Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Hubert Slouka

Určení poloměru zakřivení prostoru z radiálních rychlostí kulových hvězdokup

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 4, 225--231

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123930`

Určení poloměru zakřivení prostoru z radiálních rychlostí kulových hvězdokup.

Hubert Slouka.

(Došlo 15. ledna 1931.)

Harlow Shapley uveřejnil v nedávno vydané monografii harvardské hvězdárny „Star Clusters“ definitivní vzdálenosti osmdesátišesti kulových hvězdokup a obou Magellanových Mraků. Tamtéž udává všechny až dosud známé hodnoty jejich radiálních rychlostí.

V následujícím použito těchto nových údajů a zkoumáno, jak dalece mění dosavadní výsledky určení poloměru zakřivení prostoru.

V „Monthly Notices of the Royal Astronomical Society“ z roku 1924 odvodil L. Silberstein z de Sitterovy kosmologie rovnici pro Dopplerův posuv $d\lambda/\lambda$ u hvězdy nalézající se v inerciálním relativním pohybu vůči pozorovateli.

Označíme-li v_0 rychlost hvězdy, c rychlost světla, r vzdálenost hvězdy od pozorovatele a R poloměr zakřivení prostoru, pak zní Silbersteinova rovnice:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{\cos^2 \frac{r}{R}}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} - 1.$$

Ježto z astronomických pozorování plyne pro

$$\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq 1{\cdot}0000444$$

a pro většinu hvězd

$$\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leqq 1{\cdot}000001,$$

zjednoduší se původní rovnice na

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \pm \sin \frac{r}{R}$$

a pro malé hodnoty r/R obdržíme

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = + \frac{r}{R}. \qquad (A)$$

Je tedy v de Sitterově vesmíru, pro který tyto rovnice byly odvozeny, relativní vzrůst délky vlny určitého záření hvězdy algebraicky rovný veličině r/R, tedy přímo úměrný vzdálenosti hvězdy a nepřímo úměrný poloměru zakřivení prostoru.

Používaje těchto rovnic nalézá Silberstein z tehdy (r. 1924) jemu známých sedmi hodnot radiálních rychlostí a parallax kulových hvězdokup, které považoval za nejvhodnější pro toto určení, následující poloměr zakřivení prostoru

$$R = 6{\cdot}0 \,.\, 10^{12} \text{ astr. jedn.}$$

Téhož roku podrobil K. Lundmark v „M. N. R. A. S." Silbersteinovu hodnotu kritickému rozboru a poukázal, že je příliš malá, aby jí mohl býti přikládán skutečný fysikální význam. Použil pak parallax a radiálních rychlostí osmnácti kulových hvězdokup a obou Mraků Magellanových, výsledky nových Shapleyových a svých vlastních měření a nalezl pro poloměr zakřivení prostoru střední hodnotu

$$R = 19{\cdot}7 \,.\, 10^{12} \text{ astr. jedn.*)}$$

I tuto pokládal ještě za malou a udává pro pravděpodobnou hodnotu R

$$R \geqq 80 \,.\, 10^{12} \text{ astr. jedn.}$$

Ve své monografii „The size of the universe" (Oxford 1930) věnuje Silberstein znovu pozornost Dopplerově posuvu a nalézá pro něj, zanedbávaje členy vyšších řádů, rovnici

$$\left(\frac{\delta\lambda}{\lambda}\right)^2 = D^2 = \left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(\frac{v_0^2}{c^2} + \frac{r^2}{R^2}\right),$$

kde r_0 je vzdálenost od perihelia hvězdy, v_0 rychlost hvězdy v tomto bodě a r skutečná vzdálenost pozorovatele od hvězdy.

*) V Lundmarkově pojednání omylem udány všechny hodnoty R v *km* místo v astronomických jednotkách.

