Jan Srb

Několik konstrukcí kvadratické nadplochy čtyřrozměrného prostoru ze 14 bodů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 3, 203--208

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123858`

Několik konstrukcí kvadratické nadplochy čtyřrozměrného prostoru ze 14 bodů.

Jan Srb, Olomouc.

(Došlo dne 25. května 1936.)

Kvadratická nadplocha čtyřrozměrného prostoru je určena 14 body takovými, že žádných 5 neleží v téže trojrozměrné nadrovině. Abychom dovedli sestrojit řez nadplochy libovolným prostorem, stačí, dovedeme-li sestrojit buď druhý průsečík libovolné přímky, vedené některým z daných, s nadplochou, nebo sestrojit polárnost, v níž je hledaná nadplocha incidenční, nebo sestrojit tři pevné řezy v různých nadrovinách. Prvý případ je zřejmě možno převést na případ třetí. V druhém případě je řez nadplochy prostorem nižším incidenční varieta polárnosti indukované v tomto prostoru danou polárností. V případě třetím jsou řezy tři kvadratické plochy, ležící v různých nadrovinách, protínající se po dvou ve třech kuželosečkách (jsou-li nadroviny nezávislé), nebo protínající se v jedné kuželosečce. Řez libovolnou nadrovinou je určen třemi kuželosečkami, ležícími v různých rovinách, protínajícími se buď po dvou ve dvou bodech, nebo protínajícími se ve dvou bodech tak, že tečny ve společném bodě leží v téže rovině.

1. Druhý průsečík přímky p, jdoucí jedním z daných bodů A, s nadplochou je možno sestrojit tak, že k libovolnému bodu P přímky p sestrojíme polárnou nadrovinu, která protne p v bodě P'. Pak bod B takový, že $(P, P', A, B) = -1$, je hledaný průsečík. Polárnou nadrovinu bodu vzhledem ke kvadratické nadploše sestrojíme pomocí věty:

Polárné nadroviny bodu vzhledem ke všem nadplochám trojmocné lineární soustavy kvadratických nadploch procházejí jedním bodem.

Buďte ${}^1V_3^2$, ${}^2V_3^2$, ${}^3V_3^2$, ${}^4V_3^2$ čtyři lineárně nezávislé (t. j. neobsažené v téže lineární dvojmocné soustavě) kvadratické nadplochy čtyřrozměrného prostoru. Polárné nadroviny bodu P vzhledem k těmto čtyřem nadplochám jsou pak také lineárně nezávislé a protínají se v bodě Q. Protože polárné nadroviny bodu P k nadplochám ${}^1V_3^2$ a ${}^2V_3^2$ procházejí bodem Q, prochází jím i base svazku polárných nadrovin, přidružených bodu P vzhledem ke všem nadplochám svazku $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2)$, tedy každá polárná nadrovina bodu P, přidružená libovolné nadploše svazku $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2)$. Polárná nadrovina bodu P k nadploše ${}^3V_3^2$ prochází bodem Q, pak z téhož důvodu jako nahoře prochází tímto bodem polárná nadrovina bodu P vzhledem ke každé nadploše svazku určeného nadplochou ${}^3V_3^2$ a libovolnou nadplochou svazku $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2)$, t. j. ke každé nadploše dvojmocné lineární soustavy $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2, {}^3V_3^2)$. A stejně, protože polárná nadrovina bodu P vzhledem k nadploše ${}^4V_3^2$ prochází bodem Q, prochází jím i polárná nadrovina vzhledem ke každé nadploše svazku určeného ${}^4V_3^2$ a libovolnou nadplochou soustavy $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2, {}^3V_3^2)$, t. j. vzhledem ke každé nadploše trojmocné lineární soustavy $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2, {}^3V_3^2, {}^4V_3^2)$.

