Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Veselý

# O jedné obdobě Waringova problému

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 62 (1933), No. 4-5, 123--127

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123908

# O jedné obdobě Waringova problému.

Napsal *Václav Veselý*.

(Došlo 2. října 1932.)

Jde o problém: *Najíti je nejmenší číslo celé a kladné* $\overline{g}(k)$ *takové, že každé číslo z množství M je algebraickým součtem* $\overline{g}(k)$ *anebo méně čísel z množství N, při čemž v množství M jsou všechna celá čísla* $> 0$ *a v množství N čísla* $\pm x^k$ *pro všechna celá* $x > 0$. *Při tom k je celé číslo* $> 0$.

V dalším bude řešen tento problém pro $k = 2$ (v triviálním případě $k = 1$ je zřejmě $\overline{g}(1) = 1$) a pak bude dokázána věta 1.: *Každé číslo z množství M je algebraickým součtem P anebo méně čísel z množství N, kdež P je celé kladné číslo závislé jen na k.*

Je ovšem zřejmo z definice čísla $\overline{g}(k)$ a čísla $g(k)$ vystupujícího u problému Waringova, že z věty Waring-Hilbertovy plyne bezprostředně věta 1., ale v dalším bude proveden důkaz věty 1. neodvisle od věty Waring-Hilbertovy a k tomu jednodušší.

Poznámka: V literatuře se tento problém již také vyskytl a to pro $k = 3$. V L'Intermédiaire des Mathématiciens sv. 1 (1894), str. 25, předložil G. Oltramare problém: Každé celé číslo je algebraickým součtem 5 anebo méně krychlí celých čísel. Řešení Friocourta, Lemoinea, Teilheta a Franela je ve sv. 1 (1894), str. 165—166, 244 a ve sv. 2 (1895), 325. Dále v článku An elementary note upon Waring's problem for cubes, positive and negative, The Mes. of Math., sv. 51 (1922), str. 177—186 dokázal H. W. Richmond, že 75% všech celých čísel lze vyjádřiti jako algebraický součet 4 anebo méně krychlí celých čísel.

$$k = 2.$$

Věta 2.: *Celá kladná čísla tvaru* $4 . r$, $4 . r + 1$, $4 . r + 3$ *se dají, kdežto tvaru* $4 . r + 2$ *se nedají vyjádřiti jako rozdíl čtverců dvou celých čísel.*

Důkaz: Jde vlastně o řešení rovnice

$$x^2 - y^2 = s \tag{1}$$

celými čísly $x, y$, kdež $s$ je celé číslo $> 0$. Rovnici (1) lze předně dát tvar

$$(x - y) . (x + y) = s$$

a tedy, značí-li $d$ dělitele čísla $s$, musí býti

$$x - y = d \quad \text{a} \quad x + y = \frac{s}{d},$$

z čehož řešení rovnice $x = \dfrac{d + \dfrac{s}{d}}{2}$, $y = \dfrac{\dfrac{s}{d} - d}{2}$.

Má tedy rovnice (1) řešení v celých číslech $x$, $y$ tehdy a jen tehdy, když oba dělitelé čísla $s$, $d$ i $s/d$ jsou buď čísla lichá nebo sudá. Avšak číslo celé $s$ dá se vyjádřiti jako součin dvou lichých čísel tehdy a jen tehdy, když je samo tvaru buď $4 . r + 1$ anebo tvaru $4 . r + 3$ a jako součin dvou čísel sudých tehdy a jen tehdy, když je tvaru $4 . r$, ale nelze takové vyjádření najíti, je-li $s$ tvaru $4 . r + 2$, c. b. d.

Věta 3.: $\bar{g}(2) = 3$.

Důkaz: 1. Celá kladná čísla tvaru $4 . r$, $4 . r + 1$, $4 . r + 3$ dají se podle věty 2. vyjádřiti jako rozdíl dvou čtverců celých kladných čísel. Čísla tvaru $4 . r + 2$ dají se psáti ve tvaru $1^2 + 4 . r + 1 = 1^2 + x_1^2 - x_2^2$.

