O jisté vlastnosti skupiny dotyčných bodů na čarách algebraických.

Napsal Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni.

V ročníku XI. tohoto časopisu poukázal Dr. Zahradník ve článku „O skupinách bodů dotyčných na listu Descartesově“ na tuto vlastnost listu Descartesova:

Libovolným bodem v rovině k listu Descartesově vedené tečny mají tu vlastnost, že střed středních vzdáleností bodů dotyčných jest konstantní; jest to bod dvojný této křivky.

Tato vlastnost patří i jiným druhům čar algebraických a ve stati této chceme některé jednoduché typy křivek takových vyhledati. Tak nalezneme, že vlastnost tu mají čáry stupně třetího tvaru:

$$ax^3 + by^3 + cxy + d = 0,$$

jichž zvláštním případem pro $a = 1$, $b = 1$, $d = 0$, jest list Descartesův:

$$x^3 + y^3 + axy = 0.$$

Budiž dána křivka n-tého stupně:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 \\ + \ldots, a_ny^n + b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2}y \\ + \ldots b_{n-1}y^{n-1} + c_0x^{n-2} + \ldots = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

kdež souhrn členů o koefficientech a značí výraz homogenní stupně n-tého, souhrn členů o koefficientech b výraz homogenní stupně $(n - 1)$-ho a t. d.

Rovnici tu pišme ve tvaru:

$$\varphi(x, y) = x^nf\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2}f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0; \quad (1')$$

při tom $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ značí:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_n t^n,$$
$$f_1(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots b_{n\ 1} t^{n-1},$$
$$f_2(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots c_{n-2} t^{n-2}.$$

Ku křivce předložené veďme tečny bodem (ξ, η).

Souřadnice dotyčných bodů tečen stanovíme jakožto společné kořeny rovnice (1′) a poláry $(n - 1)$-ho stupně bodu (ξ, η); rovnice k určení bodů dotyčných tedy zní:

$$\xi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + x^{n-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + 2 f_2\left(\frac{y}{x}\right) x^{n-2} + \dots = 0, \quad (2)$$

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Ustanovme $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ a $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ z rovnice (1′).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = n x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + (n - 1)\, x^{n-2} f_1\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$+ (n - 2)\, x^{n-3} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \dots + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot - \frac{y}{x^2}$$
$$+ x^{n-1} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) \cdot - \frac{y}{x^2} + x^{n-2} f'_2\left(\frac{y}{x}\right) \cdot - \frac{y}{x^2} + \dots$$

Položíme-li

$$\frac{y}{x} = t,$$

pak

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x^{n-1}(n f(t) - t f'(t))$$
$$+ x^{n-2}((n - 1) f_1(t) - t f'_1(t)) + \dots$$

Podobně obdržíme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^{n-1} f'(t) + x^{n-2} f'_1(t) + \dots$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice (2) dospíváme k rovnici:

$$O = x^{n-1}[\xi(n f(t) - t f'(t)) + \eta f'(t) + f_1(t)]$$
$$+ x^{n-2}[\xi(\overline{n - 1} f_1(t) - t f'_1(t)) + \eta f'_1(t) + 2 f_2(t)] + \dots$$

Položíme-li pro krátkost:

$$\begin{aligned} \xi\,(nf(t) - tf'(t)) + \eta f'(t) + f_1(t) &= F(t), \\ \xi\,(\overline{n-1}\, f_1(t) - tf'_1(t)) + \eta f'_1(t) + 2f_2(t) &= F_1(t), \end{aligned} \tag{3}$$

pak souřadnice dotyčných bodů jsou společné kořeny rovnic:

$$\begin{aligned} x^n f(t) + x^{n-1} f_1(t) + x^{n-2} f_2(t) + \ldots &= 0 \\ x^{n-1} F(t) + x^{n-2} F_1(t) + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

V těchto kořenech obsaženy jsou také souřadnice dvojných bodů křivky dané, poněvadž polára jimi prochází. Jedná-li se však o vyšetření nezávislosti středů středních vzdáleností bodů dotyčných na ξ a η, pak stačí stanoviti podmínku nezávislosti součtu všech kořenů společných oběma rovnicím předchozím.