Z této obecné rovnice odvozuje dále Silberstein rovnici, které v dalším používá:

$$R^2 = \frac{2}{3} \frac{\overline{r^2}}{\overline{D^2} - 1 \, . \, 10^{-8}} \tag{B}$$

Používaje dvaceti hodnot pro radiální rychlosti a parallaxy kulových hvězdokup, nalézá

$$R = 6{\cdot}37 \, . \, 10^{12} \text{ astr. jedn.}$$

Použití radiálních rychlostí kulových hvězdokup dalo by se odůvodniti jedině značnou vzdáleností těchto těles. V tom případě dalo by se ovšem očekávati, že mnohem přesnější výsledky obdržíme při použití radiálních rychlostí spirálních mlhovin, které jsou mnohem vzdálenější. Na tuto okolnost poukázal již také Lundmark, který považuje dosud za nemožné poznati, zda vliv zakřivení prostoru projevující se v posuvu ve spektrech není snad vyvážen skutečnými pohyby těchto nebeských útvarů. Soudí, že velikost K-členu nalezená pro kulové hvězdokupy $+ 31$ *km/sec* jest příliš nepatrná vůči K-členu nalezenému z pohybu spirálních mlhovin, kde činí $+ 800$ *km/sec* a dá se proto souditi, že vliv zakřivení prostoru bude se v mnohem menší míře projevovati ve spektrech poměrně blízkých kulových hvězdokup, než u vzdálených mlhovin spirálních.

V následující tabulce sestaveny nové údaje Shapleyovy a jejich použitím vypočtené R, ku porovnání slouží R vypočtené Lundmarkem a z údajů použitých Silbersteinem.

Tabulka obsahuje:

Sloupec první: Číslo kulové hvězdokupy z „New general catalogue of nebulae and Clusters of Stars“ (Dreyer 1888). S. M. C. značí Small Magellanic Cloud, G. M. C. Great Magellanic Cloud.

Sloupec druhý: Radiální rychlost kulové hvězdokupy v *km/sec*.

Sloupec třetí: Vzdálenost kulové hvězdokupy v kiloparsec.

Sloupec čtvrtý: R vypočtené Lundmarkem z původních Shapleyových parallax.

Sloupec pátý: R vypočtené Lundmarkem z vlastních určených parallax.

Sloupec šestý: R vypočtené Sloukou z hodnot použitých Silbersteinem.

Sloupec sedmý: R vypočtené Sloukou z nových hodnot Shapleyových.

Objekt N. G. C.	Radiální rychlost v *km/sec*	$D \cdot 10^4$	Vzdálenost v kiloparsec	R v astron. jednotkách			
				z původních údajů Shapleyových	z parallax Lundmark.	z hodnot Silberstein.	z nových údajů Shapleyových
1851	+ 315	+ 10.5	14.3	$3.6 \cdot 10^{12}$	$2.9 \cdot 10^{12}$	$3.55 \cdot 10^{12}$	$2.80 \cdot 10^{12}$
1904	+ 235	+ 7.8	20.4	5.3	5.2	7.88	5.39
5024	— 180	— 6.0	18.2	6.2	4.8	6.83	6.25
5272	— 130	— 4.3	12.2	6.4	3.7	6.82	5.85
5904	+ 10	+ 0.3	10.8	77.3	46.4	85.94	74.25
6093	+ 70	+ 2.3	17.5	17.7	12.5	17.93	15.69
6205	— 265	— 8.8	10.3	2.3	1.4	2.29	2.41
6218	+ 160	+ 5.3	11.0	4.8	3.4	4.82	4.28
6229	—100:	— 3.3:	29.8	26.9	44.3	27.18	18.62
6266	+ 50	+ 1.7	18.6	18.8	17.7	18.44	22.32
6273	+ 30	+ 1.0	16.3	32.8	32.2	32.79	33.62
6333	+ 225	+ 7.5	20.8	6.9	6.2	6.87	5.72
6341	— 160	— 5.3	11.2	4.8	4.0	4.78	4.35
6626	0	0	16.6	∞	∞	∞	∞
6934	— 350	— 11.7	24.9	5.9	6.5	5.87	4.38
7078	— 94	— 3.1	13.1	9.6	7.7	9.47	8.71
7089	— 10	— 0.3	13.9	96.5	62.5	107.25	95.56
7099	— 125	— 4.1	14.6	8.5	6.4	8.65	7.35
S. M. C.	+ 168	+ 5.6	24.9	11.4	11.4	11.41	9.17
G. M. C.	+ 278	+ 9.2	26.2	7.7	6.2	7.84	5.87

Střední hodnoty poloměrů zakřivení prostoru jsou: (Sestaveny podle pořadí sloupců a nebrán ohled na $R = \infty$ plynoucí z nulové radiální rychlosti N. G. C. 6626.)