Tudíž $\bar{g}(2) \leqq 3$.

2. Číslo 6 není čtvercem celého kladného čísla, je tvaru $4 . r + 2$ a tedy podle věty 2. není rozdílem 2 čtverců celých kladných čísel. Není ale také součtem 2 čtverců celých kladných čísel. Tudíž $\bar{g}(2) \geqq 3$.

Tedy $\bar{g}(2) = 3$. c. b. d.

## Důkaz věty 1.

Věta 4.: *Ať jsou $m$, $n$, $r$ jakákoli celá kladná čísla, platí vždy identita v $x_1, \ldots, x_r$*

$$(x_1^n + \ldots + x_r^n)^m = \sum_{i=1}^{Q} R_{1,i} \, (c_{i,1} \, . \, x_1 + \ldots + c_{i,r} \, . \, x_r)^{n \, . \, m}, \qquad (2)$$

*kdež celá čísla $c_{i,j}$ jsou vybrána z $(n . m + 1)$ libovolných navzájem různých celých čísel a racionální čísla $R_{1,i}$ a celé kladné číslo $Q$ jsou závislá jen na $m$, $n$, $r$.*

Důkaz: 1. Nejprve, že k $(n . m + 1)$ libovolným celým navzájem různým číslům $\beta_i$ lze udati $(n . m + 1)$ racionálních čísel $\sigma_i$ splňujících soustavu $(n . m + 1)$ rovnic

$$\sum_{i=1}^{nm+1} \sigma_i \, . \, \beta_i^{\nu} = c_{\nu} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n \, . \, m, \qquad (3)$$

kdež

$$c_{\nu} = \begin{cases} \dfrac{\nu!}{\left(\dfrac{\nu}{n}\right)!} & \text{pro} \quad \nu \equiv 0 \\ 0 & \phantom{\text{pro}} \quad \nu \not\equiv 0 \end{cases} \pmod{n}. \qquad (4)$$

To je zřejmo, neboť je to soustava $(n \cdot m + 1)$ rovnic lineárních o $(n \cdot m + 1)$ neznámých a determinant je $\neq 0$ vzhledem k volbě čísel $\beta_i$.

2. Nyní podle polynomické věty je vzhledem k (3) a (4)

$$\sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{n \cdot m+1} \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_r} (\beta_{j_1} x_1 + \ldots + \beta_{j_r} x_r)^{n \cdot m} =$$

$$= (n \cdot m)! \cdot \sum_{j_1, \ldots, j_r = 1}^{n \cdot m+1} \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_r} \sum_{\substack{\mu_1 + \ldots + \mu_r = m \cdot n \\ \mu_i \geqq 0}} \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{\mu_i} \beta_{j_i}^{\mu_i}}{\mu_i!} =$$

$$= (n \cdot m)! \sum_{\substack{\mu_1 + \ldots + \mu_r = n \cdot m \\ \mu_i \geqq 0}} \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{\mu_i}}{\mu_i!} \sum_{j=1}^{n \cdot m+1} \sigma_j \cdot \beta_j^{\mu_i} =$$

$$= (n \cdot m)! \sum_{\substack{\nu_1 + \ldots + \nu_r = m \\ \nu_i \geqq 0}} \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{n \cdot \nu_i}}{(n \cdot \nu_i)!} \cdot \sum_{j=1}^{nm+1} \sigma_j \cdot \beta_j^{n \cdot \nu_i} =$$

$$= (n \cdot m)! \sum_{\substack{\nu_1 + \ldots + \nu_r = m \\ \nu_i \geqq 0}} \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{n \cdot \nu_i}}{(n \cdot \nu_i)!} \frac{(n \cdot \nu_i)!}{\nu_i!} =$$

$$= c_{m \cdot n} \cdot m! \sum_{\substack{\nu_1 + \ldots + \nu_r = m \\ \nu_i \geqq 0}} \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{n \cdot \nu_i}}{\nu_i!} = c_{m \cdot n} (x_1^n + \ldots + x_r^n)^m.$$

