Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 4, 263--266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123921

ÚLOHY.

7. Dokažte, že řada

$$\frac{\varphi(x)}{1^3}+\frac{\varphi(2x)}{2^3}+\frac{\varphi(3x)}{3^3}+\frac{\varphi(4x)}{4^3}+\ldots+\frac{\varphi(kx)}{k^3}+\ldots,$$

kde $\varphi(x)$ jest funkce definovaná vztahy

$$\varphi(x)=x, \text{ je-li } x \text{ v } (0, 1),$$
$$\varphi(-x)=\varphi(x),\ \varphi(x+2)=\varphi(x) \text{ pro každé } x$$

jest funkce spojitá, která nemá derivaci v žádném bodě $x=p/q$, p, q celá čísla, $q>0$. V každém jiném bodě pak funkce daná derivaci má. V bodech $x=p/q$ má však derivaci zleva i zprava.

Petr.

8. Symetrický determinant n-tého stupně jest funkcí $\frac{1}{2}n(n+1)$ proměnných veličin a_{ii}, $a_{ik}=a_{ki}$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, $i\neq k$. Vypočítejte numerické součinitele jednotlivých členů; ty jsou vždy, nehledě k znaménku, mocninami čísla 2. Tak ku př. v determinantu stupně desátého jest součin

$$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{56}a_{67}a_{75}a_{89}a_{9,10}a_{10,8}$$

násoben -2^3. Podejte obecné pravidlo. *Petr.*

9. Determinant

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{r-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_r \\ s_2, & s_3, & s_4, & \ldots, & s_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-1}, & s_r, & s_{r+1}, & \ldots, & s_{2r-2} \end{vmatrix}$$

(označení viz Bydžovský, Zákl. teorie determ., str. 94), který se redukuje na diskriminant rovnice n-tého stupně o kořenech $x_1, x_2, \ldots, x_n$, je-li $r=n$, dá se vyjádřiti jednoduše pomocí součinitelů $a_0, a_1, \ldots, a_n$, násobíme-li jej zleva i zprava determinantem

$$\begin{vmatrix} a_0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_1, & a_0, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_2, & a_1, & a_0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1}, & a_{r-2}, & a_{r-3}, & \ldots, & a_0 \end{vmatrix} = a_0^r.$$

Při tom násobení jest v obojím případě prováděti řádkově, a to tak, že známým spojením řádku i-tého s řádkem k-tým vzniká v součinu zleva element a_{ki} (t. j. element v řádku k a sloupci i), v součinu pak zprava element a_{ik}. Podejte co nejjednodušší vyjádření daného determinantu pomocí $a_0, a_1, \ldots, a_n$. *Petr.*

10. Euklidův algoritmus, jak se provádí na př. při konstrukci Sturmových funkcí (viz zevrubné vylíčení postupu v Časop. pro pěst. mat. a fys., ročník 50, str. 26), lze obecně provésti na polynomech

$$f(t) = t^n + \binom{2n}{2} t^{n-1} + \binom{2n}{4} t^{n-2} + \ldots + \binom{2n}{2n-2} t^2 + \binom{2n}{2n},$$

$$g(t) = \binom{2n}{1} t^{n-1} + \binom{2n}{3} t^{n-2} + \ldots \quad + \binom{2n}{2n-1}.$$

Ukažte, že pro zbytek $r_k(t)$ dostaneme výsledek

$$r_k(t) = q_0 t^{n-k-1} + q_1 t^{n-k-2} + \ldots + q_{n-k-1},$$

kde $q_0, q_1, q_2, \ldots$ jsou čísla

$$\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(4k+1)},\quad \frac{1}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(4k+3)}\binom{2n-2k-1}{2},$$
$$\frac{1}{5\,.\,7\,.\,9\ldots(4k+5)}\binom{2n-2k-1}{4},\ldots$$

každé násobené výrazem A_k, kde $(m = 2n)$

$$A_k = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1\,.\,3}\cdot\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5}\cdots\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(4k-1)}\times$$
$$\times\, m^{k+1}(m^2-1)^k(m^2-2^2)^k(m^2-3^2)^{k-1}(m^2-4^2)^{k-1}\ldots(m-4k^2)^1.$$

Výsledek tento má při některých vyšetřováních důležitost, ovšem jenom potud, že se požaduje důkaz, že čísla q_0, q_{n-k-1} jsou kladná. Nebylo by snad možno podati nějaký jednoduchý důkaz tohoto posledního tvrzení? *Petr.*

11. Rovnice šestého stupně

$$a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_6 = 0,$$

jejíž veškeré koeficienty jsou kladné, má jeden a jen jeden pár kořenů komplexních, jejichž reálná část jest kladná, jestliže

$$a_3{}^2 - 4a_1a_5 < 0.$$

Toto tvrzení jest dokázati a pak se pokusiti o zevšeobecnění jeho pro rovnice stupně $4n + 2$. *Petr.*

12. Stanovte bez integrace takový systém parametrů „u“ a „v“ na ploše, ve kterém se anulují všechny Christoffelovy sym-

boly podél dané geodetické čáry. (Definici symbolů Christoffelových viz v knize Blaschkeově: „Vorlesungen über Differentialgeometrie“ I., druhé vyd. str. 79). *Hlavatý.*

13. Na rozvinutelné ploše budiž dána křivka K, která po rozvinutí plochy do roviny přejde v křivku K_0. Stanovte vztah mezi geodetickou křivostí křivky K a křivostí křivky K_0 v odpovídajících si bodech. *Hlavatý.*

Řešení úlohy 3. tohoto ročníku:

V rovině jsou dány dva svazky kuželoseček o základních bodech A, A', B, B'; A, A', C, C'. Přiřadíme-li každému bodu X roviny další průsečík X' obou kuželoseček těchto svazků určených bodem X, vznikne v rovině Cremonova involuce. Jest udati její základní vlastnosti. Jestliže spojnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ procházejí jedním bodem, sníží se stupeň této involuce. Jak? Lze dosáhnouti snížení stupně také jinou specialisací v poloze daných šesti bodů? *Bydžovský.*

Svazek kuželoseček o základních bodech A, A', B, B' označme krátce (b), svazek kuželoseček o zákl. bodech A, A', C, C' (c).