Podle jisté obecné věty[1]) tvoří všechny kvadratické nadplochy, procházející 11 pevnými body čtyřrozměrného prostoru, lineární trojmocný systém, protože třemi obecnými body je určena jediná nadplocha systému. Rozdělíme-li tedy 14 bodů ve čtyři skupiny po 11 bodech tak, aby každé dvě skupiny obsahovaly alespoň jeden bod různý, a sestrojíme-li body $Q_1, \ldots, Q_4$, příslušné témuž bodu P ve čtyřech trojmocných soustavách kvadratických nadploch určených těmito skupinami, bude každá nadrovina, procházející body $Q_1, \ldots, Q_4$, polárnou nadrovinou bodu P vzhledem ke kvadratické nadploše procházející 14 body. Určuje-li 14 bodů jedinou kvadratickou nadplochu, jsou body $Q_1, \ldots, Q_4$ nezávislé a určují polárnou nadrovinu bodu P. Je tedy naší úlohou proložit 11 body 4 lineárně nezávislé kvadratické nadplochy.

V čtyřrozměrném prostoru R_4 buď dáno 11 bodů takových, že žádných 5 neleží v téže trojrozměrné nadrovině. Body rozdělme libovolně ve dvě skupiny: $A_1, A_2, \ldots, A_7$; $B_1, \ldots, B_4$. 7 body $A_1, \ldots, A_7$ je určena normální křivka C^4 čtyřrozměrného prostoru R_4, kterou prochází pětimocný lineární systém kvadratických nadploch.[2]) Nadplochy tohoto systému, které procházejí 4 body $B_1, \ldots, B_4$, tvoří tedy svazek Φ, protože každá je určena jediným obecným bodem. Base svazku Φ je bikvadratická plocha V_2^4 prostoru R_4, kterou obecná nadrovina protíná v bikvadratické křivce druhu prvého, t. j. v basi svazku kvadratických ploch, v němž nadrovina protíná svazek Φ. Bikvadratická křivka K^4, v níž V_2^4 protíná nadrovinu R_3 určenou body $B_1, \ldots, B_4$, je dána těmito 4 body a 4 dalšími, ve kterých R_3 protíná normální křivku C^4. Tyto průsečíky sestrojíme jako samodružné body kolineace, ve které protnou R_3 dva kolineárné trojmocné trsy přímek, určené libovolnými dvěma z bodů $A_1, \ldots, A_7$, na př. A_1, A_2 jako

[1]) Bertini-Duschek, Einführung in die proj. Geometrie mehrdim. Räume — 1924, str. 180.

[2]) Bertini-Duschek, str. 328.

vrcholy a ostatními pěti $A_3, \ldots, A_7$ jako průsečíky sdružených přímek. Bikvadratická křivka, ve které $V_2{}^4$ protíná obecnou nadrovinu, je nyní určena 4 průsečíky této nadroviny s C^4 a 4 body, ve kterých protíná K^4 rovina společná této nadrovině a R_3. Nadplochu svazku Φ, procházející obecným bodem, určíme buď tak, že bodem proložíme tři libovolné nadroviny. V každé je určen řez nadplochy bikvadratickou křivkou ve které protne $V_2{}^4$ a daným bodem. Nebo bodem proložíme jednu nadrovinu a sestrojíme kvadratickou plochu $V_2{}^2$, určenou tímto bodem a bikvadratickou křivkou, ve které nadrovina protne $V_2{}^4$. Řez nadplochy obecnou nadrovinou je pak určen kuželosečkou, ve které nadrovina protne $V_2{}^2$ a čtyřmi nezávislými body, ve kterých protne normální křivku C^4. Podle řečeného provedeme tedy konstrukci takto: Bodem P, jehož polárnou nadrovinu chceme určit, proložíme dvě různé trojrozměrné nadroviny ${}^1R_3$, ${}^2R_3$, nezávislými body $B_1, \ldots, B_4$ nadrovinu R_3. Z bodů na př. A_1, A_2 promítneme 5 bodů $A_3, \ldots, A_7$ do těchto tří nadrovin. Tím získáme v každé nadrovině 5 dvojic bodů, jež určují kolineaci těchto nadrovin tak, že jsou v každé nadrovině sdruženy průměty téhož bodu a průměty ze stejného bodu patří téže soustavě. Sestrojíme samodružné body těchto kolineací v ${}^1R_3$: ${}^1C_1, \ldots, {}^1C_4$; v ${}^2R_3$: ${}^2C_1, \ldots, {}^2C_4$; v R_3: $C_1, \ldots, C_4$. Body $B_1, \ldots, B_4$, $C_1, \ldots, C_4$ určená bikvadratická křivka prvého druhu K^4 protne ${}^1R_3$ ve čtyřech bodech (v rovině společné nadrovinám R_3 a ${}^1R_3$) ${}^1D_1, \ldots, {}^1D_4$; ${}^2R_3$ v ${}^2D_1, \ldots, {}^2D_4$. Sestrojíme-li poláry p_1, p_2 (t. j. osy svazků polárných rovin) bodu P vzhledem k bikvadratické křivce ${}^1K^4$, určené v ${}^1R_3$ 8 body ${}^1C_1, \ldots, {}^1C_4$, ${}^1D_1, \ldots, {}^1D_4$ a ${}^2K^4$ určené v ${}^2R_3$ 8 body ${}^2C_1, \ldots, {}^2C_4$, ${}^2D_1, \ldots, {}^2D_4$, určují obě přímky rovinu α (obě se totiž protnou v pólu bodu P vzhledem ke svazku kuželoseček, v němž společnou rovinu obou nadrovin protne svazek Φ), jež je basí svazku polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazku kvadratických nadploch, procházejících 11 danými body.