Věta tedy platí, jestliže $c_{i,1}, \ldots, c_{i,r}$ je libovolná kombinace $r$-té třídy z $(n \cdot m + 1)$ libovolných celých navzájem různých čísel $\beta_i$, $R_{1,i} = \frac{\sigma_{j_1} \cdot \sigma_{j_2} \ldots \sigma_{j_r}}{c_{m \cdot n}}$ jsou racionálná a závislá jen na $m$ a libovolných číslech $\beta_i$, $Q = (n \cdot m + 1)^r$ závisí rovněž jen na $m$, $n$, $r$, c. b. d.

Věta 5.: *Ať jsou $m$, $n$ a $r$ jakákoli celá kladná čísla, platí vždy identita v $x_1, \ldots, x_r$*

$$(\varepsilon_1 \cdot x_1^n + \ldots + \varepsilon_r \cdot x_r^n)^m = \sum_{i=1}^{S} R_{2,i} (d_{i,1}{}^n x_1^n + \ldots + d_{i,r}{}^n x_r^n)^m, \quad (5)$$

*kdež $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, r$, celá kladná čísla $d_{i,j}$ jsou vhodně volená a na číslech $x_i$ nezávislá, racionální čísla $R_{2,i}$ a celé kladné číslo $S$ závisí jen na $m$, $n$, $r$ a $\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, r$.*

Důkaz: 1. Jestliže $\varepsilon_i = +1$ pro $i = 1, \ldots, r$, je věta dokázána.

2. Jestliže pro $v < r$ hodnot $i$ je $\varepsilon_i = -1$, pak lze bez újmy obecnosti vzíti $\varepsilon_i = +1$ pro $i = 1, \ldots, r - v$ a $\varepsilon_i = -1$ pro

$i = r - v + 1, \ldots, r$. Buď nyní položeno nejprve

$$\begin{gathered}(\varepsilon_1 . x_1^n + \ldots + \varepsilon_{r-1} x_{r-1}^n - x_r^n)^m = \\ = \sum_{i=1}^{m+1} \tau_{i,1} \{\alpha_{i,1}^n (\varepsilon_1 . x_1^n + \ldots + \varepsilon_{r-1} . x_{r-1}^n) + x_r^n\}^m,\end{gathered} \tag{6}$$

kdež $\alpha_{i,1}$ jsou libovolná navzájem různá celá kladná čísla. Rozvinutím podle mocnin $x_r$ na obou stranách a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin $x_r$, plyne soustava $m + 1$ rovnic

$$\sum_{i=1}^{m+1} \tau_{i,1} . \alpha_{i,1}^{n.j} = (-1)^{m-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Ta má vždy řešení v racionálních číslech $\tau_{i,1}$ závislých jen na $m$, $n$, protože determinant soustavy $\neq 0$ vzhledem k volbě čísel $\alpha_{i,1}$.

Na pravé straně (6) je nyní již jen pro $(v - 1)$ hodnot $i$ $\varepsilon_i = -1$. Opakuje-li se tedy tento postup $(v - 1)$-krát s každým výrazem na pravé straně (6), dostane se identita (5). Při tom budou čísla $R_{2,i}$ součiny $v$ čísel $\tau_{i,j}$, tedy racionální čísla závislá jen na $m, n, r, \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, r$, čísla $d_{i,j}$ budou součiny celých kladných čísel $\alpha_{i,j}$, která jsou libovolná, ale pro určité $j$ navzájem různá a $S = (m + 1)^v$ závisí jen na $m, n, r, \varepsilon_i, i = 1, \ldots, r$, c. b. d.

