsledek: Daná kolineace $I_1 I_k$ reprodukuje právě 6 trojúhelníků.

Poznámka 4. Z věty 10. je patrno: 24 trojúhelníků na kubice rodu 1 se rozpadá ve 4 skupiny po šesti trojúhelnících a každá tato skupina náleží podle věty 6. jednomu inflexnímu trojstranu. Následující věta ukáže: Skupina šesti trojúhelníků, jež na ekvianharmonické kubice zaujímá význačné postavení tím, že vede ke kolineacím T, náleží tomu inflexnímu trojstranu, jenž je Hessiánem.

Věta 11. *Ke každému trojúhelníku na ekvianharmonické kubice, jenž je reprodukován kolineací H, přísluší právě 2 kolineace 3. řádu T, T^{-1}. Jsou necentrické a mají vrcholy trojúhelníka za samodružné body.*

Důkaz: Budiž Δ trojúhelník, jenž vede ke kolineaci T. Jestliže H převádí trojúhelník Δ v Δ', vede Δ' ke kolineaci $H^{-1}TH = T$ (viz větu 4. a pozn. 1.), t. j. $\Delta' = \Delta$. Máme výsledek: Každý trojúhelník, jenž vede ke kolineaci T, je reprodukován kolineací H.

Z následující věty je patrno, jak úzce souvisí naše analytické vyjádření kolineací se strukturou grupy $\mathfrak{G}_{54}$.

Věta 12. *Rozdělíme-li kolineace grupy $\mathfrak{G}_{54}$ podle modulů a podle počtu transposic a oddělíme-li identickou kolineaci, provedli jsme tím rozklad grupy $\mathfrak{G}_{54}$ v třídy.*

Důkaz: Kolineace téže třídy jsou téhož řádu a téhož modulu.

1. Kolineace $S_1, \ldots, S_9$ tvoří třídu, neboť $I_2S_1I_2 = S_3$, $I_3S_1I_3 = S_2$ atd.

2. Ježto kolineace $S_1, \ldots, S_9$ tvoří třídu, platí totéž o jejich kvadrátech R_1, R_2, R_3 a třetích mocninách $I_1, \ldots, I_9$.

3. Kolineace K_1, K_2, K_3, K_1^{-1}, K_2^{-1}, K_3^{-1} tvoří třídu: Kolineace K, $R^{-1}KR$, RKR^{-1} přísluší podle věty 5. různým inflexním trojstranům; podle pozn. 1. platí $I_1KI_1 = K^{-1}$. Třída obsahuje 6 kolineací, protože obsahuje aspoň 4 kolineace a 4 není dělitel 54.

4. Kolineace $T_1, \ldots, T_6$ tvoří třídu: Danou kolineaci T_1 rozložíme: $T_1 = KR_{\mathrm{I}}$. Na ose kolineace R_{I} zvolíme inflexní bod *1*. Platí $R_{\mathrm{I}}^{-1}I_1R_{\mathrm{I}} = I_1$, neboť tato kolineace má bod *1* za samodružný. Transformujeme-li kolineaci T_1 kolineacemi R_{I}, R_{I}^{-1}, I_1, obdržíme podle předešlého odstavce další 3 kolineace T.

Poznámka 5. Známe-li rozklad abstraktní grupy v třídy, můžeme o každé podgrupě ihned rozhodnouti, zda je normální. Dále dovedeme ke každému elementu udati počet elementů s ním komutativních. Je-li totiž $\mathfrak{K}$ třída daného elementu a $\mathfrak{N}$ jeho normalisátor, platí, jak známo: Počet elementů v třídě $\mathfrak{K}$ se rovná indexu normalisátoru $\mathfrak{N}$. Normalisátor kolineace H je tedy podgrupa 27. řádu, t. j. H je komutativní se všemi kolineacemi 3. řádu. Při vyhledávání podgrup grupy $\mathfrak{G}_{54}$ vyžadují složitějších úvah jenom podgrupy 9. a 18. řádu. Bez obtíží zjistíme, že $\mathfrak{G}_{54}$ má 9 podgrup 2. řádu, 13 podgrup 3. řádu (z nichž 1 je normální), 21 podgrup 6. řádu (z nichž 9 je cyklických) a 1 podgrupu 27. řádu (jež je normální).