Stejně proložíme na př. body $A_1, \ldots, A_3$, $B_1, \ldots, B_4$ racionální normální křivku ${}^1C^4$, body $A_4, \ldots, A_7$ nadrovinu R'_3. Bikvadratická křivka ${}^1K^4$ prostoru R'_3, určená body $A_4, \ldots, A_7$ a $D'_1, \ldots, D'_4$, v nichž R'_3 protne ${}^1C^4$, určuje s ${}^1C^4$ svazek kvadratických nadploch Φ_1, procházející 11 body $A_1, \ldots, A_7$, $B_1, \ldots, B_4$. Nadroviny R_3 a R'_3 se protnou v rovině β. Každá z křivek K^4, ${}^1K^4$ protne β v bodové čtveřině. Body $B_1, \ldots, B_4$ a body, ve kterých protne β křivku ${}^1K^4$, prochází bikvadratická křivka K'^4, ve které base svazku Φ_1 protne R_3. Jenom v případě, kdyby splynuly 3 body jedné čtveřiny v β s třemi body druhé, procházela by oběma křivkami K^4, K'^4 kvadratická plocha prostoru R_3, která by s oběma křivkami C^4 a ${}^1C^4$ určovala tutéž kvadratickou nadplochu. Pak by oba svazky Φ, Φ_1, majíce jednu společnou nadplochu, náležely dvojmocné soustavě nadploch a bylo by nutno záměnou bodů v obou skupinách určit ještě jeden svazek nadploch. Obecně však žádné body v rovině β nesplynou, t. j. svazky Φ, Φ_1 nenáležejí téže dvojmocné soustavě, polárná rovina α_1 bodu P vzhledem k svazku Φ_1 má obecnou polohu k rovině α a protíná ji v hledaném bodě Q.

2. Protože dovedeme sestrojit polárnou nadrovinu libovolného bodu ke kvadratické nadploše jdoucí danými 14 body, je tím stanovena polárnost, v níž je tato plocha incidenční. Výhodné stanovení incidenční nadplochy obdržíme, sestrojíme-li známým způsobem její autopolární normální jehlan. Pak je totiž každý řez nižším prostorem, proloženým některým z daných bodů, stanoven autopolárním normálním jehlanem, ve kterém tento prostor protíná jehlan nadplochy, a daným bodem.