K syntetickému odvození vlastností Cremonovy involuce, přiřaďující užitím svazků (b), (c) body X, X', vyjdeme ze známé rozšířené věty Desarguesovy: „Pevná kuželosečka, jdoucí dvěma základními body svazku kuželoseček, vytíná na kuželosečkách svazku páry bodové kvadr. involuce, jejíž střed je na spojnici zbývajících dvou základních bodů svazku.“

Vytkněme si libovolnou kuželosečku b_1 svazku (b) jako pevnou; na ní dají všecky kuželosečky svazku (c) involuci bodovou, jejíž střed I je na spojnici $\overline{CC'}$. V svazku (c) je jedna kuželosečka, která se kuželosečky b_1 v bodě A dotýká, takže spojnice AI protne b_1 ještě v jednom bodě I', jemuž patrně Cremonovou involucí přísluší bod A. Jiné kuželosečce b_2 svazku (b) bude takto přiřazen jiný střed involuce II na CC', a opět lze vyhledati bod II' ($\equiv AII, b_2$). Přiřazení kuželoseček svazku (b) a příslušných středů involuce je projektivní; i dostaneme

$$(b_1, b_2, \ldots) \,\pi\, A(I, II, \ldots),$$

t. j. body $I', II', \ldots$ jakožto průsečíky projektivně si přiřazených kuželoseček sv. (b) a přímek svazku A vyplní křivku 3. st. k_3, jež má — poněvadž A splývá s jedním základním bodem svazku (b) — v A bod dvojný. K témuž výsledku bychom dospěli, kdybychom funkce obou svazků (b), (c) zaměnili. Podobnou křivku k'_3 dostaneme pro druhý společný základní bod A'.

Máme tedy větu: **Všechny body, sdružené danou Cremonovou involucí s body A (A'), leží na kubické křivce k_3 (k'_3), mající v A, (A') bod dvojný.**

Je patrno, že bodům základním B, B'; C, C' přísluší všecky body vždy jisté kuželosečky; na př. bodu B odpovídá kuželosečka c^* svazku (c), jdoucí bodem B.

Nyní již snadno najdeme geometrický útvar, odpovídající Cremonovou involucí dané přímce a.

Přímka a protne křivky k_3, k'_3 každou v třech bodech, jimž involutorně odpovídá bod A resp. A', takže A, A' jsou trojné body hledaného geometrického místa, a poněvadž na přímce $\overline{AA'}$ jiných bodů nedostaneme, je patrno, že tu jde o křivku a' stupně 6.; tato křivka má v ostatních základních bodech B, B', C, C' body dvojné, poněvadž daná přímka a protne křivku c^* svazku (c), jdoucí B ve dvou bodech, jimž dvakrát bod B přísluší; podobně tomu je pro další body B', C, C'. Mimo to prochází a' bodem $L' \equiv (\overline{BB'}, \overline{CC'})$, jenž je involutorní s průsečíkem L dané přímky a s přímkou $\overline{AA'}$; tento bod L' je ostatně sdružen s každým bodem L na $\overline{AA'}$ (dvě degenerované kuželosečky $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$; $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$). Tedy:

Přímce (v poloze obecné) odpovídá Cremonovou involucí racionální křivka stupně 6., mající v společných základních bodech A, A' body trojné, v ostatních základních bodech body dvojné a jdoucí bodem $L' \equiv (\overline{BB'}, \overline{CC'})$. Je tedy tato involuce stupně šestého.

V speciálním případě, kdyby spojnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ procházely jediným bodem L', rozpadly by se výše uvažované křivky k_3, k'_3 v přímku $\overline{AA'}$ a dvě kuželosečky k_2, k'_2. Přímce a bude odpovídati křivka a', mající v A, A' body dvojné a jdoucí bodem L'. Bude to tedy rac. křivka stupně 5., mající ve všech zákl. bodech body dvojné.

Tedy:

Jestliže spojnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ procházejí jediným bodem L', sníží se Cremonova involuce na stupeň pátý.

Téhož stupně bude Cremonova involuce, jestliže jeden ze svazků kuželoseček, na př. (b), je určen body A, A' a tečnami t, t' v nich.

Velmi speciální případ nastane, jestliže oba svazky (b), (c) budou druhu právě uvedeného, t. j.: jsou dány body A, A' a v nich tečny t, t' svazku (b) a tečny t_1, t'_1 svazku (c). Označíme-li průsečíky $1 \equiv t, t'$, $2 \equiv t_1, t'_1$, je přímka $p \equiv \overline{12}$ společnou polárou obou svazků, jejíž pól P na $\overline{AA'}$ je harmonicky sdružen s bodem $Q \equiv (p, \overline{AA'})$ vzhledem k bodům A, A'. Spojnice involutorně sdružených bodů X, X' prochází stále pólem P, takže $(XX'PR) = -1$, kde $R \equiv (p, \overline{XP})$, a involuce je tu tedy kolineací; P je její střed, p osa.

A. Vondráček.