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{I}} &= 18{\cdot}6 \,.\, 10^{12} \text{ astr. jedn.} \\ R_{\mathrm{II}} &= 15{\cdot}0 \,.\, 10^{12} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ R_{\mathrm{III}} &= 19{\cdot}8 \,.\, 10^{12} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ R_{\mathrm{IV}} &= 17{\cdot}5 \,.\, 10^{12} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{aligned} \tag{1}$$

K výpočtu těchto hodnot použito původní Silbersteinovy rovnice (A) a R_{IV} odvozené z nejnovějších měření Shapleyových neodchyluje se příliš od hodnot Lundmarkem určených.

Podstatně rozdílné výsledky obdržíme, použijeme-li k výpočtu přesnější rovnice (B), kterou Silberstein odvodil na základě statistických úvah. Pak nalezneme

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{I}} &= 5{\cdot}95 \,.\, 10^{12} \text{ astr. jedn.} \\ R_{\mathrm{II}} &= 6{\cdot}48 \,.\, 10^{12} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ R_{\mathrm{III}} &= 6{\cdot}37 \,.\, 10^{12} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ R_{\mathrm{IV}} &= 5{\cdot}07 \,.\, 10^{12} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{aligned} \tag{2}$$

Necháme-li stranou oprávněnost obou rovnic použitých k výpočtu, z nichž první jest jen zjednodušením druhé, nutno si uvědomiti, že zejména v druhém případě jsou hodnoty pro R velmi malé oproti posledním Shapleyovým měřením vzdáleností mimogalaktických mlhovin (Harvard Circ. No 350 a No 294 a Shapleyova monografie), které jsou stejného řádu jako R z určení (2). Tak udává Shapley pro skupinu mlhovin Coma-Virgo vzdálenost $0{\cdot}62 \,.\, 10^{12}$ astr. jedn. (řádově) a pro některé jiné z nejvzdálenějších mimogalaktických mlhovin $8{\cdot}25 \,.\, 10^{12}$ astr. jedn. (řádově). Tato nesrovnalost jest tím nápadnější, že Shapleyovým hodnotám musíme z astronomického hlediska přiznati značnou váhu a přicházíme takto k výsledku, podle kterého vzdálenosti některých mlhovin mimogalaktických by byly větší neb stejné jako poloměr zakřivení prostoru.

Je však jisté, že v obou případech (1) a (2) umožňují nová Shapleyova data pro vzdálenosti kulových hvězdokup přesnější a spolehlivější určení poloměru zakřivení prostoru podle rovnic Silbersteinových. Obdržíme hodnoty menší, než původně nalezli Lundmark a Silberstein, zcela tak jak tento v úvodě ku své monografii očekává, ovšem, tím nastává ještě větší rozpor mezi určeným R a výsledky astronomickými.

Nových hodnot parallax kulových hvězdokup použito také v následujícím při výpočtu korelačního koeficientu mezi radiální rychlostí a vzdáleností. Bravais-Pearsonův korrelační koeficient zní

$$\varkappa = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\, \Sigma y^2}}\,, \tag{C}$$

kde x a y jsou rozdíly: skutečná vzdálenost — střední hodnota vzdálenosti a skutečná radiální rychlost (bez ohledu na znaménko) — střední hodnota radiální rychlosti (bez ohledu na znaménko). Rozdíly jsou určeny pro n členů.