Věta 6.: *Ať jsou $m$, $n$ a $r$ jakákoli celá čísla $> 0$, platí vždy identita v $x_1, \ldots, x_r$*

$$(\varepsilon_1 . x_1^n + \ldots + \varepsilon_r . x_r^n)^m = \sum_{i=1}^{T} R_{3,i} (e_{i,1} x_1 + \ldots + e_{i,r} x_r)^{n.m}, \tag{7}$$

*kdež celá čísla $e_{i,j}$ jsou vhodně volená a na $x_i$ nezávislá, racionální čísla $R_{3,i}$ a celé kladné číslo $T$ závisí pouze na $m$, $n$, $r$ a $\varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, r$.*

Důkaz: Podle věty (5) a (4)

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1 . x_1^n + \ldots + \varepsilon_r . x_r^n)\, m &= \sum_{i=1}^{S} R_{2,i} (d_{i,1}^n x_1^n + \ldots + d_{i,r}^n x_r^n)^m = \\ &= \sum_{i=1}^{S} R_{2,i} \sum_{j=1}^{Q} R_{1,i} (c_{j,1} d_{i,1} x_1 + \ldots + c_{j,r} d_{i,r} x_r)^{n.m}.\end{aligned}$$

Tedy čísla $e_{p,q} = c_{j,q} . d_{i,q}$ nezávisí na $x_i$, racionální čísla $R_{3,i} = R_{1,i} . R_{2,i}$ závisí jen na $m, n, r, \varepsilon_i, i = 1, \ldots, r$ a stejně i $T = Q . S$, c. b. d.

*Důkaz věty 1.*: Z identity (7) pro $m = k - 1 > 1$, $r = k + 1$ a pro $n = 2$ plyne $(k - 2)$-násobným derivováním, a to po prvé podle $x_{k+1}$, po druhé podle $x_k$, atd. až po $(k - 2)$-té podle $x_4$ a dělením $(k - 1)! . 2^{k-2} . \prod_{j=4}^{k+1} \varepsilon_j$

$$(\varepsilon_1 . x_1^2 + \ldots + \varepsilon_3 . x_3^2 + \varepsilon_4 . x_4^2 + \ldots + \varepsilon_{k+1} . x_{k+1}^2) . \prod_{j=4}^{k+1} x_j = \Sigma'(x),$$

kdež $\Sigma'(x)$ značí celé kladné číslo $= \sum_{i=1}^{A} a_i . P_i^k$, při čemž celé kladné číslo $A$ a racionální čísla $a_i$ závisí jen na $k$, čísla $P_i$ jsou celá a kladná.

Jestliže nyní $x_4 = x_5 = \ldots = x_{k+1} = 1$

a $$\varepsilon_{2i} = 1, \quad i = 2, 3, \ldots, \left[\frac{k+1}{2}\right],$$

$$\varepsilon_{2i+1} = -1, \; i = 2, 3, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right],$$

pak je $$\varepsilon_1 . x_1^2 + \ldots + \varepsilon_3 . x_3^2 + \left[\frac{k+1}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] = \Sigma'(k).$$

Na levé straně je vzhledem

$$\left.\begin{array}{ll} \left[\frac{k+1}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] = 1, & k \equiv 1 \\ \left[\frac{k+1}{2}\right] - \left[\frac{k}{2}\right] = 0, & k \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{2}$$

a vzhledem k větě 3. libovolné celé kladné číslo $> 1$. Z toho ale vzhledem k významu $\Sigma'(k)$ plyne věta 1, c. b. d.

*

## Sur un problème analogue à celui de Waring.

(Extrait de l'article précédent.)

Il s'agit du problème suivant: Trouver le moindre nombre entier et positif $\overline{g}(k)$ tel que chaque nombre entier et positif soit la somme algébrique de $\overline{g}(k)$ ou moins de nombres d'un ensemble $N$, qui contient tous les nombres $\pm x^k$ pour $x$ entier et positif. L'auteur fait voir que $\overline{g}(2) = 3$ et il démontre de plus que $\overline{g}(k)$ n'est qu'une fonction de $k$.