František Kadeřávek

Sestrojení kružnic za daných podmínek

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 2, 231--234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123842

Při parabole je vrchol B na ose AB v nekonečnu a MP stojí kolmo na její ose; tím přicházíme k známému sestrojení normály paraboly. Z toho seznáváme, že uvedená konstrukce normály ellipsy (hyperboly) je obdobná parametrické konstrukci normály paraboly.

3. Blíží-li se bod M po kuželosečce k vrcholu A, šine se stálý úsek $PN = 2p$ směrem ku A. Splyne-li však M s vrcholem A, přijde též P do A a úsek PQN zaujme polohu $AQ'N'$ ($AQ' = Q'N' = p$). V tomto případě jeví se bod Q' jakožto mezní poloha průsečíku Q normály hybné MQ s normálou pevnou AB (osou), pročež je Q' středem a $AN' = 2p$ průměrem kruhu zakřivení ve vrcholu A.

Kdybychom vyšli od rovnice ellipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, mohli bychom též snadno dokázati, že kolmice postavené na přímky, spojující kterýkoliv bod M (ξ, η) ellipsy s vrcholy C, D malé osy, na ose této vytínají stálou délku $PN = 2\frac{a^2}{b}$. Jako v případě předešlém, mohli bychom i ukázati, že střed zakřivení na př. ve vrcholu C malé osy má od tohoto vrcholu vzdálenost $\frac{a^2}{b}$. Též normálu ellipsy v bodě M lze obdržeti, učiníme-li

$$PQ = p = \frac{a^2}{b}$$

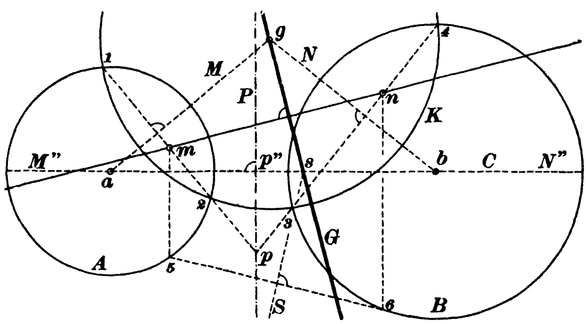
a spojíme-li bod Q s bodem M.

V *Telči*, dne 10. listopadu 1911.

Sestrojení kružnic za daných podmínek.

Napsal Dr. **Fr. Kadeřávek.**

Buďtež dány kružnice A, B o středech a, b (obr. 1.), a body m, n. Vyhledati jest geom. místo G středů g kružnic, jichž chordály vzhledem ke kružnicím A, B procházejí danými body m, n. Abychom úlohu předloženou rozřešili, postupujeme cestou následní: vyšetřme nejprvé společnou chordálu P daných kružnic A, B, zvolme na ni bod p a spojme jej s body m, n. Označíme-li průsečíky spojnic mp, pn s kružnicemi A, B číslicemi 1, 2, 3, 4, pak lze body 1, 2, 3, 4 proložiti kružnici, která jest jednou z křivek hledaných. Její střed g vyhledáme v průsečíku přímky M bodem a kolmo k $\overline{mp}$ a přímky N bodem b kolmo k $\overline{np}$ vedené. Udělme nyní bodu p pohyb v přímce P. Každé jeho poloze p' přináleží jediná poloha přímek $\overline{mp'}$, $\overline{np'}$ a proto i jediná poloha přímek M', N', jdoucích body a, b a k předešlým přímkám kolmých. I vytvářejí při pohybu bodu p' ve přímce P přímky M', N' dva svazky paprskové o středech a, b takové, že každému paprsku jednoho svazku přináleží jediný určitý paprsek svazku druhého. Tu však průsečík g' paprsků M', N' probíhá křivku stupně druhého*).



Obr. 1.

V našem případě, přejde-li bod p do průsečíku p'' přímky P s centrálou $C \equiv \overline{ab}$ daných kružnic, splynou obě příslušné

*) Počtářsky vyjádříme takové dva svazky paprsků jednoznačně si odpovídajících — zoveme je svazky *proměnnými* či *projektivními* — rovnicemi:

$$M' \equiv (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$
$$N' \equiv (A_3x + B_3y + C_3) + \lambda\,(A_4x + B_4y + C_4) = 0,$$

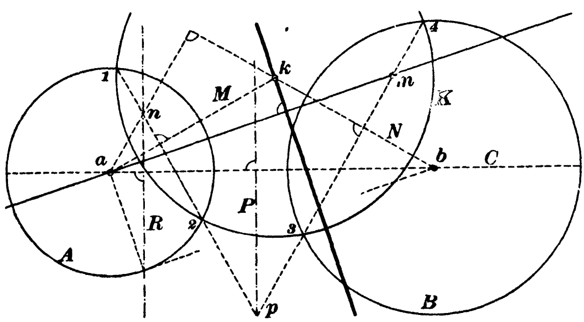
kdež $A_iB_iC_i$ jsou konstanty, střed a prvého svazku je v průsečíku přímek $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ a $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, střed b druhého svazku v průsečíku přímek $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ a $A_4x + B_4y + C_4 = 0$. Zvolíme-li v kterémkoli svazku libovolný paprsek, jest tím stanoveno λ, jež v druhém svazku určuje přiřaděný paprsek jednoznačně. Vyloučením λ dostaneme rovnici geom. místa průsečíků sdružených paprsků $M'N'$ daných svazků:

$$(A_1x + B_1y + C_1)\,(A_4x + B_4y + C_4) =$$
$$= (A_2x + B_2y + C_2)\,(A_3x + B_3y + C_3);$$

jest to rovnice kuželosečky, čímž tvrzení naše dokázáno.