Součet všech kořenů x předchozích rovnic jest dán známým vzorcem:

$$\Sigma x = -\Sigma \frac{\alpha' F'(\alpha) + F_1(\alpha)}{F(\alpha)}, \text{*)} \tag{4}$$

kdež součet na pravé straně vztahuje se na všecky kořeny rovnice:

$$f(\alpha) = 0,$$

a veličina α' jest dána rovnicí:

$$\alpha' = -\frac{f_1(\alpha)}{f'(\alpha)}:$$

Z rovnic (3) obdržíme hledíce k podmínce $f(\alpha) = 0$,

$$F'(\alpha) = (n-1)\,\xi f'(\alpha) + (\eta - \alpha\xi) f''(\alpha) + f'_1(\alpha),$$

$$\alpha' F'(\alpha) = -(n-1)\,\xi f_1(\alpha) - (\eta - \alpha\xi)\frac{f_1(\alpha) f''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{f_1(\alpha) f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

$$F_1(\alpha) = (n-1) f_1(\alpha)\xi + (\eta - \alpha\xi) f'_1(\alpha) + 2f_2(\alpha),$$

$$F(\alpha) = (\eta - \alpha\xi) f'(\alpha) + f_1(\alpha).$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice (4) obdržíme:

$$\Sigma x = -\Sigma \frac{(\eta - \alpha\xi)\,(f'(\alpha) f'_1(\alpha) - f''(\alpha) f_1(\alpha)) + 2f_2(\alpha) f'(\alpha) - f_1(\alpha) f'_1(\alpha)}{(\eta - \alpha\xi) f'^2(\alpha) + f'(\alpha) f_1(\alpha)}. \tag{5}$$

*) Serret: „Handbuch der Algebra“, Zweite Auflage, str. 506.

Hledejme některé jednoduché podmínky, aby Σx, tedy i úsečka středu středních vzdáleností bodů dotyčných tečen z bodů (ξ, η) ke křivce vedených byla nezávislá na poloze bodu (ξ, η).

Předně vidíme, že pro úběžný bod jakkoli položený, t. j. pro

$$lim \frac{\eta}{\xi} = A,$$

kdež A libovolné číslo značí, výraz Σx jest na A nezávislý, neboť v tomto případě

$$\Sigma x = - \lim_{\xi = \infty} \frac{(A-\alpha)\left(f'(\alpha)f'_1(\alpha) - f''(\alpha)f_1(\alpha)\right) + \frac{2f_2(\alpha)f'(\alpha) - f_1(\alpha)f'_1(\alpha)}{\xi}}{(A-\alpha)f'^2(\alpha) + \frac{f'(\alpha)f_1(\alpha)}{\xi}}$$

$$= - \Sigma \frac{f'(\alpha)f'_1(\alpha) - f''(\alpha)f_1(\alpha)}{f'^2(\alpha)}.$$

V tomto případě vyjadřuje výsledek známou větu Lionvilleovu:

Vedeme-li k dané křivce tečny vesměs rovnoběžné ve směru libovolném, pak střed středních vzdáleností bodů dotyčných jest konstantní, nezávislý na směru těchto tečen.

Možno však z výrazu (5) nalézti některé jednoduché podmínky, aby Σx bylo nezávislé na poloze bodu (ξ, η), i když tento není v nekonečnu.