3. Konstrukci vyloženou v 1. můžeme poněkud zjednodušit. 12 body čtyřrozměrného prostoru takovými, že žádných pět neleží v nadrovině, je určen dvojmocný lineární systém kvadratických nadploch, protože dvěma obecnými body prochází jediná nadplocha systému. Jako v 1. pak dokážeme: *polárné nadroviny bodu vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám dvojmocného lineárního systému procházejí pevnou přímkou.* Polárné nadroviny bodu P vzhledem ke třem lineárně nezávislým kvadratickým nadplochám čtyřrozměrného prostoru ${}^1V_3^2$, ${}^2V_3^2$, ${}^3V_3^2$ jsou také lineárně nezávislé a protínají se tedy v přímce p. Přímkou p proto procházejí base svazků polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazků $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2)$ a $({}^1V_3^2, {}^3V_3^2)$, tedy i polárné nadroviny všech nadploch těchto svazků. Z toho plyne, že přímkou p procházejí i všechny base svazků polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazků určených kterýmikoliv dvěma nadplochami svazků $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2)$ a $({}^1V_3^2, {}^3V_3^2)$, tedy polárné nadroviny bodu P vzhledem ke všem nadplochám dvojmocné lineární soustavy $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2, {}^3V_3^2)$. Rozdělme 14 bodů ve dvě skupiny po 12 bodech tak, aby v každé skupině byly dva body různé a sestrojme polárné přímky obecného bodu vzhledem k dvojmocné soustavě kvadratických nadploch určené prvou a druhou skupinou 12 bodů. Ke každé polárné nadrovině, jdoucí prvou (druhou) přímkou, existuje jediná nadplocha, procházející prvou (druhou) skupinou 12 bodů. Ke každé polárné nadrovině, procházející oběma přímkami, existuje tedy nadplocha, procházející danými 14 body. Určuje-li 14 bodů jedinou kvadratickou nadplochu, jsou obě přímky v poloze obecné a určují polárnou nadrovinu bodu P. Máme-li najíti polárnou přímku p, v níž se protínají polárné nadroviny bodu P vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám dvojmocného lineárního svazku určeného dvanácti body, proložme libovolnými 11 z nich jako v 1. svazek kvadratických nadploch Φ. Bodem dvanáctým a P proložme dvě libovolné nadroviny ${}^1R_3$ a ${}^2R_3$. Konstrukcí uvedenou v 1. sestrojíme obě bikvadratické křivky ${}^1K^4$ a ${}^2K^4$, ve kterých nadroviny ${}^1R_3$ a ${}^2R_3$ protnou basi svazku Φ. Dvanáctým bodem a křivkou ${}^1K^4$ (${}^2K^4$) je v ${}^1R_3$ (${}^2R_3$) určena kvadratická plocha, která je řezem prostoru ${}^1R_3$ (${}^2R_3$) s kvadratickou nadplochou svazku Φ, jdoucí tímto bodem. Sestrojíme-li polárné roviny bodu P k oběma plochám, protínají se v přímce (v poláře bodu P vzhledem ke kuželosečce, v níž se obě plochy, ve společné rovině nadrovin ${}^1R_3$ a ${}^2R_3$, protínají) a určují polárnou nadrovinu kvadratické nadplochy procházející danými dvanácti body. Jinou volbou dvanáctého bodu a skupin určujících svazek nadploch zbývajícími 11 body, sestrojíme ještě dvě polárné nadroviny bodu P vzhledem ke dvěma jiným nadplochám procházejícím dvanácti body. Obecně nebudou nadroviny náležet témuž svazku a protnou se v hledané přímce.