Věta 13. *Grupa $\mathfrak{G}_{54}$ má právě 4 podgrupy 9. řádu. Z nich normální jsou tyto:*

$$(I) \equiv (E, H, H^{-1}, K_1, K_2, K_3, K_1^{-1}, K_2^{-1}, K_3^{-1}),$$
$$(II) \equiv (E, H, H^{-1}, R_1, R_2, R_3, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}).$$

Zbývající 2 jsou konjugovány:

$$(III) \equiv (E, H, H^{-1}, T_1, T_2, T_3, T_1^{-1}, T_2^{-1}, T_3^{-1}),$$
$$(IV) \equiv (E, H, H^{-1}, T_4, T_5, T_6, T_4^{-1}, T_5^{-1}, T_6^{-1}).$$

Důkaz: 1. Normalisátor kolineace K_1 se skládá z kolineací (I), neboť má řád 9 a K_1 je podle pozn. 1. komutativní se všemi kolineacemi K, H. Normalisátor kolineace T_1 se skládá z kolineací (III), neboť má řád 9 a T_1 je komutativní s kolineacemi $E, H, T_1, T_2 = T_1H$, $T_3 = T_1H^{-1}$ a s jejich inversními. Máme výsledek: (I) je normalisátor každé kolineace K, (III) je normalisátor šesti kolineací T a (IV) je normalisátor zbývajících šesti kolineací T.

2. Každá abstraktní grupa 9. řádu je Abelova. Obsahuje-li tedy podgrupa 9. řádu kolineaci K (resp. T), je totožná s normalisátorem této kolineace. Jsou tedy (I), (III), (IV) právě všechny podgrupy 9. řádu, obsahující kolineaci K nebo T.

3. Podgrupa 9. řádu, jež neobsahuje ani K ani T, se skládá patrně z kolineací (II).

4. Podgrupy (III), (IV) jsou konjugovány, neboť jejich normalisátor je podgrupa 27. řádu.

Věta 14. *Grupa $\mathfrak{G}_{54}$ má právě 4 podgrupy 18. řádu. Z nich 1 je grupa obecné kubiky, jež je normální. Ostatní 3 jsou konjugovány a tohoto tvaru*

$$(E, I_1, I_2, I_3, H, H^{-1}, R_1, R_2, R_3, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1},$$
$$S_1, S_2, S_3, S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1}),$$

kde kolineace $I_1, I_2, I_3, S_1, S_2, S_3, S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1}$ reprodukují tutéž stranu Hessiánu.

Důkaz: Jak známo z teorie abstraktních grup, obsahuje podgrupa 18. řádu aspoň 1 involuci I_1 a aspoň 1 podgrupu 9. řádu.

1. Obsahuje-li podgrupu (I) (viz větu 13), má ještě 9 involucí $I_1, I_1H, I_1H^{-1}, I_1K_1, I_1K_2, \ldots$ a je proto totožná s grupou obecné kubiky.

2. Obsahuje-li podgrupu (II), má ještě 3 involuce I_1, I_1H, I_1H^{-1} a 6 kolineací 6. řádu $I_1R_1, I_1R_2, I_1R_3, I_1R_1^{-1}, \ldots$ Tyto involuce a kolineace 6. řádu reprodukují patrně tu stranu Hessiánu, jež prochází inflexním bodem *1*.

3. Obsahuje-li podgrupu (III), má ještě 6 kolineací 6. řádu $I_1T_1, I_1T_2, I_1T_3, I_1T_1^{-1}, \ldots$, 3 involuce I_1, I_1H, I_1H^{-1} a aspoň 1 kolineaci 3. řádu $R = S^2$, celkem aspoň 19 kolineací. Tento případ je tedy vyloučen.

4. Všechny 3 nenormální podgrupy 18. řádu jsou konjugovány, neboť normalisátor je podgrupa 18. řádu.

*

Le groupe des homographies reproduisant la cubique équianharmonique.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur, employant l'expression analytique des homographies reproduisant la cubique équianharmonique*), étudie leurs propriétés géométriques et en déduit les propriétés de leur groupe.

*) Voir l'article de M. Bydžovský, Časop. pro pěst. mat. a fys. Roč. LIX., str. 168.