Z rovnice (5) patrno, že Σx bude nezávislo na výrazu $\eta - \alpha\xi$, tedy i na ξ a η, platí-li o funkcích

$$f(t),\ f_1(t) \text{ a } f_2(t)$$

pro jakékoli t podmínka:

$$\frac{f'_1(t)f'(t) - f_1(t)f''(t)}{f'^2(t)} = \frac{2f_2(t)f'(t) - f_1(t)f'_1(t)}{f'(t)f_1(t)}, \tag{6'}$$

aneb v jednodušší formě:

$$\frac{2f'_1(t)}{f'(t)} = \frac{2f_2(t)}{f_1(t)} + \frac{f''(t)f_1(t)}{f'^2(t)}. \tag{6''}$$

Rovnici této lze dáti ještě jednodušší tvar:

$$\frac{2f'_1(t)\,f_1(t)\,f'(t)-f''(t)\,f_1^2(t)}{f'^2(t)}=2f_2(t_1)$$

čili:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f_1^2(t)}{f'(t)}\right)=2f_2(t) \tag{6}$$

Podmínky (6′), (6″) a (6) jsou tedy aequivalentní, a jsou-li ty splněny pro jakékoli t, pak Σx jest nezávislé na poloze bodu (ξ, η).

Σx dle rovnice (5) má pak hodnotu:

$$\begin{aligned}\Sigma x &= -\Sigma\frac{f'(\alpha)\,f'_1(\alpha)-f''(\alpha)\,f_1(\alpha)}{f'^2(\alpha)}\\ &= -\Sigma\frac{2f'(\alpha)f_2(\alpha)-f_1(\alpha)\,f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)\,f_1(\alpha)}\\ &= -2\Sigma\frac{f_2(\alpha)}{f_1(\alpha)}+\Sigma\frac{f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)}.\end{aligned} \tag{7}$$

Ukažme dále, že platí-li podmínky (6), že i výraz Σy, t. j. součet všech pořadnic dotyčných bodů tečen zůstává konstantní pro libovolný bod (ξ, η). Tím bude pak dokázána věta: Vedeme-li z libovolného bodu tečny k čáře algebraické, pro niž platí pro jakékoli t podmínky (6), pak Σx i Σy zůstává konstantní.

Rovnici (1) lze též psáti ve tvaru:

$$\varphi(x, y)=y^n\,\psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{n-1}\psi_1\left(\frac{x}{y}\right)+y^{n-2}\,\psi_2\left(\frac{x}{y}\right)+\ldots=0,$$

při čemž, píšeme-li pro krátkost

$$u=\frac{x}{y},$$

platí o funkcích ψ, ψ_1, ψ_2 relace

$$\psi(u)=u^n f\left(\frac{1}{u}\right), \tag{8}$$

$$\psi_1(u)=u^{n-1}f_1\left(\frac{1}{u}\right),$$

$$\psi_2(u)=u^{n-2}\;{}_2\left(\frac{1}{u}\right).$$

Vypočteme-li opět týmž způsobem jako dříve Σy, t. j. součet všech pořadnic dotyčných bodů tečen z bodů (ξ, η) ke křivce vedených, tu obdržíme podobnou rovnici jako dříve pro Σx.

$$\Sigma y = -\Sigma \frac{(\xi - \eta\beta)(\psi'_1(\beta)\psi'(\beta) - \psi_1(\beta)\psi''(\beta)) - \psi_1(\beta)\psi'_1(\beta) + 2\psi_2(\beta)\psi'(\beta)}{(\xi - \eta\beta)\psi'^2(\beta) + \psi_1(\beta)\psi'(\beta)}$$

Součet vztahuje se na všecky kořeny $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, rovnice

$$\psi(\beta) = 0.$$

Snadno lze ukázati, že pro jakýkoli kořen β platí vždy

$$\frac{2\psi'_1(\beta)}{\psi'(\beta)} = \frac{2\psi_2(\beta)}{\psi_1(\beta)} + \frac{\psi''(\beta)\psi_1(\beta)}{\psi'^2(\beta)}, \tag{9}$$

t. j. nezávislost Σy na (ξ, η), platí-li relace (6).