přímky M'', N'' v této centrále C navzájem. i můžeme každý bod přímky C považovati za průsečík sdružených paprsků $M''N''$ uvažovaných svazků, jest proto C částí kuželosečky svazky těmi vytvořované i zbývá z této kuželosečky ještě přímka G, jež je kolma ke spojnici $\overline{mn}$. Jeť tato spojnice také jednou z uvažovaných kružnic i náleží její střed — úběžný ve směru kolmém k $\overline{mn}$ — hledanému geom. místu G, jež provedeme proto bodem g kolmo k $\overline{mn}$.

Jest tedy geom. místo středů kružnic, jež protínají dané kružnice A, B tak, že spojnice průsečíků procházejí danými pevnými body m n přímka G kolmá ke spojnici $\overline{mn}$. Sestrojíme ji nejjednodušeji tím, že vedeme k centrále C daných kružnic body mn kolmice, vyhledáme jejich průsečíky 5, 6 s křivkami A, B, načež průsečíkem s symetrály S úsečky $\overline{56}$ s centrálou C vedeme kolmici G ku $\overline{mn}$.



Obr. 2.

Případ uvažovaný obsahuje v sobě specielní případ, kdy body m, n jsou středy kružnic A, B; zde G je geom. místem středů kružnic, jichž průsečíky s danými kružnicemi A, B leží na průměřech těchto kružnic, či jak říkáme, G jest g. místo kružnic dané A, B diametrálně protínajících.

Přihlédněme nyní k dalšímu případu, kdy dány jsou dvě kružnice A, B a bod m. Hledejme geom. místo G středů k kružnic K, jež protínají kružnici A orthogonálně, kružnici B pak tak, že spojnice průsečíků prochází bodem m.

Sestrojme si i zde chordálu P kružnic A, B, dále poláru R středu b kružnice B vzhledem ke křivce A. Budiž kružnice K o středu k jednou z kružnic žádaných. Označme průsečíky její s kružnicí A číslicemi 1, 2, ony pak s kružnicí B číslicemi 3, 4; pak spojnice $\overline{12}$ je polárou bodu k vzhledem ke křivce A (jsouť 1, 2 vzhledem k pravosti úhlů $k1a = k2a$ dotyčníky tečen z bodu k ke křivce A vedených), musí proto na ni ležeti bod n, pól to přímky $\overline{kb} \equiv N$, mimo to úhel přímek $\overline{an}$, N musí býti pravý, ježto spojnice pólu se středem při kružnici vždy je kolmá k příslušné poláře. Ale polára N bodu n prochází bodem b, musí proto bod n ležeti na poláře R — prve již sestrojené — bodu b vzhledem ke kruhu A. Z toho plyne následní konstrukce libovolné kružnice K žádaným podmínkám hovící: Na chordále P zvolme si bod p, k jehož spojnici s bodem m veďme bodem b kolmici N; přímka bodem a k této kolmici N kolmo vedená vytyčuje na poláře R bod n, jehož spojnice s p vytyčuje na kružnici A body 1, 2, jichž symetrála M na paprsku N určuje střed k hledané kružnice K, jíž proložíme body 1, 2. Z konstrukce patrno, že libovolně zvolenému paprsku N odpovídá jediný paprsek M a naopak, vytváří proto jejich průsečík k kuželosečku. Vedeme-li však paprsek $N' \perp P$, pak i příslušný M' je kolmý k P a oba splývají s centrálou C daných kružnic v jedno. Tvoří proto $M' \equiv N' \equiv C$ část kuželosečky průsečíky sdružených paprsků M, N obou jednoznačných svazků vytvořované, i jest jako v předchozím případě hledané geom. místo, co zbývající část této kuželosečky, přímé, bodem k kolmo ke spojnici $\overline{ma}$ jdoucí. Jest totiž přímka $\overline{ma}$ kružnicí nekonečně velikého poloměru protínající kružnici A kolmo, kružnici B však tak, že spojnice průsečíků jde bodem m.

Je-li bod m středem kružnice B, pak přímka G jest rovnoběžna s chordálou P a jest geom. místem kružnic protínajících křivku A kolmo, kružnici B pak diametrálně. Uvedenými geom. místy můžeme vyhledati na př. kružnice protínající danou kružnici A kolmo, druhou danou B diametrálně, třetí kružnici tak, aby spojnice průsečíků šla daným bodem a podobně.