4. Druhý průsečík přímky p, jdoucí jedním ze 14 daných bodů, s kvadratickou nadplochou, těmito body určenou, můžeme sestrojiti jinak. Přímkou p, jdoucí bodem A_1, a libovolným z daných bodů A_2 proložme rovinu α; touto rovinou a jedním ze zbývajících bodů A_3 nadrovinu R_3. Zbývajícími 11 body proložme jako v 1. svazek kvadratických nadploch a sestrojme bikvadratickou křivku, ve které jeho base protíná R_3. Bikvadratickou křivkou a bodem A_3 je určena kvadratická plocha prostoru R_3, která protne rovinu α tohoto prostoru v kuželosečce $K_1{}^2$. Kuželosečka $K_1{}^2$ je tedy řez kvadratické nadplochy, jdoucí 12 z daných 14 bodů, rovinou α. Těmito 12 body proložíme (výměnou bodových skupin jako v 3.) ještě dvě jiné nadplochy nepatřící témuž svazku, které protnou rovinu α v kuželosečkách $K_2{}^2$, $K_3{}^2$, jež s $K_1{}^2$ nenáleží témuž svazku. Společné body kuželoseček $K_1{}^2$ a $K_2{}^2$ jsou průsečíky base jistého svazku kvadratických nadploch, jdoucích 12 z daných bodů, s rovinou α. Kuželosečka určená ve svazku ($K_1{}^2$, $K_2{}^2$) bodem A_2, je křivka ve které protíná rovinu α kvadratická nadplocha jdoucí 13 z daných bodů. Tato kuželosečka nechť protne přímku p v bodech M, M', kuželosečka určená bodem A_2 ve svazku ($K_1{}^2$, $K_3{}^2$), v bodech N, N'. Body M, M', N, N' jsou průsečíky přímky p s dvěma kvadratickými nadplochami procházejícími 13 danými body a určují involuci, ve které svazek určený těmito nadplochami protíná přímku p. Sestrojíme-li tedy v involuci MM', NN' bod A'_1, korespondující bodu A_1, je tento bod druhým průsečíkem přímky p s kvadratickou nadplochou procházející danými 14 body. Zároveň je tím sestrojen řez nadplochy s rovinou α.

*

Quelques constructions de l'hyperquadrique dans l'espace à quatre dimensions, déterminée par quatorze points.

(Extrait de l'article précédent.)

On peut faire passer une hyperquadrique dans l'espace à quatre dimensions par douze points généraux de la manière suivante: sept points arbitraires déterminent une courbe C^4 normale, par laquelle passent les hyperquadriques d'un système linéaire à cinq paramètres. Prenons de plus quatre points, ceux-ci déterminent, dans ce système, un faisceau d'hyperquadriques Φ. Dans le R_3 (espace à trois dimensions) déterminé par ces quatre points construisons la quartique K^4 déterminée par ces quatre points et par les quatre points communs à R_3 et C^4; l'intersection $K_1{}^4$ de la base $V_2{}^4$ du faisceau Φ avec un hyperplan ${}^1R_3$ général est déterminée par quatre points communs à ${}^1R_3$ et à C^4 et par quatre points communs à ${}^1R_3$ et K^4. Faisons passer par un douzième point trois hyperplans; chacun d'eux contient une quadrique déterminée par ce point et par la quartique. Ces trois surfaces déterminent une hyperquadrique passant par les douze points. A l'aide du théorème disant que les hyperplans polaires d'un point P par rapport aux hyperquadriques d'un système linéaire à trois (à deux) paramètres passent par un point Q (une droite p), on construit l'hyperplan polaire d'un point quelconque par rapport à l'hyperquadrique déterminée par 14 points. Groupons les 14 points donnés en quatre (deux) groupes contenant 11 (12) points chacun, de sorte que ces groupes diffèrent de un (deux) point. Dans chaque groupe construisons 4 (3) hyperquadriques linéairement indépendantes en faisant passer, chaque fois, la courbe C^4 par différents points du groupe. Les hyperplans polaires du point P par rapport à ces trois (deux) hyperquadriques se coupent au point Q (suivant la droite p). Quatre points Q (deux droites p) déterminent l'hyperplan polaire du point P par rapport à l'hyperquadrique à déterminer. De la sorte, on peut construire la polarité dans laquelle cette hyperquadrique est autopolaire, ou bien construire le point d'intersection de l'hyperquadrique avec une droite passant par un des points donnés. On peut aussi construire le faisceau d'hyperquadriques passant par treize des points donnés et y déterminer, par le quatorzième point, l'hyperquadrique cherchée.