Hledíme-li totiž k podmínce:

$$\psi(\beta) = 0,$$

a k podmínce:

$$\beta = \frac{1}{\alpha},$$

tu obdržíme z rovnic (8)

$$\psi'(\beta) = -\frac{1}{\alpha^{n-2}} f'(\alpha)$$

$$\psi''(\beta) = \frac{\alpha f''(\alpha) - 2(n-1)f'(\alpha)}{\alpha^{n-3}}$$

$$\psi_1(\beta) = \frac{1}{\alpha^{n-1}} f_1(\alpha)$$

$$\psi'_1(\beta) = \frac{(n-1)f_1(\alpha) - \alpha f'_1(\alpha)}{\alpha^{n-2}}$$

$$\psi_2(\beta) = \frac{f_2(\alpha)}{\alpha^{n-2}}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (9), poznáme, že skutečně jest vyplněna; obdržíme totiž:

$$2\frac{\alpha f'_1(\alpha) - (n-1)f_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{2\alpha f_2(\alpha)}{f_1(\alpha)} + \frac{\alpha f''(\alpha) f_1(\alpha)}{f_1^2(\alpha)} - \frac{2(n-1)f'(\alpha)f_1(\alpha)}{f'^2(\alpha)},$$

aneb

$$\frac{2\alpha f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{2f_2(\alpha)\,\alpha}{f_1(\alpha)} + \alpha\,\frac{f''(\alpha) f_1(\alpha)}{f'^2(\alpha)},$$

t. j.

$$\frac{2f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{2f_2(\alpha)}{f_1(\alpha)} + \frac{f''(\alpha) f_1(\alpha)}{f'^2(\alpha)},$$

kterážto rovnice dle relace (6″) pro jakékoli t, tedy i pro $t = \alpha$, jest vyplněna.

Uveďme nyní některé applikace vět nalezených.

Z rovnice (6) patrno, že je-li

$$f_1(t) = 0,$$

a $f'(t)$ od nully různé, že i

$$f_2(t) = 0;$$

t. j. schází-li v rovnici členy rozměru $(n-1)$-ho a $(n-2)$-ho, jest věta naše v platnosti. Jestli mimo to i všechna $f'(\alpha)$ jsou od nully různá, pak i dle rovnice (7)

$$\Sigma x = 0,$$

a z důvodů těchže i

$$\Sigma y = 0.$$

Tím dospíváme k výsledku:

Je-li dána křivka

$$f_n(x, y) + f_{n-3}(x, y) + f_{n-4}(x, y) + \ldots = 0.$$

kdež $f_k(x, y)$ značí součet homogenních členů stupně k-tého, a jsou-li kořeny rovnice

$$f(\alpha) = f_n(1, \alpha) = 0,$$

od sebe různé, pak

$$\Sigma x = 0,$$
$$\Sigma y = 0.$$

Ku křivkám těm patří křivky tvaru

$$Ax^n + By^n = C;$$

poněvadž tyto nemají žádného dvojného bodu (vyjímaje $C = 0$), pak o nich platí: Vedeme-li ke křivkám těmto tečny libovolným bodem, pak střed středních vzdáleností bodů dotyčných jest počátek souřadnic. Ke křivkám těmto patří ovšem i křivky stupně druhého

$$Ax^2 + By^2 = C,$$

kdež konstanta C ale musí rovnati se nulle, poněvadž členy rozměru $n - 2$ musí vymizeti. V tomto případě vyjadřuje věta naše známou větu, že polára musí procházeti dvojným bodem degenerované křivky

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

kterýmž je počátek.

Jakožto další applikaci uveďme ještě příklady následující: Dle rovnice (6) můžeme dvě z funkcí $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ libovolně voliti.

Položme tedy:

$$f_1(t) = kf'(t),$$

kdež k konstantu od nully různou značí; pak:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k^2f'^2(t)}{f'(t)}\right) = 2f_2(t)$$

t. j.

$$f_2(t) = \frac{k^2}{2} f''(t).$$

Tím dospíváme k typu čar:

$$x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + kx^{n-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{k^2}{2} x^{n-2} f''\left(\frac{y}{x}\right) + \omega(x, y) = 0,$$

kdež $\omega(x, y)$ funkci nejvýše stupně $(n - 3)$-ho značí.