Pravděpodobná chyba korelačního koeficientu je

$$Q = 0{\cdot}675\, \frac{(1 - k^2)}{\sqrt{n}} \tag{D}$$

Použijeme-li k výpočtu všech 20 hodnot vzdáleností r a radiálních rychlostí V, nalezneme

$$\bar{r} = 17{\cdot}3, \quad |\, V \,| = 148,$$

$$\Sigma x^2 = 875{\cdot}52, \quad \Sigma y^2 = 210{\cdot}169, \quad \Sigma xy = 5022$$

a

$$k = 0{\cdot}370, \quad Q = 0{\cdot}130,$$

tedy

$$\varkappa = 0{\cdot}370 \pm 0{\cdot}130$$

Ku porovnání nechť slouží korelační koeficienty nalezené Lundmarkem a Silbersteinem. První obdržel $\varkappa = 0{\cdot}255 \pm 0{\cdot}227$, druhý $\varkappa = 0\cdot367 \pm 0\cdot127$ roku 1924, kdežto ve své monografii $\varkappa = + 0\cdot381 \pm 0\cdot136$. Všechny tyto hodnoty pro $\varkappa$ jsou poměrně malé, takže není dobře možno usuzovati na vzájemnou závislost r a V. Na to poukázal již také Lundmark ve své práci. Celá věc se zdánlivě zlepší vynecháním objektů N. G. C. 6205, N. G. C. 1851 a N. G. C. 6229 a Silberstein nalézá pak pro k hodnotu $0\cdot747 \pm 0\cdot070$. Takový výběr je ovšem značně libovolný a nedá se nijak odůvodniti, rovněž tak nesmíme přeceňovati význam malé pravděpodobné chyby všech $\varkappa$. Tato rovnice (D) pozbývá významu pro malé hodnoty n a má býti používána jen v případě $n > 25$, při poměrně malém k.

Ze 103 Shapleyem katalogisovaných kulových hvězdokup (93 + 10 z Mraků Magellanových), jichž vzdálenosti jsou přesně určeny, jsou známé radiální rychlosti jen dvaceti objektů. Tyto údaje nestačí dosud ke spolehlivému určení poloměru zakřivení prostoru Silbersteinovou rovnicí, ani k nalezení korelace mezi V a r. Určení dalších radiálních rychlostí je nutnou podmínkou k vyřešení těchto problémů. Z posledních astronomických určení parallax mimogalaktických mlhovin Shapleyem nutno však souditi, že dosud vypočtené hodnoty pro poloměr zakřivení prostoru jsou vesměs řádově malé a nedají se přivésti v soulad s výsledky moderních měření, o jichž spolehlivosti se nedá pochybovati.

*

Quelques remarques sur la détermination du rayon de l'Univers de de Sitter par les vitesses radiales des amas globulaires.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne une nouvelle détermination du rayon de l'Univers de de Sitter au moyen de la formule de Silberstein en tenant compte des mésures les plus récentes des distances des amas globulaires, publiées dans la monographie de Shapley „Star Clusters“. Il trouve

$$R = 5\cdot07 \,.\, 10^{12} \text{ unités astronomiques,}$$

ce qui représente une valeur notablement plus petite que celles de Lundmark et Silberstein. Silberstein avait prédit déjà auparavant cette diminution dans la préface de sa monographie „The Size of the Universe“.

Une critique de la nouvelle détermination est donnée. L'auteur trouve que sa valeur apparaît moins sûre si l'on tient compte des mesures nouvelles de parallaxes des nébuleuses extragalactiques, executées par Shapley. Celui-ci trouve pour les nebuleuses Coma-Virgo une distance de $0\cdot62 \,.\, 10^{12}$ u. a. et, de même pour, quelques autres nébuleuses de la même espèce des valeurs de beaucoup plus grandes que le rayon de l'Univers de de Sitter obtenu par la formule de Silberstein.

Enfin l'auteur donne le coefficient de la correlation entre les vitesses radiales et les distances des amas globulaires

$$K = + 0{\cdot}370 \pm 130.$$

Silberstein avait trouvé $K = + 0{\cdot}381 \pm 0{\cdot}136$. On voit que la correlation est très faible et il est à remarquer que la petite erreur probable trouvée ci-dessus n'est pas sûre, vu que la formule (D) ne saurait être employée correctement que dans le cas où le nombre des observations dépasse 25.