Z rovnice (7) pak jednoduchým výpočtem obdržíme:

$$\Sigma x = 0$$
$$\Sigma y = -(n - 1)\, nk.$$

Jakožto poslední applikaci předpokládejme, že v rovnici křivky scházejí členy rozměru $(n - 2)$-ho, t. j.

$$f_2(t) = 0.$$

Z rovnice (6) integrováním plyne:

$$\frac{f_1^2(t)}{f'(t)} = k_2$$

t. j.

$$f'(t) = \frac{1}{k_2} f_1^2(t),$$

a

$$f(t) = \frac{1}{k_2}\int f_1^2(t)\,dt + k_1.$$

Funkci $f_1(t)$ možno voliti libovolně, ovšem s tou podmínkou, aby stupeň funkce $f(t)$ nevzešel vyšší, než jest stupeň křivky.

Položme na př. stupeň rovnice křivky lichý:

$$n = 2k + 1,$$

a za $f_1(t)$ volme funkci co nejjednodušší, na př.

$$f_1(t) = C_1 t^k;$$

pak možno položiti:

$$f(t) = C_2 t^{2k+1} + C_3,$$

kdež C_1, C_2, C_3 značí konstanty; C_1 i C_2 jsou ovšem od nully různé. Aby i součet Σx, t. j. výraz (7) byl určitý, pokládejme i C_3 od nully různé. (Mohou v součtu Σx obsaženy býti body nekonečně vzdálené, čímž Σx může nabýti hodnoty libovolné.) Rovnice křivky má pak tvar:

$$x^{2k+1}\left(C_2 \frac{y^{2k+1}}{x^{2k+1}} + C_3\right) + x^{2k} C_1 \frac{y^k}{x^k} + \omega(x, y) = 0,$$

kdež $\omega(x, y)$ značí funkci, jejíž stupeň jest nejvýše $2k - 2$. Odstraníme-li v rovnici této zlomky, obdržíme rovnici:

$$C_3 x^{2k+1} + C_2 y^{2k+1} + C_1 x^k y^k + \omega(x, y) = 0.$$

Křivky typu tohoto mají opět vlastnost tu, že

$$\Sigma x \text{ i } \Sigma y$$

zůstává konstantní ať vedeme tečny ke křivce kterýmkoli bodem v rovině.

Dle rovnice (7),

$$\Sigma x = \Sigma \frac{f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

kdež α jest kořenem rovnice:

$$C_2 \alpha^{2k+1} + C_3 = 0;$$

poněvadž výraz $f'_1(\alpha)$ dle α jest ještě o dvě jednotky nižšího stupně než výraz $f'(\alpha)$, jest dle známé věty hodnota součtu

$$\Sigma \frac{f'_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

a tedy:

$$\Sigma x = 0,$$

a z důvodu symmetrie i

$$\Sigma y = 0.$$

Položíme-li $k = 1$, obdržíme křivky stupně třetího:

$$C_3 x^3 + C_2 y^3 + C_1 xy + C_0 = 0.$$

Klademe-li konečně $C_0 = 0$, přecházejí křivky ty v unikursální čáry stupně třetího s dvojným bodem v počátku a s inflekční přímkou v nekonečnu.

Poněvadž v součtu Σx i Σy jest zastoupen i dvojný bod se souřadnicemi (0, 0), plyne z toho věta:

Střed středních vzdáleností dotyčných bodů tečen libovolným bodem roviny procházejících ku křivkám

$$C_3 x^3 + C_2 y^3 + C_1 xy = 0,$$

jest dvojný bod. Zvláštním případem těchto jest list Descartesův:

$$x^3 + y^3 + axy = 0.$$

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních.

Napsal Dr. **Fr. Rádl.**

(Pokračování.)

2. Hleďme nyní rozšířiti předcházející úvahy na lineárné rovnice s derivacemi partiálními.

Proveďme s jistou funkcí u o třech neodvisle proměnných x, y, z (modifikace pro n proměnných jest pak samozřejmá) za sebou operace

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial z} + cu, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} + \beta\frac{\partial u}{\partial z} + \gamma u,$$